

О ВОЗБУЖДЕНИИ И РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

В. Н. Жигулев

(Москва)

1. Постановка вопроса. Амплитудный метод определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный в случае достаточно малых амплитуд начальных возмущений сводится, как известно ([1, 2]), в первую очередь к исследованию вопроса о развитии возмущений в постановке линеаризованной теории гидродинамической устойчивости вплоть до области на поверхности летательного аппарата, где достигается пороговое значение для амплитуды возмущения $\epsilon^* = (\alpha \text{Re}_\delta)^{-2/3}$ (α — волновое число для возмущения в калибрах толщины пограничного слоя, Re_δ — число Рейнольдса, вычисленное по толщине и местным параметрам пограничного слоя).

В ряде случаев можно считать, что $\text{Re}^* = u_\infty L^*/\nu$ (L^* — координата по направлению набегающего потока, соответствующая тому месту, где амплитуда возмущения достигает величины ϵ^*) приблизительно равно соответствующему критическому числу Рейнольдса перехода к турбулентности. Таким образом, приближенный расчет критических чисел Рейнольдса сводится тогда к исследованию возбуждения и развития неустойчивости в линеаризованном случае.

Весьма существенным здесь становится вопрос о возбуждении неустойчивостей всегда имеющимся в потоке фоном возмущений (начальная турбулентность в набегающем потоке, шероховатость поверхности летательного аппарата, ее вибрации, различного рода ее химические неоднородности и т. п.). Проблема возбуждения неустойчивостей приковывает в последние годы, как известно, всеобщее внимание (см., например, [2—8]).

Определенные аспекты этого вопроса включены в данную работу.

Основным для дальнейшего рассмотрения будет предположение об узости слоя, в котором развиваются неустойчивости. Выберем криволинейную систему координат x, y, z (фиг. 1) так, что пограничный слой располагается около поверхности S , соответствующей $y = 0$. Если рассматривается задача обтекания, то поверхность S — это обтекаемая поверхность.

Обозначим порядок толщины пограничного слоя через δ , пусть характерные размеры вдоль осей x и z одинаковы и равны L . Предположение об узости слоя запишется в виде

$$\kappa = \delta/L \ll 1.$$

Определим вектор \mathbf{Q} как матрицу-столбец Q_j ($1 \leq j \leq k$), состоящую из величин проекций скорости на направления осей x, y, z температуры, давления, плотности, концентраций компонент среды, компонент электрического и магнитного полей и их первых производных по x, y, z .

Введем возмущение для величины \mathbf{Q} :

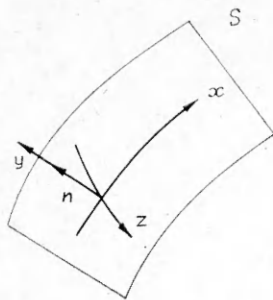
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \epsilon \mathbf{A}.$$

Величина \mathbf{Q}_0 описывает исходное стационарное поле обтекания средой в пограничном слое, примыкающем к поверхности S , и является точным решением исходных гидродинамических уравнений.

Величину ϵ будем предполагать настолько малой ($\epsilon \ll 1$), чтобы для определения величины \mathbf{A} можно было бы использовать линеаризованные уравнения движения среды.

Уравнения для возмущения \mathbf{A} могут быть представлены в операторном виде

$$(1.1) \quad \widehat{H}_t \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \widehat{H}_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \widehat{H}_z \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \widehat{H}'_0 \mathbf{A} + \widehat{H}'_1 \mathbf{A}.$$



Фиг. 1

Операторы \hat{H} представляют собой матрицы с элементами H_{nm} ($1 \leq m \leq m, n \leq k$), \hat{H}_t — постоянный оператор, состоящий в умножении либо на 0, либо на 1. Операторы \hat{H}_x, \hat{H}_z являются операторами умножения; они содержат характеристики исходного течения, за исключением составляющей скорости вдоль оси $y - V$. Оператор \hat{H}'_0 содержит характеристики исходного течения, за исключением V , их производные по y и операцию $\partial/\partial y$. Оператор умножения \hat{H}'_1 содержит производные по x, y, z от характеристик исходного течения, включая скорость V и ее производные.

Уравнения (1.1) представляют собой однородную систему k линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно k функций $A_j(t, x, y, z)$ с переменными коэффициентами, являющимися известными функциями x, y, z .

Остановимся на вопросе о граничных условиях, которые будем использовать при решении уравнений (1.1).

Будем рассматривать один из следующих трех типов граничных условий:

1) Определенная часть величин A_j обращается в нуль при $y = 0$, а также величины A_j стремятся к нулю при $y \rightarrow \infty$. Будем считать, что эта задача совпадает с чаще всего исследуемой задачей отыскания собственных функций и собственных значений системы (1.1).

2) Определенная часть из величин A_j обращается в нуль при $y = 0$, а также величины A_j остаются ограниченными при $y \rightarrow \infty$. Эти решения, помимо решений с условиями 1, содержат приходящие волны, связанные с существованием возмущений в набегающем потоке.

3) Величины A_j стремятся к нулю при $y \rightarrow \infty$, а также величины A_j остаются ограниченными при $y = 0$. Эта задача, помимо решений с условиями 1, содержит приходящие в пограничный слой волны, вызванные наличием шероховатости, отсоса, вибрациями или какими-либо другими возмущениями, идущими от обтекаемой поверхности.

2. Общий метод исследования (метод эйконала). Пусть искомым вектор A представим в виде интеграла Фурье

$$(2.1) \quad A = \int_{(\omega)} A_{\omega}(x, y, z, \omega) e^{i\omega t} dt.$$

Будем отыскивать решения для A_{ω} в виде

$$(2.2) \quad A_{\omega} = \Phi(x, y, z, \omega) e^{F(x, z)},$$

где эйконал $F(x, z)$ имеет вид

$$(2.3) \quad F(x, z) = -i \int_{\mathcal{L}} \alpha(x, z) dx + \gamma(x, z) dz.$$

Интегрирование в (2.3) проводится вдоль некоторой кривой \mathcal{L} в плоскости x, z , причем верхний предел интегрирования xz перемещается по этой кривой, так что эйконал F является функцией этого верхнего предела. Подынтегральное выражение в (2.3) в общем случае может и не являться полным дифференциалом*. Подставляя выражения (2.1), (2.2) в систему (1.1), получим систему уравнений для определения вектора Φ :

$$(2.4) \quad -i\hat{H}_x \alpha \Phi - i\hat{H}_z \gamma \Phi = \hat{H}_0 \Phi + \hat{H}_1 \Phi,$$

$$\text{где } \hat{H}_0 = \hat{H}'_0 - i\omega \hat{H}_t; \quad \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 - \hat{H}_x \frac{\partial}{\partial x} - \hat{H}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сделаем следующие предположения относительно порядков величин функций и их производных, входящих в (2.2), (2.3), соответствующие основному допущению об узости слоя. Характерные длины изменения

* Величина $\alpha dx + \gamma dz$ является полным дифференциалом, например, в случаях двумерного течения в пограничном слое (когда $\gamma = \text{const}$, а $\alpha = \alpha(x)$) или течения в пограничном слое скользящего крыла.

функций Φ пусть будут следующие: вдоль осей x и z — это L , вдоль оси y — δ , так что отношение производных

$$(2.5) \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} / \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \sim \kappa, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \sim \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}.$$

Пусть величины α и γ имеют порядок величины $1/L$, а их производные

$$(2.6) \quad \partial \alpha / \partial x \sim \partial \alpha / \partial z \sim \partial \gamma / \partial x \sim \partial \gamma / \partial z \sim 1/L\lambda,$$

λ — порядок длины волны рассматриваемого возмущения.

Допущения (2.5), (2.6) свидетельствуют о медленном характере изменения функций Φ_j , α , γ вдоль осей x и z и о быстром изменении функций Φ_j вдоль оси y .

Основным параметром малости в дальнейшем будет величина

$$h = \lambda/L \ll 1 \quad (\lambda = c_\lambda \delta)$$

(c_λ — величина порядка нескольких единиц, до десяти).

Если теперь привести систему уравнений (2.4) к безразмерному виду, то при части членов, относящихся к оператору \hat{H}_1 , появляется малый параметр h , т. е. уравнения в безразмерном виде примут вид

$$(2.7) \quad \hat{L}\Phi = h\hat{H}_1\Phi \quad (\hat{L} \equiv -i\hat{H}_x\alpha - i\hat{H}_z\gamma - \hat{H}_0).$$

Решение системы (2.7) представляем в виде ряда по малому параметру

$$(2.8) \quad \Phi = \Phi^{(0)} + h\Phi^{(1)} + h^2\Phi^{(2)} + \dots$$

Подставив ряды (2.8) в (2.7), получим после приравнивания членов одинакового порядка малости рекуррентную систему уравнений

$$(2.9) \quad \hat{L}\Phi^{(0)} = 0, \quad \hat{L}\Phi^{(1)} = \hat{H}_1\Phi^{(0)}, \dots$$

Система уравнений (2.9) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений по y первого порядка, аргументы x , z входят в нее как параметры.

Разложение (2.8) представляет собой внутреннее разложение для исследуемой задачи.

Задачу решения системы (2.9) для нулевого приближения с соответствующими граничными условиями будем называть локально-однородной задачей. Предположим, что локально-однородная задача решена. Это значит, что найдена система собственных векторов $\Phi(x, y, z)$, для которой комплексная величина $\alpha(x, z)$ составляет как непрерывный, так и дискретный спектр значений. Величина α классифицирует возможные типы возмущений. Пусть дисперсионное соотношение имеет вид

$$(2.10) \quad \alpha = \alpha(x, z, a_i, \omega, \gamma),$$

a_i — совокупность физических параметров задачи (числа Рейнольдса, Маха и т. п.). Величину γ подобно величине ω считаем заданной, поэтому уравнения для нулевого приближения целесообразно записать в виде

$$(2.11) \quad -i\hat{H}_x\alpha\Phi_\alpha = \hat{H}_{00}\Phi_\alpha \quad (\hat{H}_{00} = \hat{H}_0 + i\hat{H}_z\gamma).$$

Определим произведение двух векторов

$$(2.12) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty f(\varepsilon, y) \sum_{(n)} A_n B_n dy.$$

Функция $f(\varepsilon, y)$ выбирается для задачи 1 равной единице, для задачи 2 — это $e^{-\varepsilon y}$, для задачи 3 — это $e^{-\varepsilon/y}$.

Определим оператор \hat{H}^* как сопряженный оператору \hat{H} , если

$$(2.13) \quad (\hat{H}\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \hat{H}^*\mathbf{B}).$$

Определим систему векторов Ψ_β как решение сопряженной задачи, т. е. удовлетворяющей уравнениям

$$(2.14) \quad -i\hat{H}_x^* \Psi_\beta = \hat{H}_{00}^* \Psi_\beta$$

и соответствующим граничным условиям, получаемым стандартной процедурой одновременно с определением вида сопряженного оператора \hat{H}^* в соответствии с определением (2.13): выражение в левой части (2.13) интегрируют по частям, следя за тем, чтобы остались только члены с интегралами.

Умножив (2.11) на $\check{\Psi}_\beta$ и учитывая (2.14), имеем

$$(2.15) \quad (\alpha - \beta)(\hat{H}_x \Phi_\alpha, \Psi_\beta) = 0.$$

Из выражения (2.15) следует условие ортогональности векторов Φ_α и Ψ_β при $\alpha \neq \beta$:

$$(2.16) \quad (\hat{H}_x \Phi_\alpha, \check{\Psi}_\beta) = 0.$$

Будем считать, что вектор Φ_α нормирован, т. е.

$$(2.17) \quad (\hat{H}_x \Phi_\alpha, \Psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера) для дискретного спектра и

$$(2.18) \quad (\hat{H}_x \Phi_\alpha, \Psi_\beta) = \delta(\alpha - \beta)$$

($\delta(x)$ — δ -функция) для сплошного спектра.

Перейдем к построению внешнего разложения для исследуемой задачи. Будем представлять решение для A_ω в виде

$$(2.19) \quad A_\omega = \sum_{(n)} c_n(x, z) \Phi_n e^{F_n},$$

где величина n перенумеровывает все собственные векторы исследуемой задачи. Подставив (2.19) в (2.1), (1.1), получим выражение

$$(2.20) \quad \sum_{(n)} \frac{\partial c_n}{\partial x} \hat{H}_x \Phi_n e^{F_n} + \sum_{(n)} \frac{\partial c_n}{\partial z} \hat{H}_z \Phi_n e^{F_n} = \sum_{(n)} c_n (\hat{H}_1 \Phi_n) e^{F_n}.$$

Пусть теперь (для простоты) рассматриваемый спектр собственных векторов является дискретным. Умножив (2.20) на величину Ψ_m (один из собственных векторов сопряженной задачи) и учитывая условие ортогональности (2.17), получим следующую систему уравнений в частных производных для определения величин $c_n(x, z)$ в главном приближении:

$$(2.21) \quad \frac{\partial c_m}{\partial x} + \sum_{(n)} \frac{\partial c_n}{\partial z} V_{mn} e^{F_n - F_m} = \sum_{(n)} c_n W_{mn} e^{F_n - F_m},$$

где $V_{mn} = (\hat{H}_z \Phi_n, \Psi_m)$; $W_{mn} = (\hat{H}_1 \Phi_n, \Psi_m)$. Число уравнений в системе (2.21) совпадает с числом функций $c_n(x, z)$. Соотношения (2.21) можно трактовать как условия разрешимости системы (2.9) для следующего приближения, если решение отыскивается в виде (2.19). Матрицы V_{mn} и W_{mn} логично назвать матрицами переходов. Диагональные члены ($m = n$) матрицы W_{mn} описывают усиление возмущения в пограничном слое за счет его неоднородности по x и z . Недиагональные члены ($m \neq n$) описывают процесс возбуждения моды m модой n , т. е. являются источниками возникновения моды m . Существование ненулевой матрицы W_{mn} связано исключительно с неоднородностью исходного пограничного слоя вдоль осей x и z . Недиагональные члены матрицы V_{mn} описывают также процесс возникновения моды m за счет неоднородности по z моды n .

В случае, если существует одномодовый режим, когда $c_1 = c$, $c_2 = c_3 = \dots = 0$, система (2.21) превращается в одно уравнение в частных производных первого порядка:

$$(2.22) \quad \partial c / \partial x + V_{11} \partial c / \partial z = W_{11} c.$$

Уравнение (2.22) совпадает с уравнением, полученным в [9]. Следует от-

метить, что существование одномодового режима имеет место далеко не всегда и является, как правило, исключительным случаем. Аналогично определяются и следующие приближения по h для искомого решения.

Изложенный метод эйконала является типичным методом возмущения. С формальной стороны он похож на теорию квантовых переходов для возмущений, зависящих от времени (см., например, [10]). Существенная имеющаяся здесь разница состоит в том, что эйконал у нас имеет действительную часть и для задач развития неустойчивостей эйконал как аналитическая функция имеет, по крайней мере, одну седловую точку, что, как увидим ниже, определяет основной характер исследуемых решений.

Если имеется одновременно дискретный и сплошной спектры, то вместо (2.19) следует записать

$$(2.23) \quad \mathbf{A}_\omega = \sum_{(n)} c_n(x, z) \Phi_n e^{F_n} + \int_{(\alpha)} c_\alpha(x, z) \Phi_\alpha e^{F_\alpha} d\alpha.$$

Обобщение уравнений (2.21) на случай (2.23) может быть получено без труда.

3. Исследование плоского случая. Рассмотрим прежде всего случай, когда основное течение в пограничном слое двумерно и не зависит от координаты z . Система уравнений (2.21) переписывается в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial c_m}{\partial x} = \sum_{(n)} c_n W_{mn} e^{F_n - F_m} \left(F_k = -i \int_{x_1}^x \alpha_k(x) dx \right).$$

В одномодовом случае $c_1 = c$, $c_2 = c_3 = \dots = 0$ имеем уравнения для изменения амплитуды волны

$$dc/dx = cW(x),$$

откуда

$$\mathbf{A}_\omega = c_0 e^{x_0} \int_{x_0}^x W(x) dx \Phi(x, y) e^{F(x)}.$$

Получили хорошо известное решение (см., например, [11]) для распространения волны, в частности волны Толлмина — Шлихтинга, с учетом непараллельности основного течения, когда амплитуда волны в точке $x = x_0$ известна.

Рассмотрим теперь двухмодовый режим: для двух фиксированных m и n $c_n \neq 0$, $c_m \neq 0$, остальные моды отсутствуют. Система (3.1) превращается в систему двух уравнений:

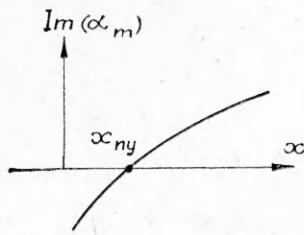
$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial c_m / \partial x &= c_m W_{mm} + c_n W_{mn} e^\Delta, \\ \partial c_n / \partial x &= c_n W_{nn} + c_m V_{nm} e^{-\Delta} \quad (\Delta = F_n - F_m). \end{aligned}$$

Пусть в точке $x = x_0$

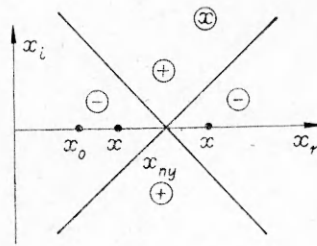
$$(3.3) \quad c_m = 0, \quad c_n = c_{n_0}.$$

Можно получить следующее формальное решение этой системы при условиях (3.3):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} c_m &= e^{\int_{x_0}^x W_{mm} dx} \int_{x_0}^x c_n W_{mn} e^{-\int_{x_0}^x W_{mm} dx} e^\Delta dx, \\ c_n &= c_{n_0} e^{-\int_{x_0}^x W_{nn} dx} + e^{\int_{x_0}^x W_{nn} dx} \int_{x_0}^x c_m W_{nm} e^{-\int_{x_0}^x W_{nn} dx} e^{-\Delta} dx. \end{aligned}$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Система (3.4) является системой интегральных уравнений для определения $c_m(x)$ и $c_n(x)$, заменяющая собой систему уравнений (3.2). Ясно, что указанная задача является простейшей задачей о возбуждении моды m модой n . Наиболее интересна здесь задача о возбуждении волны Толмина — Шлихтинга.

Переход к системе интегральных уравнений (3.4) весьма удобен, ибо эйконал является большой величиной порядка $1/\hbar$ и в этом случае для вычисления интегралов в правых частях (3.4) можно с успехом применить идеологию метода скорейшего спуска (см., например, [12]), если предположить, что все входящие функции являются аналитическими функциями переменной x .

Существенный интерес для дальнейшего представляет случай, который мы назовем резонансным возбуждением. Пусть мнимая часть величины α_m имеет вид, как на фиг. 2, т. е. в точках $x > x_{ny}$ мода m становится неустойчивой:

$$(3.5) \quad \text{Im}(\alpha_m) = \frac{a}{\hbar}(x - x_{ny}) + O|x - x_{ny}|^2,$$

и пусть действительные части величин α_m и α_n постоянны и равны между собой. Тогда главный член разложения эйконала Δ в ряд по комплексной величине $(x - x_{ny})$ имеет вид

$$\Delta = -(a/\hbar)(x - x_{ny})^2 + O|x - x_{ny}|^3$$

(a — действительное положительное число). Эйконалы F_m и F_n определяются здесь и в дальнейшем равенствами

$$F_m = -i \int_{x_{ny}}^x \alpha_m dx, \quad F_n = -i \int_{x_{ny}}^x \alpha_n dx.$$

На основании (3.5) видно, что точка $x = x_{ny}$ является седловой точкой эйконала $\Delta = u + iv$, рассматриваемого в плоскости комплексного переменного $x = x_r + ix_i$ (фиг. 3): линии $u = \text{const}$ выходят из точки x_{ny} под углом $+\pi/4$; секторы, через которые проходит действительная ось, являются отрицательными секторами. Эта ситуация остается, очевидно, и в том случае, когда действительные части величин α_m и α_n таковы, что

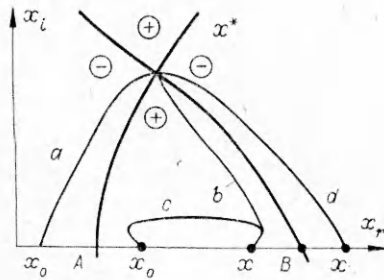
$$\text{Re}(\alpha_m - \alpha_n) = \frac{b}{\hbar}(x - x_{ny}) + O|x - x_{ny}|^2$$

(b — действительная величина), если только $|b| < a$.

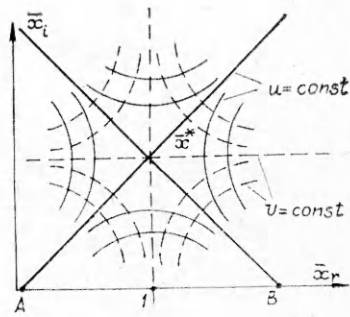
Главный член по \hbar величины интеграла для c_m , если $x_0 < x_{ny}$ и $x > x_{ny}$, имеет вид [12]

$$(3.6) \quad c_m = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{a}} c_n(x_{ny}) W_{mn}(x_{ny}) e^{\int_{x_0}^{x_{ny}} W_{nm} dx}.$$

Ясно, что, если $x < x_{ny}$, величина c_m в рассматриваемом порядке ($\sqrt{\hbar}$) равна нулю.



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Таким образом, в рассматриваемом резонансном случае волна n возбуждает волну m с амплитудой (3.6) непосредственно в точке потери устойчивости волны m .

Это рассмотрение относится и к волне Толлмина — Шлихтинга, если волна n имеет фазовую скорость в направлении оси x ту же, что и фазовая скорость волны Толлмина — Шлихтинга.

4. О механизме возбуждения волны Толлмина — Шлихтинга. Выше рассмотрено резонансное возбуждение неустойчивости. А как быть в том случае, когда фазовые скорости волн m и n не совпадают? В какой мере будут возбуждаться при этом неустойчивости?

Пусть эйконал имеет структуру, как на фиг. 4. В точке x^* расположена седловая точка эйконала $\Delta = u + iv$. Точки A и B — это точки пересечения линий $u = \text{const}$, исходящих из седловой точки, с действительной осью; расположения отрицательных и положительных секторов показано соответствующими знаками.

Легко убедиться, что подобным эйконалом обладает, например, случай:

$$\alpha_m = \alpha_{mi}/h + (ia/h)(x - x_{ny}), \quad \alpha_n = \alpha_{ni}/h.$$

Величины α_{mi} , α_{ni} , a — положительные постоянные. Тогда

$$\Delta = -\frac{a}{2h}(x - x_{ny})^2 + i\frac{\alpha_{mi} - \alpha_{ni}}{h}(x - x_{ny}).$$

Введем обозначения

$$\bar{x} = x/x_{ny}, \quad \bar{a} = ax_{ny}^2, \quad \bar{\alpha}_{mi} = \alpha_{mi}x_{ny}, \\ \bar{\alpha}_{ni} = \alpha_{ni}x_{ny}, \quad \Delta\alpha = \bar{\alpha}_{mi} - \bar{\alpha}_{ni}.$$

Выражение для Δ принимает вид

$$\Delta = -(\bar{a}/2h)(\bar{x} - 1)^2 + (i\Delta\alpha/h)(\bar{x} - 1).$$

Седловая точка, соответствующая $d\Delta/dx^* = 0$, $\bar{x}^* = 1 + i\Delta\alpha/\bar{a}$. Значение эйконала Δ в седловой точке $\Delta^* = \Delta(\bar{x}^*) = -(\Delta\alpha)^2/2h\bar{a}$. Разложение эйконала Δ по степеням $(x - x^*)$ принимает вид

$$\Delta = \Delta^* - (\bar{a}/2h)(x - x^*)^2.$$

Графическое представление этого примера эйконала — портрет эйконала — приведено на фиг. 5. Линии $u = \text{const}$, проходящие через седловую точку, являющиеся прямыми, пересекают действительную ось в точках A и B . Проведены гиперболы, соответствующие другим линиям $u = \text{const}$. Семейство линий $v = \text{const}$ ортогонально семейству $u = \text{const}$ и является также гиперболами, изображенными штриховыми линиями.

Предположим, что все входящие в выражения (3.4) для c_m и c_n функции аналитичны и однозначны в области между действительной осью и седловой точкой, так что контур интегрирования, начало и конец которого находятся на действительной оси, можно деформировать, захватывая сед-

ловую точку. Могут представиться следующие три существенно различных случая расположения точек x_0 и x .

1. Точки x_0 и x находятся внутри отрезка AB фиг. 4. В этом случае контур интегрирования можно деформировать в контур c , выходящий из точки x_0 и входящий в точку x по соответствующим линиям $v = \text{const}$, и тогда значение искомого интеграла будет суммой интегралов по малым окрестностям точек x_0 и x . Члены этой суммы будут иметь порядок малости h .

Асимптотическое представление для интеграла в этом случае может быть получено путем последовательной интеграции по частям. Действительно,

$$c_m = e^{x_0} \int_{x_0}^x W_{mm} dx, \quad I,$$

$$I = \int_{x_0}^x c_n W_{mn} e^{-\int_{x_0}^x W_{mm} dx} e^{\Delta} dx = h \int_{A_1}^{B_1} \chi(h\Delta) e^{\Delta} d\Delta,$$

$$\text{где } \chi(h\Delta) = \frac{c_n W_{mn}}{\frac{d(h\Delta)}{dx}} e^{-\int_{x_0}^x W_{mm} dx}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^{B_1} \chi(h\Delta) e^{\Delta} d\Delta &= e^{\Delta} \{ \chi(h\Delta) - h\chi'(h\Delta) + h^2\chi'' - h^3\chi''' \} \Big|_{A_1}^{B_1} + \\ &+ h^4 \int_{A_1}^{B_1} \chi^{IV} e^{\Delta} d\Delta = \dots = e^{\Delta} T(x) \Big|_{x_0}^x, \end{aligned}$$

где $T(x)$ — ряд по малому параметру h , начинающийся с члена порядка единицы. Окончательно для c_m получим

$$c_m = h e^{x_0} \int_{x_0}^x W_{mm} dx \{ T(x) e^{\Delta(x)} - T(x_0) e^{\Delta(x_0)} \}.$$

Полное выражение для m -волны будет

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_\omega^{(m)} &= -h \Phi_m(x, y) T(x_0) e^{\Delta(x_0)} e^{x_0} \int_{x_0}^x W_{mm} dx e^{F_m(x)} + \\ &+ h \Phi_m(x, y) T(x) e^{x_0} \int_{x_0}^x W_{mm} dx e^{F_n(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, возбужденная m -волна состоит из чистой m -волны (первый член в (4.1)) и волны (второй член), имеющей распределение амплитуд по y как у m -волны, но с эйконалом волны n (промежуточная волна).

Система уравнений (3.4) для рассматриваемого двухмодового случая фактически расщепляется, так как добавка к величине c_n за счет взаимодействия волн будет иметь относительный порядок малости h^2 , ибо выражение для интеграла во втором уравнении (3.4) можно получить процедурой, аналогично описанной выше при получении выражения (4.1), с той лишь разницей, что эйконал заменяется теперь на $-\Delta$ и положительный сектор фиг. 4 заменяется отрицательным, и наоборот. Контур интегрирования $x_0 - x$ и здесь не пересечет границу секторов.

Поэтому под величиной c_n в функции $T(x)$ выражения (4.1) нужно понимать в главном члене величину c_{n_0} .

2. Перейдем к рассмотрению случая, когда точка x_0 находится левее точки A , а точка x — внутри отрезка AB , т. е. когда контур интегрирования пересекает границу секторов.

Контур интегрирования может быть деформирован в сумму $a + b$ фиг. 4. Контур a входит в седловую точку по линии $v = \text{const}$ со стороны отрицательного сектора. Контур b выходит из седловой точки в положительном секторе и входит в точку x на действительной оси в направлении $v = \text{const}$.

Тогда интеграл I по контуру a определяется небольшой окрестностью ($\sim \sqrt{\hbar}$) седловой точки, а интеграл по контуру b определяется небольшой окрестностью ($\sim \hbar$) точки x

$$I = I_a + I_b.$$

Главные члены величин I_a и I_b имеют вид

$$I_a = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \hbar r_0^{-1/2}} e^{i \frac{\pi - \beta_0}{2}} c_n(x^*) W_{mn}(x^*) e^{x^* \int W_{mm} dx} e^{\Delta^*}$$

$$\left(\Delta^* = \Delta(x^*), \frac{1}{2} \Delta' \Big|_{x=x^*} = \frac{r_0 e^{i\beta_0}}{\hbar} \right),$$

$$I_b = \hbar \frac{c_n(x) W_{mn}(x)}{d(h\Delta)/dx} e^{-\int_{x_0}^x W_{mm} dx} e^{\Delta}.$$

Выражение для возбужденной волны будет

$$A_{\omega}^{(m)} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \hbar} \Phi_m(x, y) r_0^{-1/2} e^{i \frac{\pi - \beta_0}{2}} c_n(x^*) W_{mn}(x^*) e^{\Delta^*} e^{x_0 \int W_{mm} dx} e^{F_m(x)} +$$

$$+ \hbar \Phi_m(x, y) \frac{c_n(x) W_{mn}(x)}{d(h\Delta)/dx} e^{F_n(x)}.$$

Итак, в случае 2 возбужденная волна состоит из чистой m -волны с амплитудой, не зависящей от точки x_0 и той же промежуточной волны, что и в случае 1.

3. Пусть теперь точка x_0 лежит левее точки A , а точка x — правее точки B . Тогда контур интегрирования может быть деформирован в $a + d$, и, таким образом, величина интеграла будет определяться только малой ($\sim \sqrt{\hbar}$) окрестностью седловой точки

$$I = \sqrt{\pi \hbar r_0^{-1/2}} e^{i \frac{\pi - \beta_0}{2}} c_n(x^*) W_{mn}(x^*) e^{x_0 \int W_{mm} dx} e^{\Delta^*}.$$

Выражение для возбужденной волны принимает следующий вид чистой m -волны:

$$A_{\omega}^{(m)} = \sqrt{\pi \hbar} \Phi_m(x, y) r_0^{-1/2} e^{i \frac{\pi - \beta_0}{2}} c_n(x^*) W_{mn}(x^*) e^{\Delta^*} e^{x_0 \int W_{mm} dx} e^{F_m(x)}.$$

Таким образом, при переходе точки x через границу секторов B появляется еще одна чистая m -волна с той же амплитудой, как и у m -волны в случае 2. При дальнейшем перемещении точек x_0 и x внутри отрицательных секторов амплитуда возмущенной волны не будет изменяться. Поэтому можно утверждать, что зоной возбуждения m -волны волной n является отрезок AB действительной оси, попадающий в положительный сектор эйконала $\Delta(x)$.

Добавка к величине c_{n_0} в выражении для c_n за счет взаимодействия с m -волной будет в случае 3 иметь порядок $\hbar^{3/2}$, а в случае 2 — порядок \hbar , т. е. и здесь уравнения для c_m и c_n в главном порядке расщепляются и в выражении для c_m можно полагать c_{n_0} вместо c_n .

Исследованный механизм является механизмом взаимодействия волн, имеющих различные фазовые скорости и одинаковые частоты.

Замечательно, что главный порядок ($\sim \sqrt{h}$) возбужденной неустойчивости (m -волны) приобретает при пересечении точек интегрирования окрестностей точек A и B — точек пересечения линий $u = \text{const}$, исходящих из седловой точки, с действительной осью. Причем возбуждение в главном порядке носит характер резонансов, аналогично тому, как это наблюдалось в п. 3: m -волна половинной амплитуды возбуждается при переходе через точку A и вторая половина — при переходе через точку B .

Отмеченное явление можно назвать квазирезонансом, учитывая, что амплитуда волны в этом случае в отличие от истинного резонанса п. 3 получает множитель e^{Δ^*} , где $\text{Re} \Delta^* < 0$.

Существенно, что обнаруженный механизм возбуждения неустойчивостей проявляется на конечном отрезке AB изменения переменной x , расположенном в окрестности точки потери устойчивости m -волны.

5. О распространении пространственного волнового пакета. Рассмотрим одномодовый режим распространения волн в трехмерном пограничном слое $c_1 = c \neq 0$, $c_2 = c_3 = \dots = 0$. Будем исследовать развитие пакета волн:

$$(5.1) \quad \Sigma A_\omega = \int_{\mathcal{L}} c(x, z, \gamma) \Phi(x, y, z, \gamma) e^F d\gamma.$$

Эйконал F является большой величиной порядка $1/h$ и имеет вид

$$(5.2) \quad F(x, z) = -i \int_{\mathcal{L}} \alpha(x, z, \gamma) dx + \gamma dz.$$

Поскольку F является большой величиной ($\sim 1/h$), поведение рассматриваемой группы волн целиком определяется видом эйконала $F = F_r + iF_i$. Предположим, что все входящие в (5.1) функции являются аналитическими функциями параметра γ . Предполагая, что контур интегрирования по γ можно деформировать так, чтобы он проходил через седловую точку γ^* эйконала по отрицательным секторам, получим, что значение интеграла (5.1) определяется в главном порядке выражением [12]

$$(5.3)^* \quad \Sigma A_\omega = \sqrt{\pi h} e^{F(\gamma^*)} c(x, z, \gamma^*) \Phi(x, y, z, \gamma^*) b_0^{1/2} e^{i \frac{\pi - \beta_0}{2}} \left(\frac{1}{2} F''(\gamma^*) = \frac{b_0 e^{i\beta_0}}{h} \right).$$

Седловая точка определяется соотношением

$$(5.4) \quad \partial F / \partial \gamma = 0.$$

В силу фиксированности контура \mathcal{L} условие (5.4) принимает вид

$$(5.5) \quad \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} dx + dz = 0.$$

Однако на основании того, что точка x, z перемещается вдоль кривой \mathcal{L} , делаем вывод, что

$$(5.6) \quad \partial \alpha / \partial \gamma = -dz/dx.$$

Выражение (5.6) можно получить из (5.5) на основании стандартного рассуждения от противного, предполагая, что подынтегральное выражение в (5.5) отлично от нуля и т. д.

Согласно работе [9], выражение (5.6) определяет также характеристику уравнения для $c(x, z)$. Отметим, что с нашей точки зрения условие [9] о действительности $\partial \alpha / \partial \gamma$ не является обязательным. Более того, факт

* Если $|b_0| = 0$, то главный член выражения (5.3) будет иметь (см. [12]) порядок $h^{1/4}$.

о наличии мнимой части у величины $\partial\alpha/\partial y$ свидетельствует о том, что обычно решаемая в одномодовом случае задача Коши перестает иметь физическое значение и необходимо ставить и решать краевую задачу для коэффициента $c(x, z)$.

Поступила 6 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений. — В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980.
2. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
3. Артамонов К. И. Проблема устойчивости в физической механике. М.: изд. МФТИ, 1977.
4. Mack L. M. Transition prediction and linear stability theory laminar-turbulent transition. AGARD-CP-224, 1977.
5. Решотко Э. Устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход в турбулентный. — Сб. пер. Механика. М.: Мир, 1979, № 21.
6. Жигулев В. Н., Сидоренко И. В., Тумин А. М. О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью. — ПМТФ, 1980, № 6.
7. Довгаль А. В., Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П. Возникновение возмущений в пограничных слоях. — В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
8. Айзин Л. Б., Поляков Н. Ф. Генерация волны Толлмина — Шлихтинга звуком на отдельной неровности поверхности, обтекаемой потоком. Препринт ИТПМ № 17, Новосибирск, 1979.
9. Nayfeh A. N. Stability of three-dimensional boundary layers. — AIAA J., 1980, vol. 18, N 4.
10. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
11. Тумин А. М., Шепелев В. Е. Численный анализ развития возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине. — Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 3.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. М.: ГИТТЛ, 1949.

УДК 532.526.013

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

А. М. Тумин, А. В. Федоров

(Москва)

В настоящее время в связи с решением проблемы предсказания точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный широко обсуждается задача о возбуждении волн неустойчивости (волн Толлмина — Шлихтинга) при наличии во внешнем течении того или иного типа возмущений из непрерывного спектра (акустические, вихревые и т. д.) [1]. В результате теоретических и экспериментальных исследований установлено, что возбуждение волн неустойчивости происходит на пространственных неоднородностях течения в пограничном слое [2]. Для аналитического решения задачи о генерации волн Толлмина — Шлихтинга широко используются методы теории возмущений, заключающиеся в разложении решений линеаризованных уравнений Навье — Стокса по собственным функциям локально-однородной задачи [3]. При этом анализируются возмущения, характеризующиеся фиксированной частотой и пространственным развитием. В связи с этим возникает необходимость анализа в рамках локально-однородного приближения полноты системы собственных функций линеаризованных уравнений Навье — Стокса для возмущений, развивающихся в пространстве. В [4] с помощью преобразования Лапласа по времени решена задача о развитии начального возмущения в несжимаемом пограничном слое. На основе результатов [4] в [5] доказана полнота системы собственных функций линеаризованных уравнений Навье — Стокса, описывающих развитие во времени возмущений несжимаемого пограничного слоя. Для пространственно-растущих возмущений эти вопросы остались открытыми. В данной работе проведен их анализ на примере пограничного слоя в сжимаемом газе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное течение типа пограничного слоя. Выберем в качестве координат: ось Ox , направленную вниз по потоку, ось Oy , перпендикулярную к обтекаемой поверхности.