

сетке и занимающей приблизительно треть всего объема. В ней происходит значительное изменение измеряемых величин. Вторая область занимает оставшуюся часть перемешиваемого объема жидкости и характеризуется практически постоянными интенсивностью массообмена и значением среднеквадратичных пульсаций скорости жидкости. Опытные данные, полученные в этой области, приведены на рис. 3 и 4.

Сравнение (рис. 5, б) с имеющимися экспериментальными результатами [2], полученными при  $f = 2-5$  Гц,  $S = 10-14$  мм, показывает, что в отсутствие средних циркуляционных течений закономерность изменения величины среднеквадратичных пульсаций скорости с увеличением расстояния от осциллирующей решетки отлична от полученной в настоящей работе. В этом случае во всем объеме турбулизованной жидкости происходит резкое уменьшение  $u$  до своего минимального значения около свободной поверхности (в эксперименте [2] реализована схема с осциллирующей решеткой, расположенной вблизи дна сосуда).

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Титкову за помощь в проведении опытов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воропаев С. И., Гаврилин Б. Л. и др. Лабораторное исследование углубления перемешиваемого слоя в однородной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО.— 1980.— № 2.
2. Thompson S. M., Turner J. S. Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating grid // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 67, pt 2.
3. Hopfinger E. J., Toly M.-A. Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interface // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 78, pt 1.
4. McDougall T. J. Measurements of turbulence in a zero-mean-shear mixed layer // J. Fluid Mech.— 1979.— V. 94.
5. Hopfinger E. J., Linden P. F. Formation of thermoclines in zero-mean-shear turbulence subjected to a stabilizing buoyancy flux // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 114.
6. Николаишвили Е. К., Барабаш В. М. и др. Растворение твердых частиц при перемешивании в аппаратах без отражательных перегородок // ТОХТ.— 1980.— Т. 14, № 4.
7. Sandoval-Robles J. S., Delmas H., Couderc J. P. Influence of turbulence on mass transfer between a liquid and a solid sphere // AIChE J.— 1981.— V. 27, N 5.
8. Искаков М. С., Капинский О. Н., Накоряков В. Е. Исследование пульсационных характеристик процесса массообмена между твердой сферической частицей и турбулизованной жидкостью // ПМТФ.— 1986.— № 6.
9. Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E., Iskakov M. S. Electrochemical measurements of mass transfer between a sphere and liquid in motion at high Péclet numbers // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 125.
10. Титков В. И., Томсон Я. Я., Данилов Н. С. Лазерный доплеровский измеритель скорости (ЛДИС) // Экспериментальные методы и аппаратура для исследования турбулентности: Тр. III Всесоюз. совещ.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.

Поступила 20/1 1986 г.

УДК 551.466.81

### НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. Веденьков, В. Ф. Санников

(Севастополь)

В [1] описан способ расчета точного (в линейной постановке) решения задачи об установившихся пространственных волнах, генерируемых локальным источником возмущений в стратифицированном потоке. Примеры вычислений выполнены для жидкости с постоянной частотой Вэйсяля — Брента с использованием приближения Буссинеска и условия «твердой крышки» на верхней границе жидкости. Проведенное в [1] исследование показало, что отличие точного решения задачи от известных приближенных [2, 3] существенно в окрестностях передних фронтов отдельных мод в случае, когда скорость потока превышает скорости распространения волн соответствующих мод. Построенные в [4] асимптотики согласуются с результатами [1]. В этой ра-

боте методы [1, 4] применяются для расчета внутренних волн в двухслойной жидкости. Простая модель жидкости с резким пикноклином позволяет определить роль в формировании поля вынужденных волн зависимостей вертикальных профилей внутренних волн от длины волны. Двухслойная модель стратификации применялась в рассматриваемой задаче неоднократно при изучении как установившихся волн [5—7], так и неустановившихся [8, 9], однако примеры расчета амплитуд содержатся только в [7] и выполнены по приближенным асимптотическим формулам.

Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях поток невязкой несжимаемой жидкости, текущей с постоянной скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$  и состоящей из двух слоев: плотность и толщина верхнего слоя  $\rho_1, H_1$ , нижнего —  $\rho_2, H_2$ ,  $\rho_1 < \rho_2$ . Пусть генератором волн будет точечный источник интенсивности  $Q$ , расположенный на расстоянии  $H_3$  от поверхности раздела. В линейной постановке волновые движения жидкости, создаваемые действием источника, описываются уравнением Пуассона для потенциала возмущенных скоростей

$$(1) \quad \Delta \varphi = Q \delta(x, y, z - H_3) \quad (-H_2 < z < H_1, z \neq 0)$$

с граничными условиями

$$(2) \quad L\varphi = 0 \quad (z = H_1), \quad \partial\varphi/\partial z = 0 \quad (z = -H_2),$$

к которым следует добавить условие излучения — отсутствие волновых возмущений вверх по потоку — и условие непрерывности на невозмущенной поверхности раздела слоев ( $z = 0$ ) функций  $\partial\varphi/\partial z$  и  $\rho_0(z)L\varphi$ . Здесь  $L = c^2 \partial^2/\partial x^2 + g\partial/\partial z$ ;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho_0(z) = \rho_1$  при  $z > 0$  и  $\rho_0(z) = \rho_2$  при  $z < 0$ ;  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция.

Следуя [1], находим выражение для вертикальной составляющей возмущенных скоростей  $w = \partial\varphi/\partial z$  в виде суммы однократных интегралов:

$$(3) \quad w(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi} \rho_0(H_3) \left\{ w_{01} + w_{11} + \sum_{n=0}^{\infty} w_{n2} \right\},$$

$$w_{n1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_n(\theta; R, \omega, z) d\theta,$$

$$F_n(\theta; R, \omega, z) = -H(r_n^2) H[\cos(\theta - \omega)] W_n(z; \theta) W_{nz}(H_3; \theta) \sin(R\Delta_n),$$

$$w_{n2} = \pi^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_n(z; \theta) W_{nz}(H_3; \theta) [H(r_n^2) G_1(R\Delta_n) + H(-r_n^2) G_i(R\Delta_n)] d\theta,$$

$$G_1(u) = \int_0^{\infty} t(t^2 + 1)^{-1} \exp(-|u|t) dt, \quad G_i(u) = \int_0^{\infty} t(t^2 + 1)^{-1} \exp(iut) dt.$$

Здесь  $R, \omega$  — полярные координаты горизонтальной плоскости ( $x, y$ );  $\Delta_n = |r_n| \cos(\theta - \omega)$ ; функции  $G_1(u)$  и  $G_i(u)$  выражаются [1] через интегральные показательные функции;  $H(\cdot)$  — единичная функция Хэвисайда;  $\beta_n = r_n^2(\theta)$  и  $W_n(z; \theta)$  — собственные значения ( $\beta_0 > \beta_1 > \dots$ )

и ортонормированные собственные функции  $\left( \int_{-H_2}^{H_1} \rho_0(z) W_n W_m dz = \delta_n^m, \delta_n^m - \right.$

\* символ Кронекера) однородной краевой задачи

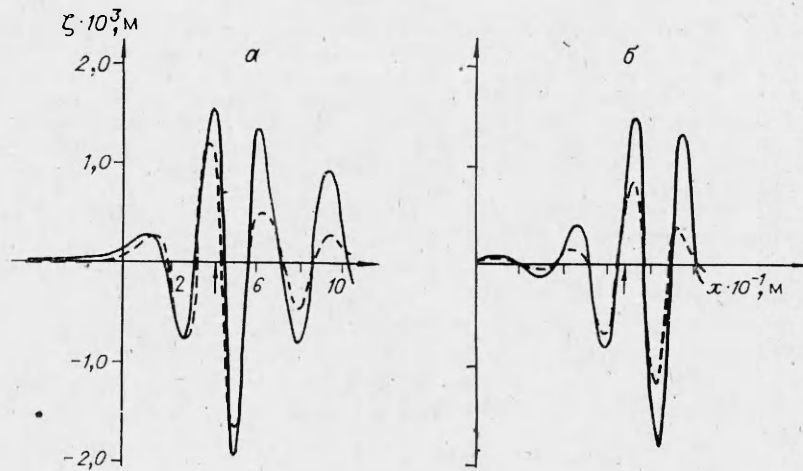
$$(4) \quad W_{zz} - \beta W = 0 \quad (-H_2 < z < H_1, z \neq 0),$$

$$W_z - \kappa W = 0 \quad (z = H_1), \quad W = 0 \quad (z = -H_2);$$

$W$  и  $\rho_0(W_z - \kappa W)$  непрерывны в точке  $z = 0$ ;  $\kappa = g(c \cos \theta)^{-2}$ . Задача (4) имеет счетное число действительных собственных значений, являющихся решениями дисперсионного уравнения

$$(5) \quad \beta(1 + \gamma \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2) - \kappa r(\operatorname{th} rH_1 + \operatorname{th} rH_2) + \\ + \kappa^2 \varepsilon \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2 = 0, \quad r = \beta^{1/2}, \quad \gamma = \rho_1/\rho_2, \quad \varepsilon = 1 - \gamma.$$

При  $n \geq 2$  собственные значения  $\beta_n(\theta) < 0$  при всех  $\theta$ .



Р и с. 1

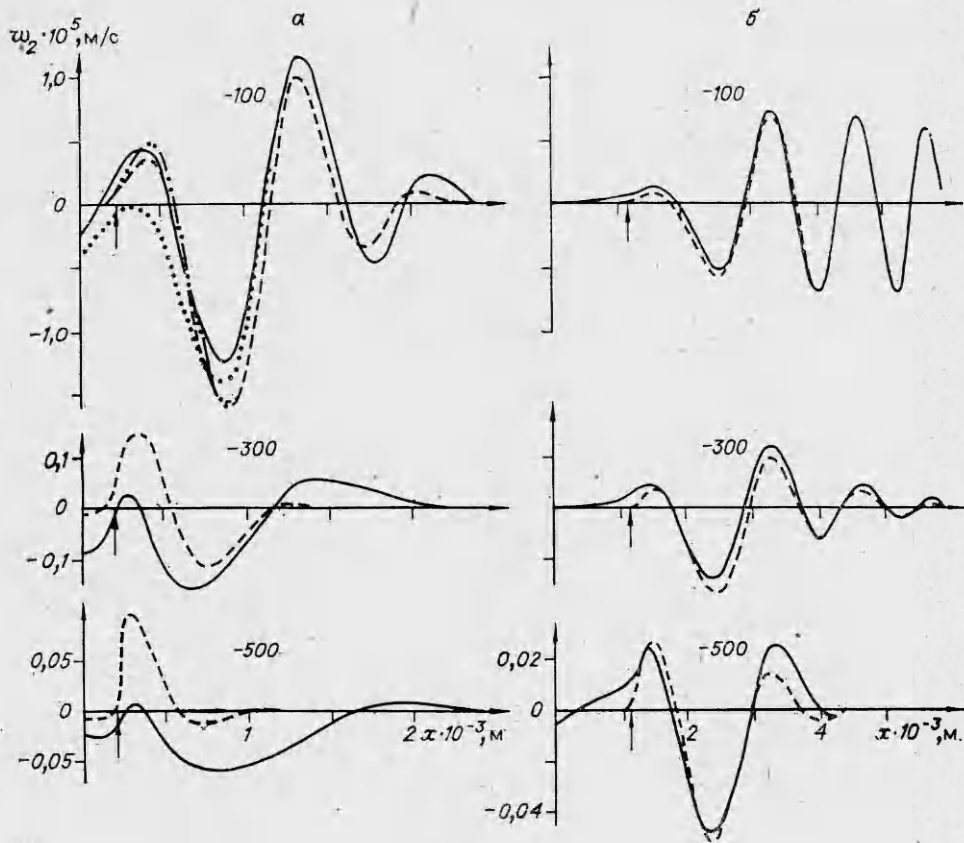
В формуле (3) слагаемое  $w_{01}$  описывает вклад поверхностной моды в волновое поле, а  $w_{11}$  — внутренней моды. Остальные слагаемые для двухслойной модели неволновые, и на больших удалениях от генератора волн их вкладами можно пренебречь, так как  $w_{n2} = O(R^{-2})$  при  $R \rightarrow \infty$  ( $n \geq 2$ ) [10]. Такая же оценка справедлива и для интегралов  $w_{n2}$  ( $n = 0, 1$ ) в случаях, когда скорость потока  $c < c_n$ , где  $c_n = \sqrt{g/\kappa_n}$ , а  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$  ( $\kappa_0 < \kappa_1$ ) — решения уравнения (5) при  $\beta = 0$ . Если  $c > c_n$  ( $n = 0, 1$ ), то вклад слагаемого  $w_{n2}$  в окрестности границы волновой зоны  $\omega = \arcsin(c_n/c)$  есть  $O(R^{-2/3})$  [1]. Особенности вклада интеграла  $w_{n1}$  ( $n = 0, 1$ ) описаны в [1], отметим лишь, что в более ранних работах асимптотические при  $R \rightarrow \infty$  выражения для поля  $w(x, y, z)$  представлялись в виде суммы только этих слагаемых и их дальнейших оценок методом стационарной фазы.

Для проверки модели проведено сравнение теоретических расчетов с данными лабораторного эксперимента [11]. На рис. 1 представлены сплошными линиями теоретические, штриховыми — экспериментальные значения амплитуд волн на поверхности раздела от овоида с радиусом миделева сечения  $R_M = 0,01$  м и удлинением  $L/R_M = 12$  при следующих значениях остальных параметров:  $H_1 = 0,09$ ,  $H_2 = 0,3$ ,  $H_3 = 0,02$  м,  $c = 0,223$  м/с,  $\gamma = 0,8$ ,  $a - y = 0,15$  м,  $b - y = 0,25$  м. В теоретических расчетах овоид моделировался системой источник — сток, параметры которой определялись, как для безграничной однородной жидкости [12]. Выражение для смещения  $\zeta$  выводилось из (3) с помощью кинематического соотношения  $c\partial\zeta/\partial x = w$ . Анализ рис. 1 показывает удовлетворительное согласие между теорией и экспериментом. Увеличение расхождения между соответствующими кривыми с ростом  $x$  и  $y$ , по-видимому, — следствие того, что в теоретической модели не учтены факторы нестационарности образования волн, диссипации и использована идеализированная схема для генератора волн.

Формулы (3) позволяют рассчитывать всю область волнового поля, однако на больших удалениях от генератора волн экономичнее использовать асимптотики.

В случае  $c > c_n$  внутри волновой зоны основные возмущения описываются интегралом  $w_{n1}$  [1], главный член асимптотики которого определяется вкладом стационарной точки [9]. В окрестности переднего фронта слагаемые  $w_{n1}$  и  $w_{n2}$  — величины одного порядка [1], и асимптотика полного решения (3) выражается через функцию Эйри [4]. Можно показать, что при  $c > c_n$  равномерная оценка вклада  $n$ -й моды ( $n = 0, 1$ ) имеет вид

$$(6) \quad w_n = -Q\theta_0(H_3)R^{-2/3}A'_i(-BR^{2/3})W_n(z; \theta) \times$$



Р и с. 2

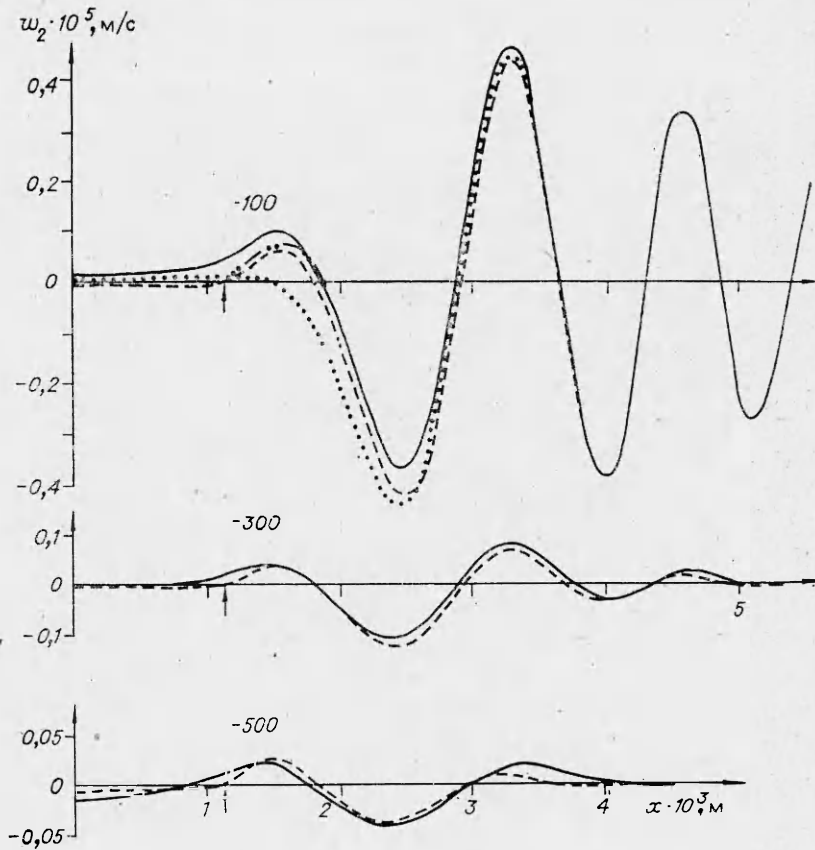
$$\times W_{nz}(H_3; \theta) / \sqrt{-2B^{1/2}\Delta''_{n00} + O(R^{-4/3})},$$

$$B = r_n^2(\theta) [3 \sin(\theta - \omega) / dr_n^2/d\theta]^{2/3}$$

где правые части вычисляются в стационарной точке решений уравнения  $\Delta'_{n0} = 0$ . При  $BR^{2/3} \gg 1$  замена производной функции Эйри в (6) ее асимптотическим выражением позволяет преобразовать (6) к виду, полностью совпадающему с асимптотической оценкой, полученной по методу стационарной фазы. На рис. 2, 3 представлены примеры расчетов вклада внутренней моды по точным формулам (3) (сплошные линии) и асимптотической (6) (штриховые). Пунктирные и штрихпунктирные линии изображают соответственно вклад слагаемого  $w_{11}$  и его асимптотику по методу стационарной фазы. Расчеты проводились при  $H_1 = 100$  м,  $H_2 = 3900$  м,  $c = 3$  м/с,  $Q = 1$  с<sup>-1</sup>,  $\gamma = 0,996$ ; для рис. 2  $z = 0$  м,  $a - y = 200$  м,  $b - y = 1000$  м, значения  $H_3$  (м) указаны рядом с кривыми; для рис. 3  $H_3 = -50$  м,  $y = 1000$  м, около линий даны значения  $z$  (м). Необходимо отметить, что внутри волновой зоны при достаточно больших удалениях  $R$  метод стационарной фазы дает лучшую оценку характеристик генерируемых волн, чем однократные интегралы  $w_{n1}$ .

Анализ рис. 2, 3 показывает, что область применения асимптотических формул существенно зависит от параметров  $z$  и  $H_3$ . С увеличением глубины погружения источника (рис. 2) заметные волновые возмущения стягиваются к переднему фронту, указанному стрелкой, при этом увеличивается разница между точным и асимптотическим решениями. То же наблюдается и при удалении от поверхности раздела (рис. 3) при фиксированном положении источника.

Отмеченный эффект связан с зависимостью амплитудного множителя  $\Phi_n(z, H_3; \theta) = W_n(z; \theta)W_{nz}(H_3; \theta)$  от волнового угла  $\theta$ . Эта зависимость



Р и с. 2

имеет экспоненциальный характер, в нижнем слое жидкости  $\Phi_n(z, H_3; \theta) \sim \exp[r_n(\theta)(z + H_3)]$  при  $-r_n(\theta)(z - H_3) \gg 1$ . Известно [1], что  $r_n(\theta) \rightarrow \infty$  при  $|\theta| \rightarrow \pi/2$ . Учитывая это, можно было бы построить более точную асимптотическую оценку (3), если воспользоваться методом перевала. Его применение, однако, связано со значительными трудностями, поскольку для этого необходимо решать уравнение  $\frac{d}{d\theta} \{r_n(\theta) [z + H_3 + iR \cos(\theta - \omega)]\} = 0$  в комплексной области значений  $\theta$ . Пусть  $\delta = |z - H_3|/R \ll 1$  и  $\theta = \theta_0$  является простой стационарной точкой ( $d\Delta_n/d\theta = 0$  при  $\theta = \theta_0$ ), когда  $\delta = 0$ , тогда фаза  $S_n$  асимптотической оценки имеет вид

$$S_n = R \left\{ \Delta_n(\theta_0) + \frac{[\delta r'_{n\theta}(\theta_0)]^2}{2\Delta''_{n\theta\theta}(\theta_0)} \right\} - \pi/4 + o(\delta^2).$$

Отсюда, в частности, следует, что оценка методом перевала дает большие длины волн ( $\Delta''_{n\theta\theta}(\theta_0) < 0$ ), чем методом стационарной фазы. Это замечание согласуется с результатами численных расчетов, представленных на рис. 2, 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане.— Севастополь, 1983.
2. Санников В. Ф., Черкесов Л. В. Развитие пространственных внутренних волн в потоке стратифицированной жидкости // Поверхностные и внутренние волны.— Севастополь, 1981.

3. Сгурова И. В., Сухарев В. А. Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине // Изв. АН СССР. ФАО.— 1981.— Т. 17, № 6.
4. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Там же.— 1984.— Т. 20, № 6.
5. Hudimas A. A. Ship waves in a stratified ocean // J. Fluid Mech.— 1961.— V. 11, N 2.
6. Stapper G. D. Ship waves in a stratified ocean // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, N 4.
7. Филимонова Л. Д., Черкесов Л. В. Внутренние волны, генерируемые движущимися возмущениями // Морские гидрофизические исследования.— Севастополь, 1977.— № 1.
8. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. Развитие корабельных волн в неоднородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.
9. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны в неоднородной жидкости конечной глубины // Морские гидрофизические исследования.— Севастополь, 1972.— № 2.
10. Санников В. Ф. Установившиеся внутренние волны, генерируемые локальным источником возмущений в потоке // Моделирование поверхностных и внутренних волн.— Севастополь, 1984.
11. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны, генерируемые движением сферы и овоида в двухслойной жидкости // Тр. Всесоюз. совещ. «Волновые процессы в морях и океанах».— Севастополь, 1983.— М., 1984.— Деп. в ВИНТИ 9.01.84, № 281—84.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: ГИТТЛ, 1955.— Ч. 1.

Поступила 17/II 1986 г.

УДК 532.593

## ЗАДАЧА КОШИ РАССЕЙНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ

С. П. Буданов, А. С. Тибиллов, В. А. Яковлев

(Ленинград)

В [1] в линейной постановке рассмотрена стационарная задача рассеяния внутренних волн (ВВ) на неоднородности поля плотности в безграничной среде с постоянной частотой Вайсяля — Брента; показана важная роль данного механизма в перераспределении энергии ВВ между различными модами; определены области, в которых амплитуда рассеянных ВВ существенно отлична от нуля. В настоящей работе обсуждается соответствующая нестационарная задача.

Пусть в среде существуют ВВ, характеризующиеся полями плотности  $\rho_\Phi(r, t)$  и скорости  $U_\Phi(r, t)$ . В момент времени  $t = 0$  в области пространства  $D_1$  происходит локальное «перемешивание» (нарушение распределения полей  $\rho_\Phi$  и  $U_\Phi$ ) среды. В приближении Буссинеска в пренебрежении вращением Земли и силами вязкости эта нестационарная задача имеет вид

$$(1) \quad L_U \{\rho, U\} = Q(U), \quad U|_{t=0} = \begin{cases} U_\Phi, & r \notin D_1, \\ U_{\text{н}}, & r \in D_1, \end{cases}$$

$$L_\rho \{\rho, U\} = \varphi(\rho, U), \quad \rho|_{t=0} = \begin{cases} \rho_\Phi, & r \notin D_1, \\ \rho_{\text{н}}, & r \in D_1, \end{cases}$$

где  $L_U \equiv \frac{\partial}{\partial t} \Delta U + \frac{g}{\rho_0} \left[ k \Delta \rho - \nabla \frac{\partial \rho}{\partial z} \right]$ ;  $L_\rho \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho_0}{g} N^2 w$ ;  $\varphi(\rho, U) \equiv -U \nabla \rho$ ;

$Q(U) \equiv -\text{rot rot} [(U \cdot \nabla) U]$ .

Решение системы (1) может быть представлено суммой двух слагаемых, одно из которых описывает задачу коллапса зоны интрузии в стратифицированной жидкости, а другое — взаимодействие фоновых ВВ с этой зоной. Задача коллапса хорошо исследована (см., например, [2]). Известно [3], что решение задачи коллапса с учетом вязкости при больших временах (третья стадия коллапса) представляет собой неоднородность поля плотности в виде пятна перемешанной жидкости, которое жи-