

**ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ
В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ**

И. В. Пушкарёва (Новосибирск)

Рассматривается нестационарное течение несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое при продольном обтекании плоской пластины, когда внешний поток представляет течение с постоянной скоростью, на которое наложено синусоидальное возмущение.

Задача рассматривается в двух вариантах: в одном случае гармонические колебания скорости набегающего потока зависят только от времени, а в другом случае — также и от продольной координаты (возмущения, сносимые потоком).

Предположение об относительной малости амплитуды возмущения позволяет строить решение задачи в виде степенных рядов, причем отыскиваются коэффициенты для первых трех членов этих рядов. Специальным выбором безразмерных переменных задача сводится к определению универсальных функций.

Исследована устойчивость течения в пограничном слое для второго случая, для чего применен энергетический метод теории гидродинамической устойчивости.

1. Поле скорости в пограничном слое при наличии периодических возмущений во внешнем потоке. Рассмотрим эту задачу в двух вариантах. Положим, что скорость набегающего потока в одном случае имеет вид (случай I)

$$U(x_1, t) = U_0 [1 + \lambda \cos \omega (x_1 / U_0 - t)] \quad (1.1)$$

а в другом (случай II)

$$U(t) = U_0 (1 + \lambda \cos \omega t) \quad (1.2)$$

(ось x_1 направлена вдоль пластины, t — время). Выражение (1.1) соответствует внешнему течению с постоянной скоростью U_0 , на которое наложены синусоидальные возмущения с амплитудой λ и частотой ω , сносимые внешним потоком, со скоростью набегающего U_0 . Такая задача в предположении о малости λ изучалась в работе [1], где решение дано для малых частот ω .

Во втором случае наложенные синусоидальные возмущения во внешнем потоке не зависят от пространственной координаты x_1 . В работе [2] представлены обзор теоретических исследований и результаты детального экспериментального изучения такого течения в пограничном слое. Надо отметить, однако, что в теоретических работах течение изучалось только в области либо малых, либо больших частот возмущений.

В данной работе на частоту ω не накладывается ограничений, но предполагается амплитуда $\lambda \ll 1$.

Уравнения нестационарного двумерного пограничного слоя имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \quad (1.3)$$

где

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= v(x_1, x_2, t) = 0 & (x_2 = 0) \\ u(x_1, x_2, t) &\rightarrow U(x_1, t) & (x_2 \rightarrow \infty) \\ u(x_1, x_2, t) &\rightarrow U(t) & (x_2 \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

Здесь $u(x_1, x_2, t)$ и $v(x_1, x_2, t)$ — соответственно продольная и поперечная составляющие скорости в пограничном слое, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости, ось x_2 перпендикулярна пластине.

Предполагая $\lambda \ll 1$, решение уравнений (1.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= u_0(x_1, x_2) + \lambda u_1(x_1, x_2, t) + \lambda^2 u_2(x_1, x_2, t) + \dots \\ v(x_1, x_2, t) &= v_0(x_1, x_2) + \lambda v_1(x_1, x_2, t) + \lambda^2 v_2(x_1, x_2, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем ограничимся определением только первых трех членов этих рядов. Рассмотрим случай I, когда скорость внешнего потока задается выражением (1.1). Подставляя выражения (1.4) в уравнения (1.3) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим системы уравнений для коэффициентов разложений (1.4).

Члены при нулевой степени λ дают стационарные уравнения

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial v_0}{\partial x_2} = 0 \quad (1.5)$$

с граничными условиями

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (x_2 = 0), \quad u_0 \rightarrow U_0 \quad (x_2 \rightarrow \infty)$$

Члены с λ^1 дают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} &= v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

с граничными условиями

$$u_1 = v_1 = 0 \quad (x_2 = 0), \quad u_1 \rightarrow U_0 \cos \omega \left(\frac{x_1}{U_0} - t \right) \quad (x_2 \rightarrow \infty)$$

Члены с λ^2 дают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \\ = v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{U_0 \omega}{2} \sin 2\omega \left(\frac{x_1}{U_0} - t \right) & \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

с граничными условиями

$$u_2 = v_2 = 0 \quad (x_2 = 0), \quad u_2 \rightarrow 0 \quad (x_2 \rightarrow \infty)$$

Заметим, что первые члены разложений (1.4), как и следовало ожидать, представляют собой известное решение задачи Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине

$$u_0 = U_0 f'(\eta), \quad v_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_0}{x_1} \right)^{1/2} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \quad \left(\eta = x_2 \left(\frac{U_0}{\nu x_1} \right)^{1/2} \right) \quad (1.8)$$

Таблицы для функции $f(\eta)$ и ее производной $f'(\eta)$ даны в работе [3]. В уравнениях (1.6) и (1.7) перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \eta = x_2 \left(\frac{U_0}{\nu x_1} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{\omega x_1}{U_0}, \quad \psi = \omega \left(\frac{x_1}{U_0} - t \right) \\ u_i = U_0 u_i^\circ, \quad v_i = \left(\frac{\nu U_0}{x_1} \right)^{1/2} v_i^\circ \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6) в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial \eta^2} + \xi(1-f') \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \psi} - \xi f' \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \xi} + \frac{f}{2} \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \eta} + \frac{1}{2} f'' \eta u_1^\circ - f'' v_1^\circ &= 0 \\ \xi \left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial \psi} + \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \xi} \right) - \frac{\eta}{2} \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1^\circ}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

граничные условия

$$u_1^\circ = v_1^\circ = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_1^\circ \rightarrow \cos \psi \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Уравнения (1.7) в этих переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial \eta^2} + \xi(1-f) \frac{\partial u_2^\circ}{\partial \psi} - \xi f' \frac{\partial u_2^\circ}{\partial \xi} + \frac{1}{2} f \frac{\partial u_2^\circ}{\partial \eta} + \frac{1}{2} f'' \eta u_2^\circ - f'' v_2^\circ &= \\ = \frac{\eta}{2} u_1^\circ \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \eta} - \xi u_1^\circ \left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial \psi} + \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \xi} \right) - v_1^\circ \frac{\partial u_1^\circ}{\partial \eta} - \frac{\xi}{2} \sin 2\psi & \\ \xi \left(\frac{\partial u_2^\circ}{\partial \psi} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial \xi} \right) - \frac{\eta}{2} \frac{\partial u_2^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial v_2^\circ}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

граничные условия

$$u_2^\circ = v_2^\circ = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_2^\circ \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Применяя метод разделения переменных в силу того, что уравнения (1.10) линейны, однородны и коэффициенты не зависят от переменной ψ , решения уравнений (1.10) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1^\circ &= A_{10}(\eta, \zeta) \cos \psi + B_{10}(\eta, \zeta) \sin \psi \\ v_1^\circ &= C_{10}(\eta, \zeta) \cos \psi + D_{10}(\eta, \zeta) \sin \psi \end{aligned} \quad (1.12)$$

Выражения (1.12) можно переписать в другом виде

$$\begin{aligned} u_1^\circ &= a \cos(\psi + \alpha), & v_1^\circ &= b \cos(\psi + \beta) \\ a &= \sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2}, & b &= \sqrt{C_{10}^2 + D_{10}^2}, & \operatorname{tg} \alpha &= -B_{10}/A_{10}, & \operatorname{tg} \beta &= -D_{10}/C_{10} \end{aligned}$$

Подставим (1.12) в (1.10), сгруппируем члены и приравняем нулю коэффициенты при $\cos \psi$ и $\sin \psi$. Получим систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа

$$\begin{aligned} L(A_{10}) &= -\zeta(1-f')B_{10} + f''C_{10}, & L(B_{10}) &= \zeta(1-f')A_{10} + f''D_{10} \\ K(C_{10}, A_{10}) &= -\zeta B_{10}, & K(D_{10}, B_{10}) &= \zeta A_{10} \end{aligned} \quad (1.13)$$

граничные условия

$$A_{10} = B_{10} = C_{10} = D_{10} = 0 \quad (\eta = 0), \quad A_{10} \rightarrow 1, \quad B_{10} \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(p) &= \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - \zeta f' \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{f}{2} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\eta}{2} f'' p \\ K(p, q) &= \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial q}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial q}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

Решение уравнений (1.11) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_2^\circ &= A_{20}(\eta, \zeta) + A_{21}(\eta, \zeta) \cos 2\psi + B_{21}(\eta, \zeta) \sin 2\psi \\ v_2^\circ &= C_{20}(\eta, \zeta) + C_{21}(\eta, \zeta) \cos 2\psi + D_{21}(\eta, \zeta) \sin 2\psi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставим (1.12) и (1.14) в (1.11) и приравняем нулю коэффициенты при $\cos 2\psi$, $\sin 2\psi$, а также сумму оставшихся членов. В результате получим

$$\begin{aligned} L(A_{21}) &= -2\zeta(1-f')B_{21} + f''C_{21} + \zeta A_{10}B_{10} + \frac{\zeta}{4} \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_{10}^2 - B_{10}^2) - \\ &\quad - \frac{\eta}{8} \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{10}^2 - B_{10}^2) + \frac{1}{2} \left(C_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial \eta} - D_{10} \frac{\partial B_{10}}{\partial \eta} \right) \\ L(B_{21}) &= 2\zeta(1-f')A_{21} + f''D_{21} + \frac{\zeta}{2} (B_{10}^2 - A_{10}^2) + \\ &\quad + \frac{\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_{10}B_{10}) - \frac{\eta}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{10}B_{10}) + \frac{1}{2} \left(D_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial \eta} + C_{10} \frac{\partial B_{10}}{\partial \eta} \right) + \frac{\zeta}{2} \\ L(A_{20}) &= f''C_{20} - \frac{\eta}{8} \frac{\partial}{\partial \eta} (A_{10}^2 + B_{10}^2) + \frac{\zeta}{4} \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_{10}^2 + B_{10}^2) + \frac{1}{2} \left(C_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial \eta} + D_{10} \frac{\partial B_{10}}{\partial \eta} \right) \\ K(C_{21}, A_{21}) &= -2\zeta B_{21}, \quad K(D_{21}, B_{21}) = 2\zeta A_{21}, \quad K(C_{20}, A_{20}) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} A_{20} = A_{21} = B_{21} = C_{20} = C_{21} = D_{21} &= 0 \quad (\eta = 0) \\ A_{20} \rightarrow 0, \quad A_{21} \rightarrow 0, \quad B_{21} \rightarrow 0 &\quad (\eta \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Системы (1.13) и (1.15) решались численным методом с использованием неявной конечно-разностной схемы.

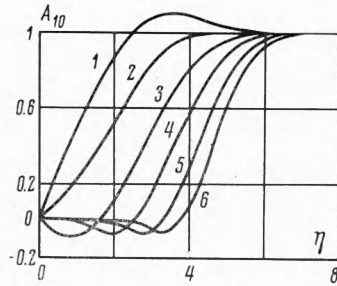
Частные производные аппроксимировались следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \eta} &\approx \frac{1}{\Delta \eta} [\theta (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) + (1-\theta)(q_{i+1}^n - q_i^n)] \quad (1/2 \leq \theta \leq 1) \\ \frac{\partial q}{\partial \zeta} &\approx \frac{1}{\zeta_{n+1} - \zeta_n} \left[\frac{1}{2} (q_{i+1}^{n+1} + q_i^{n+1}) - \frac{1}{2} (q_{i+1}^n + q_i^n) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

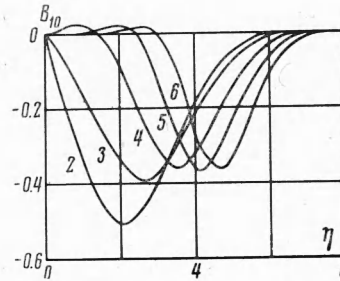
Граничные условия при $\eta \rightarrow \infty$ переносились на линию $\eta = 10$. Линия $\zeta = 0$ будет характеристикой для системы уравнений (1.13), (1.15). Счет велся по слоям

$\zeta = \text{const}$ с применением метода матричной прогонки, причем в данной задаче удалось снизить порядок матрицы до второго. Значение θ было выбрано из рассмотрения решенной упрощенной модельной задачи при разных θ . Все расчеты основной задачи проводились с $\theta = 1$. Задача решалась на ЭВМ М-20.

Изложенный выше метод и последовательность решения задачи можно применить и к случаю II, однако при переходе к безразмерным переменным в этом случае вместо ψ надо ввести $\varphi = \omega t$. Характер получаемых при этом уравнений остается тем же. Коэффициенты разложения (1.4) отыскиваются также в виде (1.12), (1.14).



Фиг. 1



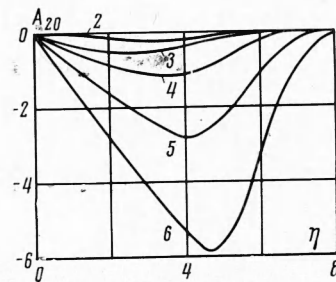
Фиг. 2

Анализируя поведение полученных универсальных функций в том и в другом случаях, можно сделать некоторые качественные выводы, относящиеся к свойствам рассматриваемых течений. Остановимся сначала на случае I.

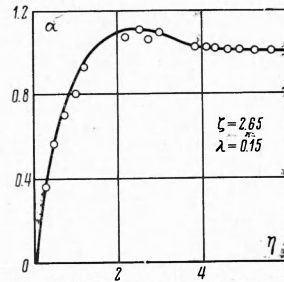
Для этого случая графики функций A_{10} , B_{10} , A_{20} представлены на фиг. 1—3, где кривые соответствуют следующим значениям ζ :

Кривые	1	2	3	4	5	6
$\zeta =$	0	0.87	2.20	10.01	30.53	72.70

Из рассмотрения этих кривых, а также поведения других функций, не представленных здесь, можно сделать такие заключения в случае I.



Фиг. 3



Фиг. 4

1. С увеличением параметра $\zeta = \omega x_1/u_0$ зона влияния внешних возмущений смещается все ближе к внешней границе пограничного слоя.

2. Сравнение максимальных по абсолютной величине значений функций A_{10} , B_{10} , A_{20} , A_{21} , B_{21} при разных ζ показывает, что при увеличении ζ эти значения для A_{20} , A_{21} , B_{21} быстро растут, тогда как для A_{10} и B_{10} почти не меняются. Это означает, в частности, что при фиксированной частоте ω и скорости U_0 с ростом x_1 возрастает вклад второй частоты 2ω .

3. Осредненная по периоду $2\pi/\omega$ продольная скорость пограничного слоя $\bar{u}(x_1, x_2)$, оказывается равной

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = f'(\eta) + \lambda^2 A_{20}(\eta, \zeta) \quad (1.17)$$

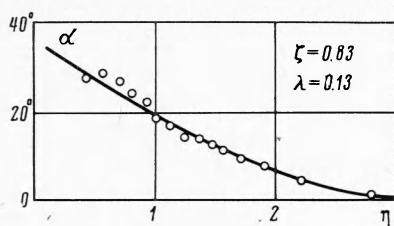
Функция $A_{20}(\eta, \zeta)$, начиная с некоторых значений ζ (примерно с $\zeta = 0,8$), всегда неположительна. Численный анализ показывает, что при достаточно больших значениях ζ в профилях осредненной скорости появляются точки перегиба.

Поведение пограничного слоя в случае II подробно рассматривается в работе [2]. Примеры сравнения полученных результатов с экспериментальными данными [2] приведены на фиг. 4, 5. Представлены зависимости, соответственно, амплитуды при $\zeta = 2.65$, $\lambda = 0.15$ и фазы при $\zeta = 0.83$, $\lambda = 0.13$ скорости u_1^0 .

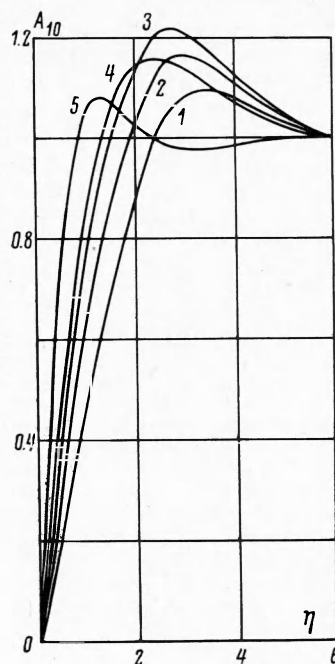
Для случая II функции A_{10} , B_{10} , A_{20} представлены на фиг. 6—8, где кривые соответствуют следующим значениям ζ :

Кривые	1	2	3	4	5
ζ	=0	0.67	1.21	2.01	6.12

Надо отметить, что поведение течения в пограничном слое в двух рассмотренных случаях существенно различно.



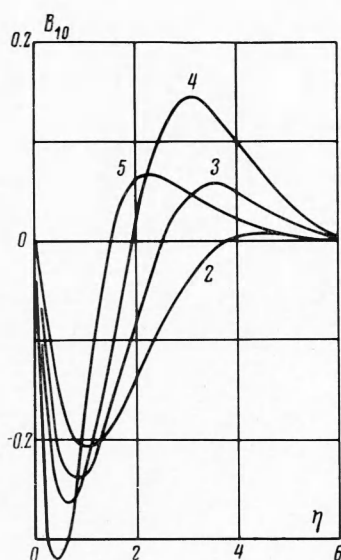
Фиг. 5



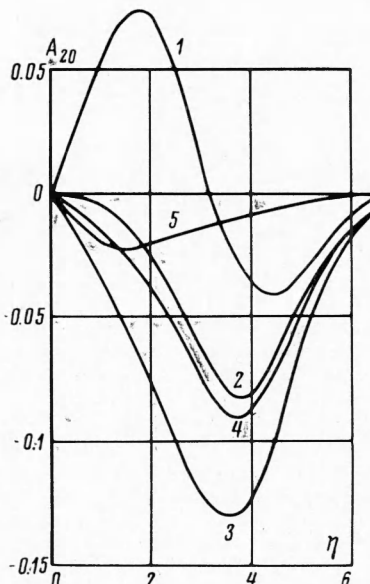
Фиг. 6

1. В отличие от случая I в случае II с увеличением параметра ζ зона влияния внешних возмущений смещается все ближе к пластине.

2. В случае I максимальная амплитуда колебаний a достигается при $\zeta = 0$, тогда как в случае II при $\zeta \approx 1,5$.



Фиг. 7



Фиг. 8

3. При достаточно больших значениях ζ в случае II влияние колебаний во внешнем потоке на профиль осредненной скорости в пограничном слое уменьшается. Это видно из того, что максимум абсолютной величины функции A_{20} , начиная примерно с $\zeta = 1,5$, убывает. В этом случае появление точек перегиба на профилях осредненной скорости не может иметь места.

2. Исследование устойчивости течения в пограничном слое (для случая 1). Основное течение, устойчивость которого исследуется, представляет полученное в п.1, течение в пограничном слое плоской пластины, когда внешний поток задан выражением (1.1). При использовании энергетического метода будем опираться на работу [4], в которой рассматривается устойчивость нестационарных параллельноструйных потоков. Пренебрегая, как это обычно делается при рассмотрении устойчивости течений в пограничном слое неоднородностью потока по длине и поперечной составляющей скорости, поток в пограничном слое можно тоже приближенно считать параллельноструйным. Интегральное уравнение для энергии возмущенного движения в некотором ограниченном объеме V поля течения (используя тензорную запись) можно написать так:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{w_i w_i}{2} dV = - \iiint_V w_i w_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV - \nu \iiint_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV \quad (2.1)$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

Здесь по всем повторяющимся индексам производится суммирование, w_i — скорость возмущения, U_i — скорость основного течения.

Это уравнение получается непосредственно из уравнений Навье — Стокса без каких-либо предположений о величине возмущений.

Используем простейшее «квазистационарное» определение устойчивости неустановившегося течения: неустановившееся течение в указанный момент считается устойчивым, если кинетическая энергия возмущений мгновенного поля скорости основного течения убывает во времени.

Только первый интеграл в правой части уравнения (2.1) может быть положительным, следовательно, по этому определению течение устойчиво, если

$$\nu \iiint_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV \geq - \iiint_V w_i w_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \quad (2.2)$$

Случай, если имеет место равенство, называется случаем нейтральной устойчивости. Он и будет наиболее интересным.

В предположениях, изложенных выше, основное течение задается в виде

$$U_1 = U_3 = 0, \quad U_2 = U_2(x_2, t)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$w_i^\circ = \frac{w_i}{U_0}, \quad u^\circ = \frac{U_2}{U_0}, \quad y_i = \frac{x_i}{\delta}, \quad R = \frac{U_0 \delta}{\nu} \quad (2.3)$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя, определенная как расстояние от стенки до точки, где скорость $U_2 = 0.999 U$. Тогда условие (2.2) для случая нейтральной устойчивости можно представить в виде

$$R = - \left(\iiint_V \frac{\partial w_i^\circ}{\partial y_j} \frac{\partial w_i^\circ}{\partial y_j} dV \right) \left(\iiint_V w_1^\circ w_2^\circ \frac{\partial U}{\partial y_2} dV \right)^{-1} \quad (2.4)$$

Если искать только достаточные условия устойчивости, нижнюю границу критического числа Рейнольдса R_* можно определить, минимизируя R в уравнении (2.4).

Так же, как и в работе [4], ограничимся рассмотрением только двумерных возмущений вида

$$w_1^\circ = s(y_2, t) e^{i\gamma y_1}, \quad w_2^\circ = z(y_2, t) e^{i\gamma y_1} \quad (2.5)$$

В результате получаем линейное дифференциальное уравнение относительно z с однородными граничными условиями

$$z''' - 2\gamma^2 z'' + \gamma^4 z = -i\gamma R \left(\frac{\partial u^\circ}{\partial y_2} z' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial y_2^2} z \right) \quad (2.6)$$

$$z = z' = 0 \quad (y_2 = 0), \quad z \rightarrow 0, \quad z' \rightarrow 0 \quad (y_2 \rightarrow \infty)$$

где время t играет роль параметра. Коэффициенты зависят от независимой переменной y_2 и параметров γ и t .

Таким образом, получаем задачу на собственные значения, причем в качестве собственных значений определяются числа $R = R(\gamma, t)$.

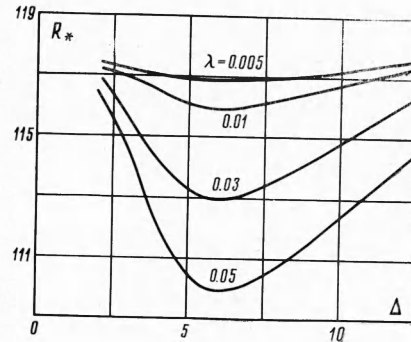
В данной работе собственные значения определялись численно конечно-разностным методом. Так как минимизируется R , представляют интерес только самые малые собственные значения. Искомое значение R_* для каждого момента времени будет наименьшим из чисел R по всему спектру γ .

Перебирая эти наименьшие значения чисел R_* для различных моментов времени (в рассматриваемой задаче — в пределах одного периода), находим нижнюю границу R_* .

Обратим внимание на недостаток примененного метода, отмеченный в использованной здесь работе [4]: нельзя гарантировать, что найденные таким путем характеристики течения, в частности, числа R , будут удовлетворять уравнениям Навье — Стокса непрерывно во времени. Ведь, строго говоря, скорости удовлетворяют только интегральному уравнению энергии возмущения и уравнению неразрывности.

Анализ влияния частоты ω на значение критического числа Рейнольдса R_* показал, что наименьшее значение этого числа имеет практически при одной и той же (независимо от значения амплитуды колебаний) величине безразмерного параметра $\Delta = \delta \sqrt{\omega/2\nu}$ (фиг. 9).

Автор благодарит О. Ф. Васильева за постановку задачи и за помощь при подготовке работы к печати и В. Г. Судобичера за ценные советы.



Фиг. 9

Поступила 22 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Kestin J., Maeder P. F., Wang H. E. On boundary layers associated with oscillating streams. Appl. Scient. Res., 1964, Ser. A, vol. 10, No. 1.
2. Hill P. G., Stenning A. H. Laminar boundary layers in oscillatory flow. Trans. ASME, 1960, ser. D, vol. 82, No. 3.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Conrad P. W., Criminale W. O., Jr. The stability of time-dependent laminar flow: parallel flows. Z. angewandte Math. and Phys., 1965, vol. 16, No 2.

ДЛИНА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ

А. И. Леонтьев, Б. П. Миронов, А. В. Фафурин

(Новосибирск)

Приводятся теоретические и экспериментальные данные по определению длины начального участка трубы. Опыты проведены при изменении энтальпийного фактора от 0.08 до 0.8 и числе Рейнольдса от $6.9 \cdot 10^3$ до $2.4 \cdot 10^5$.

Исследованию процессов турбулентного теплообмена и трения в начальном участке трубы посвящено достаточно большое количество теоретических и экспериментальных работ [1-3].

Теоретическое исследование [1] показало, что для турбулентного течения в трубах с плавным входом, длина начального участка определяется уравнением

$$X_{н1} = 0.693R_0^{0.25}$$

В работе [2] на основе численного решения уравнения пограничного слоя дается аппроксимационная формула для длины начального участка

$$X_{н2} = 4.63R_0^{0.12}$$