

Это уравнение дает связь параметров p , q_0 , m для медленных трещин при значениях $p/q_0 \geq A$. Решение $p/q_0 = A$ соответствует предельному равновесию трещины для статической задачи.

Для выяснения влияния динамики концевой области на скорость движения трещины сравним зависимость (8) с уравнением

$$\frac{p}{q_0} = \frac{2 \sqrt{(1-\alpha)m}}{\pi F(m, \nu)} \quad (10)$$

которое получено в предположении квазистационарного характера поля напряжений, обусловленного действием сил сцепления вблизи конца трещины аналогично [2]. На фиг. 2 уравнению (10) соответствуют кривые 1, 2, 3 при α соответственно 0.5, 0.8, 0.99.

Из сравнения кривых 1 и 1, II и 2, полученных при одинаковых значениях параметра α , видно, что со стремлением α к единице разница между динамическими и квазистационарными решениями уменьшается, что можно объяснить уменьшением скорости роста концевой области. В работе [2] получено, что для данного материала существует некоторая минимальная скорость равномерного распространения трещины. Последнее вызвано предположением, что концевая область d расширяется со скоростью v , не зависящей от скорости распространения самой трещины

$$d = vt \quad (11)$$

Зависимость, соответствующая (11) и квазистационарности поля напряжений, от сил сцепления

$$\frac{p}{q_0} = \frac{2 \sqrt{v/c_2}}{\pi F(m, \nu)}$$

изображена пунктирной линией на фиг. 2 при $v/c_2 = 10^{-2}$. В данной работе предполагалось $d = (1-\alpha)Vt$. Тогда скорость распространения трещины может быть произвольной, ограниченной сверху c_2 при $\alpha \rightarrow 1$. В предположении (11), отвечающем $\alpha = 1 - v/V$, найденное решение также приводит к существованию минимальной скорости распространения трещины для данного материала.

Поступила 28 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv fys., 1960, vol. 18, No. 2.
2. Б а р е н б л а т т Г. И., С а л г а н и к Р. Л., Ч е р е п а н о в Г. П. О неустановившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. 26, № 2.
3. Б е л я к о в В. М., К р а в ц о в а Р. И., Р а п п о р т М. Г. Таблицы эллиптических интегралов. М., Изд-во АН СССР, 1963, т. 2.
4. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

ОБОБЩЕНИЕ БАЛОЧНОГО ПОДХОДА К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

А. М. Михайлов

(Новосибирск)

Эта заметка дополняет работу [1], в которой рассматривалась задача о движении трещины вдоль стержня, причем считалось, что поведение стержня достаточно хорошо описывается балочной теорией Бернулли — Эйлера. Приведенная там формулировка задачи обобщается ниже (п. 1) на двумерный случай, т. е. на случай распространения трещины по средней плоскости тонкой пластинки. Такого рода задача может реализовываться на опыте при разрушении слоистых материалов или при раздирании двух склеенных листов. В п. 2 балочная постановка задачи о движении трещины обобщается в другом направлении: при описании поведения стержня учитывается влияние перерезывающей силы на прогиб, а также инерция вращения поперечных сечений стержня. Учет этих факторов обеспечивает существование предельной скорости распространения трещины. Приводимые уравнения получены вариационным путем из принципа наименьшего действия, причем выкладки ввиду их аналогичности [1], громоздкости и достаточной элементарности опущены.

1. Рассмотрим движение трещины вдоль средней плоскости тонкой пластинки толщиной $2H$, материал которой обладает плотностью ρ , упругими постоянными E (модуль Юнга) и ν (коэффициент Пуассона), а сопротивление распространению трещины характеризуется плотностью поверхностной энергии T . Пусть трещина лежит в плоскости xy и занимает в момент времени t область $D(t)$, ограниченную кусочно-гладким замкнутым контуром $C(t)$. Нормальное смещение нейтральной плоскости одной из половин пластинки обозначим через $u(x, t)$; считаем, что пластинка нагружена внешней силой с кусочно-непрерывной в $D + C$ плотностью $p(x, y, t)$. На контуре $C(t)$ предполагается жесткое защемление (n — нормаль к контуру)

$$u(C) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(C) = 0 \quad (1.1)$$

Выражение для кинетической и потенциальной энергии имеет вид

$$K = \iint_D \frac{\rho H}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

$$\Pi = \iint_D \frac{EH^3}{24(1-\nu^2)} \left\{ \Delta^2 u + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy +$$

$$+ \iint_D T dx dy - \iint_D p u dx dy$$

Δ — двумерный оператор Лапласа.

Первый интеграл в Π равен энергии изгиба пластинки [2], второй — работе, затраченной на создание новой поверхности, третий представляет собой потенциал внешних сил. Из условия стационарности интеграла действия при условиях (1.1) на подвижной границе $C(t)$ трехмерной области $t \in [t_1, t_2]$, $(x, y) \in D(t)$ получим следующую задачу: требуется найти функцию, непрерывную с частными производными до второго порядка по t и до четвертого порядка по x, y , и контур $C(t)$ такие, что с

$$\Delta^2 u + \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{EH^3} p, \quad a_1^2 = \frac{EH^3}{12\rho(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(C) = A_1, \quad A_1 = \left(\frac{24(1-\nu^2)T}{EH^3} \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

условия (1.1), и при $t = 0$ выполняются некоторые начальные данные, совместимые с (1.1), (1.3). Если допустить нагружение сосредоточенными силами и моментами, то достаточно требовать лишь непрерывности смещения с первыми частными производными. Условия (1.1), (1.3) обеспечивают гладкость контура $C(t)$: из выражения для плотности перерезывающей силы на заданном контуре (формула (12.9) из [2])

$$F = - \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} + k \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

следует, что в угловых точках имелась бы вследствие (1.3) сосредоточенная реакция: это невозможно для защемленной слабо изогнутой пластинки.

В качестве примера рассмотрим случай расширения круговой трещины, поверхность которой везде, кроме центра, свободна от нагрузки, а в центре расстояние $2h$ между противоположными берегами растет с постоянной скоростью $2U$. Сделав в (1.1) — (1.3) подстановку

$$u(x, y, t) = U t f(\xi), \quad \xi = \frac{r^2}{a_1 t}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

и решив получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение, найдем формулы, определяющие радиус трещины R и смещение u

$$R^2 = \lambda \left(\frac{U}{a_1 A_1} \right) a_1 t, \quad \frac{U}{a_1 A_1} = \frac{\lambda}{4} \frac{\text{si } \lambda/4 + \pi/2}{\sin \lambda/4}$$

$$f(\xi) = - \left(\text{si } \frac{\lambda}{4} + \frac{\pi}{2} \right)^{-1} \left(\text{si } \frac{\xi}{4} - \frac{\xi}{4} \text{ci } \frac{\xi}{4} + \sin \frac{\xi}{4} + \frac{\xi \lambda}{4} \text{ci } \frac{\lambda}{4} - \xi \sin \frac{\lambda}{4} - \text{si } \frac{\lambda}{4} \right)$$

В этих формулах si , ci означают интегральный синус и косинус.

Для случая бесконечно медленного движения путем предельного перехода при $\lambda \rightarrow 0$ получается радиус равновесной трещины

$$R^2 = 2h / A_1$$

2. Сформулируем задачу о развитии трещины вдоль стержня, используя для описания движения стержня балочное приближение С. П. Тимошенко [3], т. е. учитывая потенциальную энергию сдвига и кинетическую энергию вращательного движения поперечных сечений стержня. Пусть ось абсцисс направлена вдоль стержня, b, H — поперечные размеры одной из половин стержня, $I = bH^3 / 12$ — статический момент инерции поперечного сечения этой половины. Трещина расположена на отрезке $0 \leq x \leq l(t)$. При $x = 0$ зададим перерезывающую силу $F(t)$ и изгибающий момент $M(t)$ как функции времени, при $x = l(t)$ балка жестко закреплена. Представим наклон нейтральной оси $\partial u / \partial x$ как сумму вращения ω и сдвига γ и выпишем кинетическую и потенциальную энергию]

$$K = \int_0^l \left[\frac{\rho b H}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{I \rho}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{E I}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \frac{G b \bar{H}}{2} \gamma^2 \right] dx + T b l(t) - F(t) u(0, t) - M(t) \omega(0, t) \quad (2.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Уравнения движения и необходимые граничные условия найдем из условия стационарности интеграла действия при условиях жесткой заделки в кончике трещины

$$u(l) = 0, \omega(l) = 0 \quad (2.1)$$

Приводим результат (2.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{c_2^2}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \omega \right) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{c_0^2 H^2}{12}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$G b H \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \omega \right) = F(t), \quad E I \frac{\partial \omega}{\partial x} = M(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{c_2^2}{a^2} \left[1 - \frac{1}{c_2^2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 \right] = \frac{2 T b}{E I} = A^2 \quad \text{при } x = l(t) \quad (2.4)$$

Уравнения (2.2) совпадают с уравнениями [L], [m] из [3]. Первое из них выражает второй закон Ньютона для поступательного, а второе — для вращательного движени- ний элемента стержня. Посредством дифференцирований можно исключить ω из (2.2) и получить уравнение четвертого порядка для $u(x, t)$, однако в граничных условиях такое исключение не удастся. Так как при движении трещины происходит одновремен- ное движение двух балок, то для того, чтобы исключить возможность налегания бере- гов трещины друг на друга нужно потребовать, чтобы смещение при $0 \leq x \leq l$ не меня- ло знак. Из (2.4) следует невозможность движения трещины со скоростью, превышаю- щей скорость продольных волн. При использовании приближения Бернулли — Эйлера скорость трещины может быть как угодно велика [1].

Рассмотрим стационарное расклинивание клином толщины $2h$, движущимся со скоростью V . В этом случае

$$u(x, t) = u(x - Vt),$$

$$\omega(x, t) = \omega(x - Vt), \quad dl/dt = V \quad \text{при } x = Vt$$

$$u = h, \quad \partial \omega / \partial x = 0, \quad \text{при } x = Vt + l$$

выполняются условия (2.1), (2.4). После подстановки $\chi = x - Vt$ можно легко найти $u(\chi), \omega(\chi)$;

$$u(\chi) = \frac{C \sin \alpha \chi}{\alpha^2 (1 - \beta_2^2)} + \frac{C \chi}{\alpha} \cos \alpha l + h, \quad \omega(\chi) = \frac{C}{\alpha} (\cos \alpha l - \cos \alpha \chi)$$

$$C = \frac{h \alpha^2 (1 - \beta_2^2)}{\sin \alpha l - (1 - \beta_2^2) \alpha l \cos \alpha l}, \quad \alpha = \frac{V}{a} (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$$

$$\beta_2 = V / c_2, \quad \beta_0 = V / c_0$$

Используя (2.4), получим соотношение между скоростью расклинивания и длиной трещины перед клином

$$\frac{[\sin \alpha l - (1 - \beta_2^2) \alpha l \cos \alpha l] (1 - \beta_0^2)^{1/2}}{[1 - (1 - \beta_2^2) \cos^2 \alpha l]^{1/2}} = \frac{h c_2^2 \beta_2^2}{a^2 A} \quad (2.5)$$

Если жесткость на сдвиг бесконечна ($\beta_2 = 0$) и скорость движения невелика ($\beta_0 \ll 1$), так что инерция вращения не играет существенной роли, то $\alpha \approx V/a$ и (2.5) дает решение задачи о расклинивании в приближении Бернулли — Эйлера

$$1 - \frac{Vl_*}{a} \frac{l}{l_*} \operatorname{ctg} \left(\frac{Vl_*}{a} \frac{l}{l_*} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{Vl_*}{a} \right)^2, \quad l_*^2 = \frac{3h}{A} \quad (2.6)$$

где l_* — равновесная длина трещины в приближении Бернулли — Эйлера (см. [1], формула (2.5)).

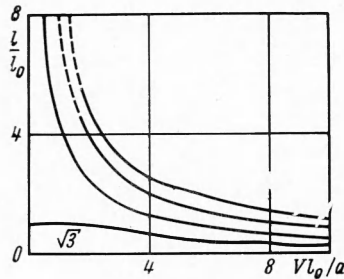
В этом случае l/l_* определяется лишь одним безразмерным параметром Vl_*/a . Зависимость (2.6) изображена на фиг. 1. Пунктиром отмечены те решения, для которых хоть в одной точке χ , лежащей между 0 и l , $u(\chi) < 0$ и которые, следовательно, неприменимы для описания движения трещины. К сожалению, в [1] при анализе упущена многозначность длины при стационарном расклинивании и приведен лишь график, проходящий через $l/l_* = 1$.

Теперь рассмотрим медленные движения, считая, что стержень обладает конечной сдвиговой жесткостью. По-прежнему полагаем $\alpha \approx V/a$, однако $\beta_2 \neq 0$. Заменяя в (2.5) тригонометрические функции отрезками ряда Тейлора и пренебрегая бесконечно-малыми высших порядков при $V \rightarrow 0$, получим уравнение, определяющее длину трещины l_0 перед неподвижным клином

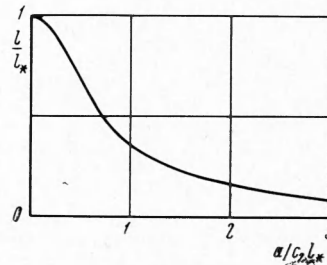
$$l_0^6 + 6 \frac{a^2}{c_2^2} l_0^4 + 9 \left(\frac{a^4}{c_2^4} - \frac{h^2}{A^2} \right) l_0^2 = \frac{9h^2 a^2}{A^2 c_2^2} \quad (2.7)$$

Разделив (2.7) на l_0^6 , получим зависимость между величинами l_0/l_* и $a/c_2 l_*$. Эта зависимость, позволяющая судить о том, когда можно не учитывать потенциальную энергию сдвига, изображена на фиг. 2. При $a/c_2 l_* \rightarrow \infty$ длина трещины стремится к нулю.

Переходя к большим скоростям расклинивания, обнаруживаем, что движения со скоростями $V > c_2$ невозможны, так как левая часть (2.5) при $\beta_2 > 1$ становится чисто мнимой. Исследование показывает, что для каждой скорости расклинивания $V < c_2$



Фиг. 1



Фиг. 2

существует бесконечное множество длин трещины перед клином, так что график $l(V)$ имеет бесконечное множество ветвей. Если $hc_2^2/a^2 A \ll (1 - c_2^2/c_0^2)^{1/2}$, то все ветви лежат на участке $0 \leq V \leq c_2$ и проходят через точку $l=0, V=c_2$. Если же $hc_2^2/a^2 A > (1 - c_2^2/c_0^2)^{1/2}$, то все ветви обрываются при $V < c_2$, причем чем выше лежит ветвь, тем ближе она подходит к точке $l=0, V=c_2$.

Выбор той или иной длины трещины в рассматриваемых случаях предопределяется начальными условиями.

Рассмотренный пример не должен приводить к мысли, что c_2 является в приближении С. П. Тимошенко предельной скоростью для движения трещины в любых условиях. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть стационарное продвижение трещины сосредоточенным моментом, превышающим по величине $\sqrt{2TbEI}$.

Поступила 16 X 1967

ЛИТРАТУРА

1. М и х а й л о в А. М. Динамические задачи теории трещин в балочном приближении. ПМТФ, 1966, № 5, стр. 167—172.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория упругости. Изд. 3-е. М., «Наука», 1965, § 11, 12.
3. Т и м о ш е н к о С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959, § 51, стр. 314.