

УДК 532.5: 533.6

КРИТЕРИИ ОТРЫВА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ГЛАДКОГО КОНТУРА

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики СО РАН, 644099 Омск

E-mail: gorelov@iitam.omsk.net.ru

В рамках модели идеальной жидкости на основе критерия Бриллюэна — Вилля рассмотрены критерии отрыва нестационарного потока от гладкого замкнутого контура. Сформулированы необходимые условия отрыва.

Ключевые слова: идеальная жидкость, отрывное течение.

Проблема отрывного обтекания тел является одной из главных в гидродинамике в течение более ста лет. Интерес к этой проблеме вызван не только ее актуальностью (практически все течения около тел имеют отрывной характер), но и чрезвычайной сложностью и многообразием явления отрыва потока от тела. Несмотря на интенсивные исследования, проблема отрывного обтекания тел до сих пор далека от своего решения. Наиболее общая модель отрывного обтекания должна учитывать вязкость и сжимаемость жидкости, а также нестационарный характер течения. Применение такой модели ограничено ее сложностью и серьезными вычислительными трудностями. Поэтому основная масса исследований проводится для более простых моделей.

Исторически первой Гельмгольцем (1868) и Кирхгофом (1869) рассматривалась модель плоского отрывного обтекания разомкнутого контура стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В дальнейшем эта модель течения усложнялась и расширялся класс обтекаемых контуров [1–3]. Отрыв потока моделировался линией тангенциального разрыва скоростей. Точка сопряжения этой линии с контуром определяет точку отрыва потока, которая предполагается заданной. Было показано, что в точке отрыва линия тангенциального разрыва должна иметь конечную кривизну (критерий Бриллюэна — Вилля [1]).

Наиболее полно исследована модель стационарного отрывного обтекания тел вязкой жидкостью (см., например, [3–6]). Отрывное течение в этой модели возникает за счет отрыва пограничного слоя. Условием отрыва является обращение в нуль силы вязкого трения на поверхности тела, что при положительном градиенте давления приводит к возвратному движению жидкости (критерий Прандтля).

Реальные отрывные течения имеют ярко выраженный нестационарный характер. Поэтому для их исследования необходимо рассматривать модели нестационарного обтекания тел. Экспериментальные и теоретические исследования [6] показали, что в нестационарном течении вязкой жидкости отрыв потока происходит не на поверхности обтекаемого тела, а внутри пограничного слоя в точке одновременного обращения в нуль силы трения и продольной составляющей вектора скорости жидкости (критерий Мура — Ротта — Сирса). Теоретические результаты в рамках модели отрывных нестационарных течений вязкой жидкости ограничены и получены, как правило, методами асимптотической теории [6, 7]. Более перспективной оказалась модель вязко-невязких отрывных течений, предложенная

Сирсом [8]. В этой модели вязкость жидкости учитывается только в нестационарном пограничном слое, а вне его и вихревых следов, сходящих с тела, течение предполагается потенциальным. Вихревые следы пополняются вихрями, образующимися в пограничном слое, а точка отрыва потока определяется критерием Мура — Ротта — Сирса [9].

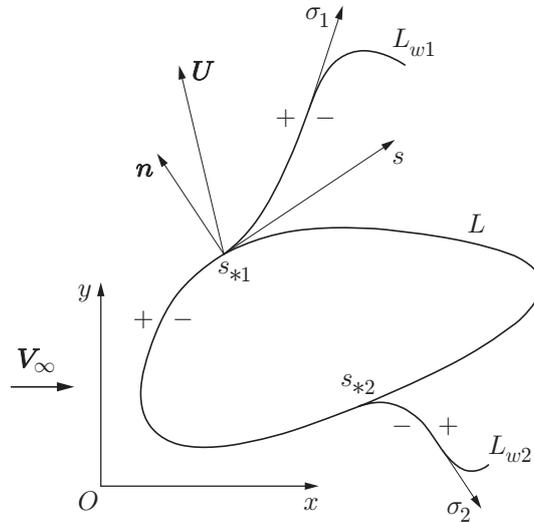
Сложности возникают при моделировании нестационарных отрывных течений идеальной жидкости. Положение точки отрыва оказывается в этом случае неопределенным. Отсутствие вязкости жидкости не позволяет применять критерий Мура — Ротта — Сирса, а других условий для определения точки отрыва потока идеальной жидкости пока нет. Ближе всех к решению этой проблемы подошел, видимо, С. Н. Постолюнский. В диссертации, посвященной исследованию нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой несжимаемой жидкости (1970 г.), он выбирает начальное положение точки отрыва потока из условия минимума давления. В самой точке отрыва предполагается выполнение критерия Бриллюэна — Вилля, скорость движения точки отрыва полагается равной скорости жидкости в угловой точке между вихревой пеленой и контуром, а при переходе через вихревую пелену требуется непрерывность не только давления, но и касательной составляющей градиента давления. Результаты расчета отрывного обтекания кругового цилиндра по этой модели хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными других авторов [10].

В настоящей работе развивается идея С. Н. Постолюнского о связи точки отрыва потока с минимумом давления на обтекаемом контуре. Сформулированы необходимые условия отрыва нестационарного потока идеальной жидкости от контура, на основе которых получено нелинейное дифференциальное уравнение для скорости перемещения точки отрыва вдоль контура.

1. Рассмотрим обтекание гладкого замкнутого контура L потоком идеальной несжимаемой жидкости в декартовой системе координат Oxy . Предположим, что до момента времени $t = 0$ обтекание контура L стационарно (со скоростью v_∞ в бесконечном удалении от контура) и безотрывно, а при $t \geq 0$ движение жидкости вокруг L становится нестационарным и отрывным. При $t > 0$ точки контура могут перемещаться со скоростью $U(s, t)$, где s — дуговая координата, отсчитываемая от некоторой заданной точки вдоль контура по часовой стрелке. Вектор скорости U должен удовлетворять условию равенства нулю интеграла от $U(s, t)$ по замкнутому контуру L . Физический смысл этого условия — сохранение длины контура и объема внутри него при перемещении его точек. Отрыв потока происходит путем схода с контура одного или нескольких вихревых следов, которые моделируются линиями $L_{wk}(t)$, $k = 1, 2, \dots$ тангенциального разрыва скорости. Точка сопряжения вихревого следа L_{wk} с контуром L определяет точку отрыва потока, которая с течением времени может перемещаться вдоль контура. Дуговую координату этой точки обозначим через $s_{*k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$ (см. рисунок).

Отметим, что линия вихревого следа L_{wk} представляет собой разрез, берега которого L_{wk}^+ , L_{wk}^- являются границами области течения жидкости. Для представленной на рисунке модели отрывного течения со сходом с контура двух вихревых следов L_{w1} , L_{w2} точкам отрыва потока соответствуют значения дуговых координат $s = s_{*1} - 0$ и $s = s_{*2} + 0$. На вихревом следе L_{w1} линия тока относительного движения жидкости, проходящая через точку отрыва потока $s_{*1} - 0 \in L$, продолжается вдоль берега L_{w1}^+ разреза L_{w1} . На другой берег L_{w1}^- разреза линия тока относительного движения приходит с контура L в точке $s = s_{*1} + 0$. Аналогичная картина течения наблюдается и в окрестности точки схода вихревого следа L_{w2} .

При переходе через вихревые следы L_{wk} гидродинамическое давление и нормальная компонента скорости жидкости не меняются, тогда как касательная составляющая скорости терпит разрыв, величина которого γ_{wk} заранее неизвестна. Неизвестными оказываются



Отрыв двух вихревых следов с гладкого контура

ся и формы вихревых следов L_{wk} , включая положение точек отрыва. Все эти неизвестные функции нелинейным образом влияют друг на друга и могут быть определены только при решении соответствующей начально-краевой задачи, связанной с отрывным нестационарным обтеканием контура.

2. При рассмотрении модели отрывного нестационарного течения идеальной жидкости около гладкого контура нужно знать как точки отрыва потока (точки схода вихревых следов), так и скорости их перемещения вдоль контура. Для их определения необходимо сформулировать соответствующие условия отрыва потока.

В реальном течении отрыв потока происходит в результате взаимодействия сил вязкого трения, сил инерции жидкости и градиента гидродинамического давления. При этом в нестационарном потоке, как было отмечено в [6], отрыв происходит не с поверхности тела, а вне его, в области течения, где силы вязкого трения становятся существенно меньше. Это обстоятельство позволяет надеяться на успешное применение модели идеальной жидкости при исследовании нестационарного отрывного течения.

Рассмотрим физические факторы, влияющие на отрыв нестационарного потока идеальной жидкости. Основной причиной отрыва является, видимо, градиент давления, а точнее, его тангенциальная составляющая $\partial p / \partial s$, от величины которой зависит уровень сил инерции жидкости вдоль контура L . В точке контура, в которой $\partial p / \partial s = 0$, обращается в нуль и тангенциальная составляющая сил инерции жидкости. Возникает состояние неопределенного равновесия, и нужен лишь некоторый дополнительный импульс, провоцирующий отрыв потока. Таким импульсом может быть рост давления за рассматриваемой точкой, что меняет знак сил инерции и может вызвать обратное течение жидкости.

С учетом сделанных замечаний перейдем к формулированию условий, которые должны выполняться в окрестности точки отрыва нестационарного потока около гладкого контура.

1. В точке отрыва потока тангенциальная составляющая градиента давления имеет нулевое значение. В случае двух точек отрыва (см. рисунок) это условие принимает вид

$$\lim_{s \rightarrow s_{*1} - 0} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow s_{*2} + 0} \frac{\partial p}{\partial s} = 0. \quad (1)$$

2. В точке отрыва потока вихревой след L_{wk} имеет общую касательную с контуром L (критерий Бриллюэна — Вилля). При выполнении этого условия для L_{w1} линии тока для

относительного движения жидкости имеют конечную кривизну в точке отрыва $s_{*1} - 0$ и бесконечно большую кривизну в точке $s_{*1} + 0$, в которой линия тока относительного движения образует точку возврата. В соответствии с этим в точке $s_{*1} + 0$ относительная скорость жидкости равна нулю. Для вихревого следа L_{w2} картина относительного движения меняется на обратную: в точке $s_{*2} + 0$ линия тока имеет конечную кривизну, а в точке $s_{*2} - 0$ скорость равна нулю.

При нарушении критерия Бриллюэна — Вилля вихревой след не возникает, так как линия L_{wk} будет образовывать с контуром L угловые точки, в которых относительная скорость жидкости равна нулю и разрыв скоростей отсутствует.

3. Линия отрыва потока направлена в сторону увеличения давления вдоль контура. Это условие является составной частью критерия Прандтля для отрыва потока вязкой жидкости.

Отметим, что направление схода вихревых следов на рисунке выбрано с учетом условия 3. При этом предполагается, что до точек отрыва скорость жидкости на контуре L возрастает, а за ними убывает.

Перейдем к выводу соотношений, определяющих положение точек отрыва потока идеальной жидкости на основе предлагаемых условий. Предварительно получим формулы для расчета давления в точках подвижного контура и рассмотрим вопросы моделирования контура L вихревым слоем.

3. Предположим, что движение жидкости вне контура и вихревых следов потенциально. Тогда вектор скорости жидкости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, где $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости, а гидродинамическое давление определяется интегралом Коши — Лагранжа (без учета массовых сил):

$$p - p_\infty = -\rho \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v^2 - v_\infty^2) \right]. \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность жидкости; p_∞, v_∞ — давление и скорость на бесконечном удалении от контура; $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_s^2 + v_n^2$; $\partial/\partial t$ — оператор дифференцирования по t в фиксированной точке (x, y) .

Применим интеграл (2) к расчету гидродинамического давления в подвижной точке, перемещающейся в рассматриваемой декартовой системе координат со скоростью \mathbf{v}_e . Оператор производной по t в этой подвижной точке обозначим через $\delta/\delta t$. По определению

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - \mathbf{v}_e \cdot \nabla, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\delta\varphi}{\delta t} - \mathbf{v}_e \cdot \nabla\varphi. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$p - p_\infty = -\rho \left[\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \frac{1}{2} (v^2 - v_\infty^2) - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v} \right]. \quad (4)$$

Преобразуем (4) к более удобному виду. Для обозначения касательных и нормальных составляющих скоростей введем индексы s и n соответственно. В каждой точке контура L должно выполняться условие непротекания жидкости $(\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = 0$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к L (см. рисунок). С учетом этого условия

$$\begin{aligned} v^2/2 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v} &= (v_s^2 + v_n^2)/2 - (v_{es}v_s + v_{en}v_n) = [(v_s - v_{es})^2 - v_e^2]/2, \\ v_e^2 &= v_{es}^2 + v_{en}^2, \quad v_{en} = U_n. \end{aligned}$$

В результате интеграл Коши — Лагранжа (4) в точке, перемещающейся со скоростью \mathbf{v}_e в декартовой системе координат, принимает вид

$$p - p_\infty = -\rho \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta t} + \frac{1}{2} [(v_s - v_{es})^2 - v_e^2 - v_\infty^2] \right\}. \quad (5)$$

4. Контур L и вихревые следы L_{wk} будем моделировать вихревыми слоями. При таком моделировании предполагается, что внутри замкнутого контура L находится жидкость, движущаяся вместе с ним (скорость этой жидкости в точках контура равна U). Обозначим через $v_s^+(s, t)$, $v_s^-(s, t)$ предельные значения скорости жидкости при подходе к контуру L из внешней (+) и внутренней (-) областей. Интенсивность вихревого слоя $\gamma(s, t)$, моделирующего контур L , равна разрыву касательных составляющих скорости жидкости: $\gamma(s, t) = v_s^-(s, t) - v_s^+(s, t)$. Но $v_s^- = U_s$, поэтому

$$\gamma(s, t) = U_s(s, t) - v_s^+(s, t). \quad (6)$$

Отметим, что вектор интенсивности вихревого слоя направлен вдоль оси z с положительным направлением вращения от оси x к оси y против часовой стрелки.

Применим соотношение (6) для определения $\gamma(s, t)$ в окрестности точек отрыва потока $s_{*1} - 0$, $s_{*2} + 0$. В точках отрыва потока

$$\begin{aligned} v_s^+(s_{*1} - 0, t) &= v_s(s_{*1} - 0, t), & \gamma(s_{*1} - 0, t) &= U_s(s_{*1}, t) - v_s(s_{*1} - 0, t), \\ v_s^+(s_{*2} + 0, t) &= v_s(s_{*2} + 0, t), & \gamma(s_{*2} + 0, t) &= U_s(s_{*2}, t) - v_s(s_{*2} + 0, t). \end{aligned} \quad (7)$$

В точках возврата $s_{*1} + 0$, $s_{*2} - 0$, образующихся при сопряжении берегов L_{w1}^- , L_{w2}^+ разрезов L_{w1} , L_{w2} и контура L , относительная скорость жидкости равна нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} v_s^+(s_{*1} + 0, t) &= v_{es}(s_{*1}, t) = U_s(s_{*1}, t) + \dot{s}_{*1}(t), & \gamma(s_{*1} + 0, t) &= -\dot{s}_{*1}(t), \\ v_s^+(s_{*2} - 0, t) &= v_{es}(s_{*2}, t) = U_s(s_{*2}, t) + \dot{s}_{*2}(t), & \gamma(s_{*2} - 0, t) &= -\dot{s}_{*2}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично моделируются и вихревые следы L_{wk} . Предельные скорости жидкости на L_{wk} обозначим через $v_{wk\sigma}^+(\sigma, t)$, $v_{wk\sigma}^-(\sigma, t)$, отсчитывая дуговые координаты σ вдоль L_{wk} от точки схода вихревого следа с контура L . Интенсивность вихревого следа $\gamma_{wk}(\sigma, t)$ определяется выражением

$$\gamma_{wk}(\sigma, t) = v_{wk\sigma}^-(\sigma, t) - v_{wk\sigma}^+(\sigma, t). \quad (9)$$

В соответствии с критерием Бриллюэна — Вилля L_{wk} и L имеют общую касательную. Поэтому для рассматриваемых двух вихревых следов

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_{w1\sigma}^+(\sigma, t) &= v_s(s_{*1} - 0, t), & \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_{w1\sigma}^-(\sigma, t) &= v_s(s_{*1} + 0, t), \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_{w2\sigma}^+(\sigma, t) &= -v_s(s_{*2} - 0, t), & \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_{w2\sigma}^-(\sigma, t) &= -v_s(s_{*2} + 0, t). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом соотношений (7)–(10) интенсивности вихрей $\gamma_{w1}(0, t)$, $\gamma_{w2}(0, t)$, сходящих с контура L в вихревые следы L_{w1} , L_{w2} , определяются формулами

$$\begin{aligned} \gamma_{w1}(0, t) &= v_s(s_{*1} + 0, t) - v_s(s_{*1} - 0, t) = \gamma(s_{*1} - 0, t) + \dot{s}_{*1}(t), \\ \gamma_{w2}(0, t) &= -v_s(s_{*2} + 0, t) + v_s(s_{*2} - 0, t) = \gamma(s_{*2} + 0, t) + \dot{s}_{*2}(t). \end{aligned}$$

Скорости схода вихрей $w_1(t)$, $w_2(t)$ в следы L_{w1} , L_{w2} определяются относительной скоростью вихрей при $\sigma \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= [v_s(s_{*1} - 0, t) + v_s(s_{*1} + 0, t)]/2 - v_{es}(s_{*1}, t) = -\gamma_{w1}(0, t)/2, \\ w_2(t) &= -[v_s(s_{*1} - 0, t) + v_s(s_{*1} + 0, t)]/2 + v_{es}(s_{*1}, t) = \gamma_{w2}(0, t)/2. \end{aligned} \quad (11)$$

5. Перейдем к рассмотрению условия (1). Дифференцируя выражение (5) по s , имеем

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho \left\{ \frac{\delta v_s}{\delta t} + (v_s - v_{es}) \frac{\partial}{\partial s} (v_s - v_{es}) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_e^2}{2} \right) \right\}. \quad (12)$$

Здесь $v_e = |\mathbf{v}_e|$; \mathbf{v}_e — вектор скорости движения точки отрыва потока. Касательная v_{es} и нормальная v_{en} составляющие скорости \mathbf{v}_e равны (по определению)

$$v_{es} = U_s + \dot{s}_{*k}, \quad v_{en} = U_n. \quad (13)$$

С учетом (7), (13) в точке $s = s_{*1} - 0$

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_s}{\delta t} &= \dot{U}_s(s_{*1}, t) - \dot{\gamma}(s_{*1} - 0, t), \\ (v_s - v_{es}) \frac{\partial}{\partial s} (v_s - v_{es}) &= [\gamma(s_{*1} - 0, t) + \dot{s}_{*1}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*1}-0}, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_e^2}{2} \right) &= [U_s(s_{*1}, t) + \dot{s}_{*1}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*1}} + U_n(s_{*1}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*1}}. \end{aligned}$$

Аналогично в другой точке отрыва потока при $s = s_{*2} + 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_s}{\delta t} &= \dot{U}_s(s_{*2}, t) - \dot{\gamma}(s_{*2} + 0, t), \\ (v_s - v_{es}) \frac{\partial}{\partial s} (v_s - v_{es}) &= [\gamma(s_{*2} + 0, t) + \dot{s}_{*2}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*2}+0}, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_e^2}{2} \right) &= [U_s(s_{*2}, t) + \dot{s}_{*2}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*2}} + U_n(s_{*2}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (12) и требуя выполнения условия (1), приходим к следующим уравнениям для дуговых координат $s_{*1}(t)$, $s_{*2}(t)$ точек отрыва потока с гладкого контура:

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(s_{*1}, t) - \dot{\gamma}(s_{*1} - 0, t) + [\gamma(s_{*1} - 0, t) + \dot{s}_{*1}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*1}-0} - \\ - [U_s(s_{*1}, t) + \dot{s}_{*1}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*1}} - U_n(s_{*1}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*1}} = 0; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(s_{*2}, t) - \dot{\gamma}(s_{*2} + 0, t) + [\gamma(s_{*2} + 0, t) + \dot{s}_{*2}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*2}+0} - \\ - [U_s(s_{*2}, t) + \dot{s}_{*2}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*2}} - U_n(s_{*2}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*2}} = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Уравнения (14), (15) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка относительно $s_{*1}(t)$, $s_{*2}(t)$. Начальные условия определяются заданием дуговых координат $s_{*1}(0)$, $s_{*2}(0)$ точек на контуре L , в которых гидродинамическое давление достигает локального минимального значения в стационарном потоке, а $\dot{s}_{*1}(0) = \dot{s}_{*2}(0) = 0$. Функции $U_s(s, t)$, $U_n(s, t)$ являются заданными, а интенсивность вихревого слоя $\gamma(s, t)$ определяется решением соответствующей нелинейной начально-краевой задачи, которое, в свою очередь, зависит от положения $s_{*1}(t)$, $s_{*2}(t)$ и скорости движения $\dot{s}_{*1}(t)$, $\dot{s}_{*2}(t)$ точек отрыва потока. Таким образом, уравнения (14), (15) представляют собой лишь часть нелинейных уравнений, к совместному решению которых сводится конкретная начально-краевая задача нестационарного отрывного обтекания гладкого контура.

Отметим, что в точках $s_{*1} + 0$, $s_{*2} - 0$, лежащих на другом берегу разрезов L_{w1} , L_{w2} ,

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho \left\{ \dot{U}_s(s_{*k}, t) + \ddot{s}_{*k}(t) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_e^2}{2} \right) \Big|_{s=s_{*k}} \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

Анализ выражения (16) позволяет сделать два замечания. Во-первых, его нельзя рассматривать как уравнение для определения точки отрыва потока, так как координата $s_{*k}(t)$ связана только с законом движения контура. Во-вторых, в общем случае правая

часть выражения (16) отлична от нуля. Таким образом, $\partial p/\partial s$ терпит разрыв при переходе через вихревой след L_w в точке отрыва потока, и предположение о непрерывности $\partial p/\partial s$, сделанное в работе [10], неправомерно.

6. Выясним некоторые детали, связанные со сходом вихревых следов L_{w1} , L_{w2} с контура L . В соответствии с теоремой Кельвина о постоянстве циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру, охватывающему контур L и вихревые следы,

$$\frac{d}{dt} \{ \Gamma(t) + \Gamma_{w1}(t) + \Gamma_{w2}(t) \} = 0,$$

$$\Gamma(t) = - \int_L v_s(s, t) ds = \int_L \gamma(s, t) ds, \quad \Gamma_{wk}(t) = \int_{L_{wk}} \gamma_{wk}(\sigma, t) d\sigma, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Здесь $\Gamma(t)$, $\Gamma_{wk}(t)$ — циркуляции скорости по контурам L , L_{wk} с обходом их против часовой стрелки. Покажем, что

$$\frac{d\Gamma_{w1}}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma_{w1}^2(0, t), \quad \frac{d\Gamma_{w2}}{dt} = \frac{1}{2} \gamma_{w2}^2(0, t). \quad (18)$$

Производная по времени от циркуляции скорости вокруг L_{wk} связана с разрывом потенциала скорости в точке схода вихревого следа соотношением

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{wk}(t) = \frac{\delta}{\delta t} [\varphi(s_{*k} - 0, t) - \varphi(s_{*k} + 0, t)]. \quad (19)$$

В свою очередь, производная по t от разрыва потенциала скорости может быть определена из условия непрерывности давления при переходе через L_{wk} . Из (5) следует, что это условие можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \varphi(s_{*k} - 0, t) + \frac{1}{2} [v_s(s_{*k} - 0, t) - v_{es}(s_{*k}, t)]^2 = \\ = \frac{\delta}{\delta t} \varphi(s_{*k} + 0, t) + \frac{1}{2} [v_s(s_{*k} + 0, t) - v_{es}(s_{*k}, t)]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

В окрестности точки схода вихревых следов L_{w1} , L_{w2}

$$\begin{aligned} v_s(s_{*1} + 0, t) - v_{es}(s_{*1}, t) = 0, \quad v_s(s_{*2} - 0, t) - v_{es}(s_{*2}, t) = 0, \\ [v_s(s_{*1} - 0, t) - v_{es}(s_{*1}, t)]^2 = \gamma_{w1}^2(0, t), \quad [v_s(s_{*2} + 0, t) - v_{es}(s_{*2}, t)]^2 = \gamma_{w2}^2(0, t). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (20), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} [\varphi(s_{*1} - 0, t) - \varphi(s_{*1} + 0, t)] = -\frac{1}{2} \gamma_{w1}^2(0, t), \\ \frac{\delta}{\delta t} [\varphi(s_{*2} - 0, t) - \varphi(s_{*2} + 0, t)] = \frac{1}{2} \gamma_{w2}^2(0, t). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (19), (21) следует, что производные по времени от циркуляций скорости вокруг вихревых следов L_{w1} , L_{w2} действительно удовлетворяют соотношениям (18). Таким образом, при сходе с гладкого контура двух вихревых следов производные $d\Gamma_{w1}/dt$, $d\Gamma_{w2}/dt$ имеют разные знаки, и условие (17) может быть выполнено при произвольной зависимости от времени циркуляции скорости по контуру L . Сход вихревого следа L_{wk} возможен только при положительном значении скорости схода w_k . Из (11) следует, что для схода двух следов необходимо выполнение условий $\gamma_{w1}(0, t) < 0$, $\gamma_{w2}(0, t) > 0$.

Выясним теперь особенности модели отрывного течения со сходом с гладкого контура L одного вихревого следа. В общем случае движения контура циркуляция скорости не

может быть монотонной функцией времени. Поэтому модель отрывного обтекания гладкого контура со сходом с него одного вихревого следа должна предусматривать возможность замены вихревого следа L_{w1} на L_{w2} и обратно. Смена одного вихревого следа на другой происходит в моменты времени, при которых производная по времени от циркуляции скорости обращается в нуль ($d\Gamma(t)/dt = 0$). В интервале времени, в котором $d\Gamma(t)/dt > 0$, с контура L сходит вихревой след типа L_{w1} , а при $d\Gamma(t)/dt < 0$ реализуется вихревой след типа L_{w2} . Такая модель отрывного обтекания применена, в частности, в работе [11].

Следует отметить, что аналогичная ситуация возникает при нестационарном обтекании профиля с угловой задней кромкой. В этом случае сход вихревого следа с профиля происходит по касательной то к одной, то к другой грани угловой кромки в зависимости от знака производной $d\Gamma/dt$ [12].

В заключение отметим основные результаты, полученные в работе.

1. Сформулированы необходимые критерии отрыва нестационарного потока идеальной жидкости с замкнутого гладкого контура.
2. Получена простая и эффективная формула для расчета гидродинамического давления в точках подвижного контура.
3. Получено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для дуговой координаты точки отрыва потока, являющейся функцией времени и зависящей от поля скоростей вокруг контура и закона его движения.
4. Проведен анализ основных особенностей модели нестационарного отрывного обтекания гладкого контура с одним и двумя вихревыми следами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1978.
3. Гогиш Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. М.: ВИНТИ, 1975. С. 5–73. (Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика; Т. 8).
4. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир, 1972–1973.
5. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
6. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987.
7. Сычев В. В. Аналитическое решение задачи о течении в окрестности точки отрыва пограничного слоя на подвижной поверхности // Прикл. математика и механика. Т. 51, вып. 3. С. 519–521.
8. Sears W. R. Some recent developments in airfoil theory // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23, N 5. P. 490–499.
9. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания. М.: Наука, 1988.
10. Ильичев К. П., Постоловский С. Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 2. С. 72–82.
11. Зобнин А. И. Расчет гидродинамических реакций на телесном профиле, колеблющемся в неподвижной жидкости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 71–77.
12. Горелов Д. Н., Смолин Ю. С. Нестационарное обтекание профиля с угловой кромкой // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 3. С. 11–20.