

УДК 532.529, 532.517

## Аппроксимация потока объемной фракции в течении двух жидкостей\*

С.Н. Яковенко<sup>1,2</sup>, К.С. Чан<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный Чэн-Гун университет, г. Тайнань, Тайвань

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Тестируется течение, образующееся при разрушении плотины, для выяснения точности различных методов разрешения поверхности раздела газ–жидкость, основанных на решении дополнительного уравнения объемной фракции жидкой фазы. Основное внимание уделяется численным схемам, используемым для аппроксимации членов адвекции этого уравнения. В частности, применяется MUSCL-схема с QUICK-интерполянтами, TVD-ограничителями “compressive minmod” и процедурой «модификации наклона», а также противопоточно-поточная схема «донор-акцептор», сконструированная в VOF-методе. Для решения уравнений скорости и давления используется явная процедура, основанная на методе искусственной сжимаемости. Проведены детальные предварительные расчеты для получения решения, независимого от параметров сетки и шагов по времени. Результаты численных исследований движения свободной поверхности представлены изолиниями объемной фракции в разные моменты времени, а также положениями переднего фронта течения и высоты колонны жидкости в зависимости от времени.

### ВВЕДЕНИЕ

Методы разрешения поверхности раздела между двумя текучими несмешивающимися средами (обычно жидкость и газ) играют важную роль при решении многих технических задач. Основная трудность этих методов заключается в создании достаточно реалистичной аппроксимации резкой поверхности раздела. Очевидным требованием такого разрешения является условие малости вычисляемой конечной толщины свободной поверхности по сравнению с типичными масштабами длины других физических и геометрических параметров. С другой стороны, для применения в практических ситуациях необходимо, чтобы алгоритм расчетов был эффективным и устойчивым.

Одним из хорошо известных и широко используемых методов разрешения свободной поверхности является концепция фракционного объема жидкости VOF (Volume of Fluid) [1]. При этом определяется функция  $f$  объемной фракции текучей среды, которая равна единице в области, занимаемой одной (обычно более плотной) жидкостью, и нулю — в области, занимаемой другой жидкостью. Этот метод вводит уравнение для расчета распределения VOF-функции, которая физически

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (НШ № 454.2008.1), РФФИ (грант № 06-01-00724), Интеграционного проекта СО РАН (№ 2-16); Национального научного совета Тайваня (NSC, R.O.C., контракт NSC-92-2212-E006-102).

соответствует ступенчатой функции с разрывом нулевой толщины и численно — функции, имеющей узкую зону с резкими изменениями (толщина поверхности раздела имеет порядок размера вычислительной ячейки). Вводимое  $f$ -уравнение соответствует движению VOF-функции вместе с жидкостью. Основным способом описания адвекции, предложенным в VOF-методе, является специальная процедура донор–акцептор, включающая схемы против потока или по потоку в зависимости от ориентации поверхности. Первоначально предложенный подход VOF [1] применялся в различных исследованиях, в частности, при моделировании [2] твердотельного вращения и неустойчивости Рэля–Тейлора, в расчетах [3] течений, возникающих при разрушении плотины, и в пульверизаторах.

Однако указанный подход, обеспечивая резкую поверхность раздела, имеет некоторые недостатки, а именно: генерацию ложных изолированных образований вида плавающих осколков [2]. Для уменьшения погрешностей членов адвекции и улучшения описания поверхности предлагались различные модификации VOF-метода и другие подходы. Одна из альтернативных численных схем для аппроксимации потоков VOF-функции основана на подходе монотонной противопоточно-центрированной схемы для законов сохранения MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) с интерполянтами высокого порядка, например, QUICK-интерполянтами третьего порядка [4]. Для контроля ложных осцилляций, возникающих около разрывов в методах высокого порядка, иногда вводятся функции-ограничители уменьшения полных вариаций TVD (Total Variation Diminishing) [4–6]. Установлено, в частности, что ограничитель в виде сжимающего оператора (compressive minmod) дает приемлемые результаты для распределений как скорости и давления, так и объемной фракции. Недостатком такой параметризации является то, что поверхность раздела уже не является такой же резкой, как в исходном VOF-методе, и может иметь толщину порядка нескольких размеров ячеек. Для уменьшения численного размывания из-за диффузионных свойств TVD-MUSCL-схем был предложен метод модификации наклона SM (slope modification) [5, 6] для осуществления дополнительного сжатия интерполируемых значений  $f$ .

Настоящая работа направлена на сравнение различных схем для аппроксимации потоков объемной фракции. Это сравнение выполнено при численном решении задачи разрушения плотины. Такое течение выбиралось в качестве тестового во многих других предшествующих работах [1, 3–5] благодаря доступным экспериментальным данным [7].

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные уравнения для двумерного (2D) ламинарного течения двух текучих несжимаемых сред имеют следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] - g, \quad (3)$$

$$\rho = \rho_1 f + \rho_2 (1 - f), \quad \eta = \eta_1 f + \eta_2 (1 - f), \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(Uf)}{\partial x} + \frac{\partial(Vf)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

где  $U$  и  $V$  — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости соответственно,  $x$  и  $y$  — горизонтальная и вертикальная координаты соответственно,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $t$  — время. Значения  $\rho_1$  и  $\eta_1$  соответствуют более тяжелой жидкости при  $f = 1$ , тогда как значения  $\rho_2$  и  $\eta_2$  — более легкой жидкости (газу) при  $f = 0$ .

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И СХЕМЫ

### 2.1. Алгоритм решения уравнений Навье–Стокса

Метод искусственной сжимаемости [8] вводит дополнительный член в уравнение неразрывности:

$$\left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \left( \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\partial p / \partial \tau) = 0 \right), \quad (6)$$

где псевдовремя  $\tau$  не является эквивалентным физическому времени  $t$  для решений, зависящих от времени, а  $\beta$  — константа размерности давления (как и в [4–6]).

В качестве первого шага в численных исследованиях для решения уравнений Навье–Стокса используется довольно простая и явная процедура одновременных итераций уравнений для скорости и давления [9, 10]. Для рассматриваемой эллиптической задачи дискретизация дифференциальных уравнений (2)–(6) производится на смещенной сетке с целью согласования полей скорости и давления. Компоненты  $U_{i\pm 1/2, j}$  и  $V_{i, j\pm 1/2}$  вектора средней скорости определяются в центре граней вычислительной ячейки, тогда как скалярные величины  $p_{i, j}$  и  $f_{i, j}$  — в центральной точке ячейки с координатой  $(x_i, y_j)$ . Для производных по времени и псевдовремени выбираются явные схемы первого порядка. Для слагаемых, содержащих производные по  $x$  и  $y$  (а именно, вязких членов), за исключением членов адвекции, которые отдельно обсуждаются ниже, применяется центрально-разностная схема.

Среднее давление находится при помощи подхода одновременных итераций для значений давления и скорости, обеспечивающего реализацию на каждом временном шаге конечно-разностного уравнения неразрывности

$$\left( \nabla \bar{U} \right)_{i, j}^{n+1} = \frac{U_{i+1/2, j}^{n+1} - U_{i-1/2, j}^{n+1}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} + \frac{V_{i, j+1/2}^{n+1} - V_{i, j-1/2}^{n+1}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} = 0$$

в асимптотическом пределе с ростом числа итераций (шагов по псевдовремени). Формула с верхней релаксацией для расчета давления на двумерной неравномерной сетке в течении постоянной плотности имеет вид [10]

$$p_{i, j}^{k+1} = p_{i, j}^k + \frac{\beta \Delta \tau \Delta t}{\rho} \left[ \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{p_{i+1, j}^k - p_{i, j}^k}{x_{i+1} - x_i} - \frac{p_{i, j}^k - p_{i-1, j}^{k+1}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{p_{i, j+1}^k - p_{i, j}^k}{y_{j+1} - y_j} - \frac{p_{i, j}^k - p_{i, j-1}^{k+1}}{y_j - y_{j-1}} \right) \right] - \beta \Delta \tau \cdot S_{i, j}.$$

В настоящей работе формулируется коррекция с учетом переменной плотности

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k + \beta \Delta \tau \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{\rho_{i-1/2,j}} \frac{p_{i,j}^k - p_{i-1,j}^{k+1}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{y_{j+1} - y_j} - \frac{1}{\rho_{i,j-1/2}} \frac{p_{i,j}^k - p_{i,j-1}^{k+1}}{y_j - y_{j-1}} \right) \right] - \beta \Delta \tau \cdot S_{i,j},$$

где  $(k+1)$  — число итераций,  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени,  $S_{i,j}$  — источниковый член, содержащий информацию из уравнений для  $U$  и  $V$ ,  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $\Delta y_j = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ , значения  $x_{i\pm 1/2} = (x_i + x_{i\pm 1})/2$  и  $y_{j\pm 1/2} = (y_j + y_{j\pm 1})/2$  — координаты граней ячейки с центром в точке  $(x_i, y_j)$ .

Релаксационный параметр (шаг по псевдовремени) равен  $\beta \Delta \tau = 0,9 \rho_2 \delta^2 / (2 \Delta t)$  [9] из анализа устойчивости и практики вычислений, где  $\delta = \min(x_{i+1} - x_i; y_{j+1} - y_j)$ . Критерий итерационной сходимости формулируется в виде условия

$$\chi_{i,j}^p \equiv \left| \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k}{p_{\max}^{k+1} - p_{\min}^{k+1}} \right| \leq \chi_0^p$$

для всех точек вычислительной области. Величина  $\chi_0^p$  задавалась равной 0,0008 в [9] или варьируемой от 0,2 до  $10^{-4}$  для ограничения числа итераций (обычно от 1 до 20 на одном шаге по времени), в зависимости от количества шагов по времени и узлов сетки [10]. Известно, что использование малого значения  $\chi_0^p$  приводит к сотням итераций на одном шаге по времени, тогда как большое значение  $\chi_0^p$  снижает точность расчетов. В настоящей работе выбирается значение  $\chi_0^p = 0,004$  как компромисс между точностью и эффективностью вычислений.

Шаг по времени нужно выбирать достаточно малым [1, 9, 10]

$$\Delta t = C_{\Delta t} \min \left\{ \frac{x_{i+1} - x_i}{U_{i+1/2,j}}, \frac{y_{j+1} - y_j}{V_{i,j+1/2}}, \frac{\rho \Delta x_i^2 \Delta y_j^2}{2\eta (\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2)} \right\}$$

для соблюдения численной устойчивости и условия  $f \geq 0$ , а также для минимизации погрешности, связанной с нелинейностью уравнений (2)–(6). Значение коэффициента  $C_{\Delta t}$  обычно порядка единицы и может меняться в различных тестовых задачах гидродинамики. Для задачи о разрушении плотины численные исследования показывают, что в начальной стадии расчета необходимо дополнительное уменьшение временного шага согласно схеме:

$$\Delta t^* = C_{\Delta t} \min \left\{ C_{\delta} \frac{\delta}{U_r}, \frac{x_{i+1} - x_i}{U_{i+1/2,j}}, \frac{y_{j+1} - y_j}{V_{i,j+1/2}}, \frac{\rho \Delta x_i^2 \Delta y_j^2}{2\eta (\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2)} \right\},$$

$$\Delta t = [C_{t_0} (1 - t/t_0) + t/t_0] \Delta t^* \quad \text{при } t \leq t_0, \quad \Delta t = \Delta t^* \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Первый член  $C_\delta \delta/U_r$  (где  $C_\delta = 1$ , а  $U_r$  — характерная скорость течения) вводится для ограничения шага по времени в начале движения, когда скорости малы (первый шаг по времени оказывается слишком большим, если вязкость невелика). Дополнительное уменьшение шага по времени около начального состояния с соответствующим выбором значений  $(C_{t0}, t_0)$  позволяет сэкономить общее время расчета благодаря заданию при этом большего значения коэффициента  $C_{\Delta t}$ .

## 2.2. Численные схемы для членов адвекции

Дискретизация уравнения объемной фракции имеет следующий вид:

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n - \frac{(Uf)_{i+1/2,j}^n \Delta t - (Uf)_{i-1/2,j}^n \Delta t}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} - \frac{(Vf)_{i,j+1/2}^n \Delta t - (Vf)_{i,j-1/2}^n \Delta t}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}},$$

что показывает исключительную важность параметризации членов адвекции (потоков) в задачах разрешения поверхности раздела. Общая формулировка противопоточной схемы MUSCL-типа для аппроксимации потоков записывается как (показано только для горизонтального потока с бóльшим индексом, выражения для остальных потоков могут быть выписаны по аналогии)

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j}^x &= (Uf)_{i+1/2,j} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ f_{i+1/2,j}^R U_{i+1/2,j} + f_{i+1/2,j}^L U_{i+1/2,j} - \left| \frac{\partial F^x}{\partial f} \right|_{i+1/2,j} (f_{i+1/2,j}^R - f_{i+1/2,j}^L) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ f_{i+1/2,j}^R (U_{i+1/2,j} - |U_{i+1/2,j}|) + f_{i+1/2,j}^L (U_{i+1/2,j} + |U_{i+1/2,j}|) \right] = \\ &= \begin{cases} f_{i+1/2,j}^R U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \leq 0 \\ f_{i+1/2,j}^L U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \geq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

где обобщенные левый и правый интерполянты задаются [4–6] соотношениями (без TVD-ограничителей):

$$\begin{aligned} f_{i-1/2,j}^R &= f_{i,j} - \frac{\phi}{4} \left[ (1-\kappa)(f_{i+1,j} - f_{i,j}) + (1+\kappa)(f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right] = \\ &= f_{i,j} - \frac{\phi}{4} \left[ (1-\kappa)\delta f_{i+1/2,j} + (1+\kappa)\delta f_{i-1/2,j} \right], \\ f_{i+1/2,j}^L &= f_{i,j} + \frac{\phi}{4} \left[ (1+\kappa)(f_{i+1,j} - f_{i,j}) + (1-\kappa)(f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right] = \\ &= f_{i,j} + \frac{\phi}{4} \left[ (1+\kappa)\delta f_{i+1/2,j} + (1-\kappa)\delta f_{i-1/2,j} \right] \end{aligned}$$

или (с TVD-ограничителями)

$$\begin{aligned} f_{i-1/2,j}^R &= f_{i,j} - \frac{\phi}{4} \left[ (1-\kappa)\delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + (1+\kappa)\delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right], \\ f_{i+1/2,j}^L &= f_{i,j} + \frac{\phi}{4} \left[ (1+\kappa)\delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + (1-\kappa)\delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right]. \end{aligned}$$

В [4–6] рекомендовалось использовать функцию «compressive minmod» для такого TVD-ограничителя, способную контролировать численные осцилляции путем замены переменных разностей их ограниченными значениями, определяемыми как:

$$\delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L = \min \text{mod} \left\{ \left( f_{i,j} - f_{i-1,j} \right), \varepsilon_{i+1/2,j}^L \left( f_{i+1,j} - f_{i,j} \right) \right\},$$

$$\delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R = \min \text{mod} \left\{ \left( f_{i+1,j} - f_{i,j} \right), \varepsilon_{i-1/2,j}^R \left( f_{i,j} - f_{i-1,j} \right) \right\},$$

$$\min \text{mod} \{a, b\} = a \cdot \max \left\{ 0, \min \left[ 1, \frac{b}{a} \right] \right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } ab \leq 0 \\ \text{sgn} \{a\} \min [|a|, |b|] & \text{при } ab \geq 0 \end{cases}$$

с функцией фактора сжатия [5, 6], имеющей значения  $\varepsilon_{i+1/2,j}^L = \varepsilon_{i-1/2,j}^R = 4$  для равномерной сетки, которая используется в настоящей работе. Таким образом, может быть построена иерархия численных схем для членов адвекции на равномерной сетке (которые можно применять не только для уравнения объемной фракции, но и в конечно-разностных уравнениях для скорости):

– противопоточная схема первого порядка:

$$\phi = 0 \Rightarrow f_{i-1/2,j}^R = f_{i+1/2,j}^L = f_{i,j},$$

(7)

$$F_{i+1/2,j}^x = \begin{cases} f_{i+1,j} U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \leq 0 \\ f_{i,j} U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \geq 0 \end{cases};$$

– MUSCL-схема с QUICK-интерполянтами и без TVD-ограничителей (QUICK-схема третьего порядка):

$$\phi = 1, \quad \kappa = \frac{1}{2} \Rightarrow F_{i+1/2,j}^x = \begin{cases} f_{i+1/2,j}^R U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \leq 0 \\ f_{i+1/2,j}^L U_{i+1/2,j} & \text{при } U_{i+1/2,j} \geq 0 \end{cases},$$

(8)

$$f_{i-1/2,j}^R = f_{i,j} - \left[ \frac{1}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) + \frac{3}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right],$$

$$f_{i+1/2,j}^L = f_{i,j} + \left[ \frac{3}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) + \frac{1}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right];$$

– MUSCL-схема с QUICK-интерполянтами и TVD-ограничителем «compressive minmod» [4–6]:

$$f_{i-1/2,j}^R = f_{i,j} - \left[ \frac{1}{8} \delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + \frac{3}{8} \delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right],$$

$$f_{i+1/2,j}^L = f_{i,j} + \left[ \frac{3}{8} \delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + \frac{1}{8} \delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right],$$

(9)

$$\delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L = \min \text{mod} \left\{ \left( f_{i,j} - f_{i-1,j} \right), 4 \left( f_{i+1,j} - f_{i,j} \right) \right\},$$

$$\delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R = \min \text{mod} \left\{ \left( f_{i+1,j} - f_{i,j} \right), 4 \left( f_{i,j} - f_{i-1,j} \right) \right\};$$

– MUSCL-схема (9) с QUICK-интерполянтами с TVD-ограничителем «compressive minmod» (только для  $U$  и  $V$ ) и с SM-схемой (для  $f$ ) [5, 6]:

$$\begin{aligned}
f_{i-1/2,j}^R &= f_{i,j} - \left[ \frac{1}{8} \delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + \frac{3}{8} \delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right], \quad f_{i+1/2,j}^L = f_{i,j} + \left[ \frac{3}{8} \delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R + \frac{1}{8} \delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L \right], \\
\delta \tilde{f}_{i-1/2,j}^L &= \min \text{ mod} \left\{ (f_{i,j} - f_{i-1,j}), 4(f_{i+1,j} - f_{i,j}) \right\}, \\
\delta \tilde{f}_{i+1/2,j}^R &= \min \text{ mod} \left\{ (f_{i+1,j} - f_{i,j}), 4(f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right\}, \\
\delta f_{i,j} &= \min \text{ mod} \left\{ 2 \min \text{ mod} \left[ (f_{i-1/2,j}^R - f_{i-1/2,j}^L), (f_{i+1/2,j}^R - f_{i+1/2,j}^L) \right], \right. \\
&\quad \left. \min \text{ mod} \left[ (f_{i+1,j} - f_{i+1/2,j}^L), (f_{i-1/2,j}^R - f_{i-1,j}) \right] \right\}, \\
\tilde{f}_{i-1/2,j}^R &= f_{i-1/2,j}^R + \delta f_{i,j}, \quad \tilde{f}_{i+1/2,j}^L = f_{i+1/2,j}^L - \delta f_{i+1,j};
\end{aligned} \tag{10}$$

– комбинация выражений против и по потоку в схеме донор–акцептор (использованная в первоначально предложенном VOF-методе [1])

$$\begin{aligned}
F_{i+1/2,j}^x &= \text{sgn}(U_{i+1/2,j}) \frac{\Delta y_j}{\Delta t} \min \left\{ f_D \Delta x_D, f_{AD} |U_{i+1/2,j}| \Delta t + \right. \\
&\quad \left. + \max \left[ 0, 0, (1 - f_{AD}) |U_{i+1/2,j}| \Delta t - (1 - f_D) \Delta x_D \right] \right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

где значение  $f_{AD}$  определяется в зависимости от средней ориентации поверхности раздела в ячейке, частично заполненной обеими текучими средами ( $0 < f < 1$ ):

$$\begin{aligned}
f_{AD} &= f_D, \quad \text{если } \left\{ |dY/dx|_D < |dX/dy|_D \text{ и } f_A \neq 0 \text{ и } f_{DD} \neq 0 \right\}, \\
f_{AD} &= f_A, \quad \text{если } \left\{ |dY/dx|_A > |dX/dy|_A \text{ или } f_A = 0 \text{ или } f_{DD} = 0 \right\},
\end{aligned}$$

а значения, соответствующие донору и акцептору, задаются как:

$$\begin{aligned}
f_D &= f_{i+1,j}, \quad f_A = f_{i,j}, \quad f_{DD} = f_{i+2,j}, \quad \Delta x_D = \Delta x_{i+1} \quad \text{при } U_{i+1/2,j} \leq 0, \\
f_D &= f_{i,j}, \quad f_A = f_{i+1,j}, \quad f_{DD} = f_{i-1,j}, \quad \Delta x_D = \Delta x_i \quad \text{при } U_{i+1/2,j} \geq 0.
\end{aligned}$$

Функции одного переменного  $X(y)$ ,  $Y(x)$  вводятся вместе со своими производными в виде:

$$\begin{aligned}
X_{i,j} &= f_{i-1,j} \Delta x_{i-1} + f_{i,j} \Delta x_i + f_{i+1,j} \Delta x_{i+1}, \quad Y_{i,j} = f_{i,j-1} \Delta y_{j-1} + f_{i,j} \Delta y_j + f_{i,j+1} \Delta y_{j+1}, \\
\left( \frac{dX}{dy} \right)_{i,j} &= \frac{2(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})}{\Delta y_{j+1} + 2\Delta y_j + \Delta y_{j-1}}, \quad \left( \frac{dY}{dx} \right)_{i,j} = \frac{2(Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})}{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}
\end{aligned}$$

для определения наклона поверхности раздела в ячейке  $(x_i, y_j)$ . Если  $|dY/dx| < |dX/dy|$ , то поверхность ближе к горизонтали, чем к вертикали, а в противном случае — ближе к вертикали. Следовательно, получается [1, 2] подходящая комбинация выражений против и по потоку для членов адвекции, обеспечивающая устойчивость и минимизирующая диффузию.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ И СХЕМ К ЗАДАЧЕ О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ

Сформулированные выше численные методы применены при расчетах течения, возникающего после разрушения плотины [7] и являющегося классической задачей гидродинамики свободной поверхности. Это течение выбиралось в качестве тестовой задачи также и в других численных исследованиях [1, 3–5]. Начальное состояние внезапного коллапса прямоугольного столба воды схематично показано на рис. 1.

Условия вычислений соответствуют первому тестируемому варианту в [4]:

$$H = W = 0,05715 \text{ м}, \quad g = 9,80665 \text{ м/с}^2, \quad \rho = 998 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 1,19 \text{ кг/м}^3, \\ \eta = 0,99 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}, \quad \eta = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}.$$

Задача также исследовалась в [1, 3, 5] при различных начальных размерах прямоугольной плотины ( $H = 2W$  [1, 5],  $H = 4W = 0,1143 \text{ м}$  [3],  $H = W = 0,1143 \text{ м}$  [4]). Все переменные обезразмерены при использовании следующих характерных величин:

$$L_r = W, \quad U_r = \sqrt{gW}, \quad t_r = \sqrt{W/g}, \quad \rho_r = \rho_1, \quad \eta_r = \eta_1,$$

что приводит к характерному числу Рейнольдса  $Re_r = \frac{\rho_r U_r L_r}{\eta_r} = 43130$ . Начальные условия задаются как:

$$U(x, y, 0) = V(x, y, 0) = f(x, y, 0) = 0, \quad p(x, y, 0) = \rho_2 g (H - y),$$

за исключением столба воды ( $0 < x < W, 0 < y < H$ ), где

$$p(x, y, 0) = \rho_1 g (H - y), \quad f(x, y, 0) = 1,$$

и тонких переходных областей между воздухом и водой ( $0 < x < W, y = H$  и  $x = W, 0 < y < H$ ), где

$$f(x, y, 0) = 0,5.$$

Все граничные поверхности рассматриваются как твердые стенки (в закрытом контейнере). Для левой и нижней стенок, покрытых водой и воздухом, это приближение является точным, тогда как для правой и верхней границ, покрытых воздухом, оно некорректно (последние границы являются открытыми в [7]). Однако плотность воды много больше плотности воздуха, поэтому условия на верхней и правой границах не имеют существенного влияния на движение воды [4]. Как и в [4–6], граничные условия для давления получаются из уравнения компоненты скорости, направленной по нормали к границе, и при этом используются, как и в [1], виртуальные значения в фиктивных узлах, окружающих сетку. Объемная

фракция на стенках экстраполируется из внутренней области течения [4–6], тогда как скорость по нормали к границам задается равной нулю. Отдельное обсуждение относительно пристеночных условий для скорости, направленной вдоль границ, приводится ниже.

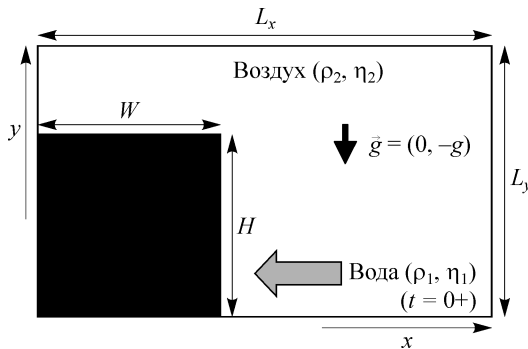


Рис. 1. Схема проблемы разрушения плотины (начальное состояние).



#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Основные этапы проведенных численных исследований перечислены в таблице и обсуждаются ниже.

В соответствии с предшествующей работой [4], вычислительная область располагается от  $x = 0$  до  $x = L_x = 5W$  (см. рис. 1), а нижняя граница устанавливается при  $y = 0$ . Положение верхней границы  $L_y$  оптимизировано так, чтобы его влияние на точность вычислений было несущественным. Это достигается путем последовательных расчетов, использующих различные  $L_y$  и соответствующие им удвоенные  $2L_y$  значения, и проверки критерия точности

$$\chi_n^\phi \equiv \left| \frac{\phi^{(1)}(t^n) - \phi^{(2)}(t^n)}{\phi_{\max}^{(2)} - \phi_{\min}^{(2)}} \right| \leq \chi_0^\phi$$

для основных характеристик течения  $\phi = \{x_f, y_f\}$ , а именно, положения переднего фронта течения  $x_f$  (при  $y = 0$ ), высоты столба воды  $y_f$  (при  $x = 0$ ). Величины  $\phi_n^{(1)}$  и  $\phi_n^{(2)}$  (здесь и ниже в настоящей работе) относятся к более грубым и более точным расчетам соответственно. Различие между  $\phi_n^{(1)}$  и  $\phi_n^{(2)}$  почти незаметно, если они удовлетворяют этому критерию с достаточной точностью  $\chi_0^\phi < 2\%$ . Кроме того, в качестве второго критерия точности, для исключения появления нереалистичных особенностей в результатах вычислений, проверяются изолинии объемной фракции воды, приводимые при  $f = 0,01$  (эффективная верхняя граница

Таблица  
Этапы численного исследования, перечисленные как варианты 1–25

Вариант	$L_y/H$	$C_\Delta$	$C_\delta$	$(C_{\Delta r} t_0)$	$\Delta x/H$	Граничные условия	Адвективная схема	$Re_r$
1	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
2	<b>2,80</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
3	<b>1,10</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
4	<b>2,20</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
5	<b>1,20</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
6	<b>1,30</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
7	<b>1,50</b>	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
8	1,40	<b>0,020</b>	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
9	1,40	<b>0,005</b>	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
10	1,40	0,010	<b>0</b>	<b>(1,0,0,00)</b>	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
11	1,40	0,010	1	<b>(1,0,0,00)</b>	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
12	1,40	0,010	1	<b>(0,2,0,25)</b>	0,0250	no-slip	c4minmod	43130
13	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,0500</b>	no-slip	c4minmod	43130
14	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,0125</b>	no-slip	c4minmod	43130
15	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,00625</b>	no-slip	c4minmod	43130
16	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	<b>ZNG</b>	c4minmod	43130
17	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,0125</b>	<b>ZNG</b>	c4minmod	43130
18	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,00625</b>	<b>ZNG</b>	c4minmod	43130
19	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	<b>upwind</b>	43130
20	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	<b>QUICK</b>	43130
21	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	<b>c4mm+SMF</b>	43130
22	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	<b>c4mm+VOF</b>	43130
23	1,40	0,0025	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	<b>c4mm+VOF</b>	43130
24	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	0,0250	no-slip	c4minmod	<b>121990</b>
25	1,40	0,010	1	(0,1,0,50)	<b>0,0125</b>	no-slip	c4minmod	<b>121990</b>

поверхности раздела воздух–вода),  $f = 0,50$  (положение свободной поверхности),  $f = 0,99$  (эффективная нижняя граница поверхности раздела воздух–вода). Отметим, что последний критерий является более точным, чем для изолиний в [2] (использующих  $f = 0,025$  и  $0,975$  для уровней эффективных границ поверхности раздела), в [5, 6] ( $f = 0,1$  и  $0,9$ ) и в [4] ( $f = 0,45$  и  $0,55$ ). В [1, 3] было показано только положение свободной поверхности без границ поверхности раздела.

#### 4.1. Исследования численного решения на независимость от параметров сетки и шага по времени

Максимальные значения нормализованных погрешностей ( $\chi_{\max}^{x_f} = 0,14\%$ ,  $\chi_{\max}^{y_f} = 0,24\%$ ) являются малыми для базового расчета варианта 1 ( $L_y = 1,4H$ ) относительно расчета варианта 2 (с удвоением  $L_y = 2,8H$ ), приведенных в таблице. Большие значения  $L_y$  расходуют излишние компьютерные ресурсы, тогда как меньшие — не удовлетворяют разумному «двухпроцентному» критерию или критерию «реалистичных изолиний» (рис. 2). Например, в [1] для другого условия  $H = 2W$  начального состояния плотины использовалось меньшее значение  $L_y = 1,1H$ , но здесь это значение не выбрано для базового расчета, поскольку для вариантов 3 и 4 получаются (см. рис. 2, c) большие нормализованные погрешности  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,71\%, 2,07\%)$ . Кроме того, можно видеть (см. рис. 2, a, b), что начальное возмущение, генерируемое углом плотины на верхней границе поверхности раздела, не затухает при  $L_y < 1,4H$ . Поэтому значения высоты расчетной области  $L_y = 1,2H$  (взятое в [5] для  $H = 2W$ ),  $L_y = 1,25H$  (в [4] для  $H = W$ ) и  $L_y = 1,3H$  (в [3] для  $H = 4W$ ) здесь не принимаются.

Подобный анализ погрешностей для шага по времени (варианты 8–12 в таблице) приводит к коэффициенту  $C_{\Delta t} = 0,01$  с дополнительным уменьшением временного шага в начальной стадии расчета. Максимальные отклонения малы как для вариантов 8 и 1 (где  $C_{\Delta t} = 0,02$  и  $0,01$ ),  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,69\%, 0,82\%)$ , так и для вариантов 1 и 9 (где  $C_{\Delta t} = 0,01$  и  $0,005$ ),  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,38\%, 0,22\%)$ . Однако в описании нижней границы поверхности раздела наблюдаются некоторые недостатки при большем значении коэффициента временного шага  $C_{\Delta t} = 0,02$  (рис. 3, a) или при недостаточном демпфировании шага по времени в начальной стадии вычислений (соответствующие результаты для вариантов 10–12 похожи на их аналоги из рис. 3, a и здесь не показаны). Малую величину коэффициента временного шага  $C_{\Delta t} = 0,01$  по сравнению с единицей можно объяснить коррекцией алгоритма решения для течения постоянной плотности с учетом переменной плотности. Значения давления и скорости вычисляются одновременно для каждой итерации на одном шаге по времени, а объемная фракция и плотность находятся один раз в течение шага по времени и не подправляются на каждой внутренней итерации.

Независимость решения от сетки проверяется при помощи последовательных расчетов с уменьшающимися вдвое значениями шага равномерной сетки  $\delta = \Delta x = \Delta y$  ( $0,05H$ ,  $0,025H$  и т. д.). При измельчении сетки от  $\delta = H/40$  до  $\delta = H/80$  нет существенного улучшения (см. рис. 2, a, 3, b), кроме уменьшения в два раза характерной толщины поверхности раздела (определяемой как расстояние

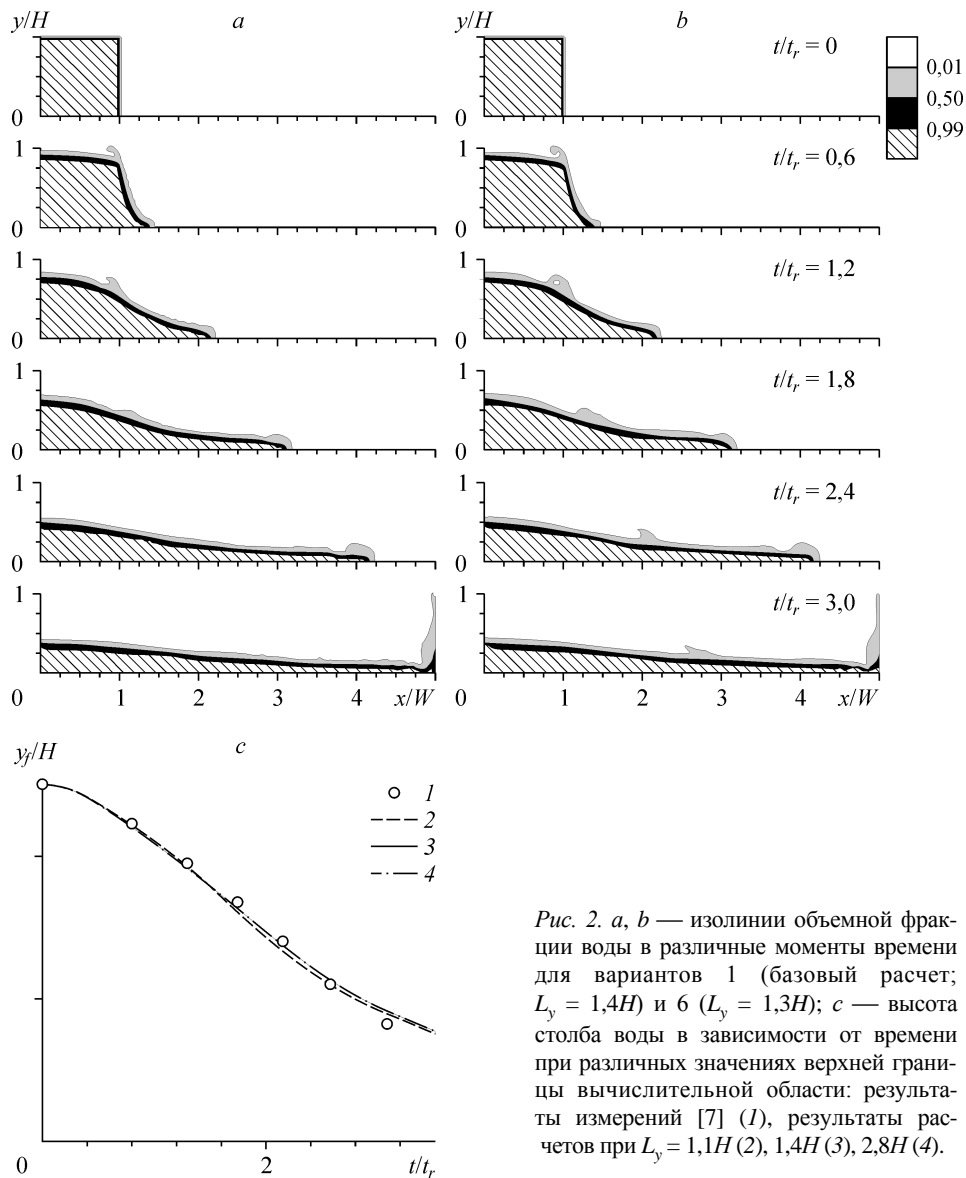


Рис. 2. *a, b* — изолинии объемной фракции воды в различные моменты времени для вариантов 1 (базовый расчет;  $L_y = 1,4H$ ) и 6 ( $L_y = 1,3H$ ); *c* — высота столба воды в зависимости от времени при различных значениях верхней границы вычислительной области: результаты измерений [7] (1), результаты расчетов при  $L_y = 1,1H$  (2),  $1,4H$  (3),  $2,8H$  (4).

между верхней и нижней границами поверхности раздела). Отметим, что становится заметным рост начального возмущения угла плотины, а поверхность раздела меньшей толщины, полученная в расчетах на более мелкой сетке (с меньшей численной диффузией), в большие моменты времени является более неустойчивой и неровной в некоторой окрестности переднего фронта течения (где значения скорости наибольшие) (см. рис. 3, *b*). Эти особенности могут быть связаны с появлением турбулентных пульсаций при рассматриваемом числе Рейнольдса  $Re_r = 43130$ . Интегральные характеристики для сеток с  $\delta = H/40$  и  $H/80$  оказываются довольно близкими, где  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (1,91\%, 0,91\%)$ , тогда как при сопоставлении расчетов с  $\delta = H/20$  и  $H/40$  получаются неприемлемые отклонения  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (2,85\%, 0,66\%)$  (см. рис. 3, *c*). Поэтому сетка  $201 \times 57$ , где  $\delta = 0,025H$ , использована для базового расчета.

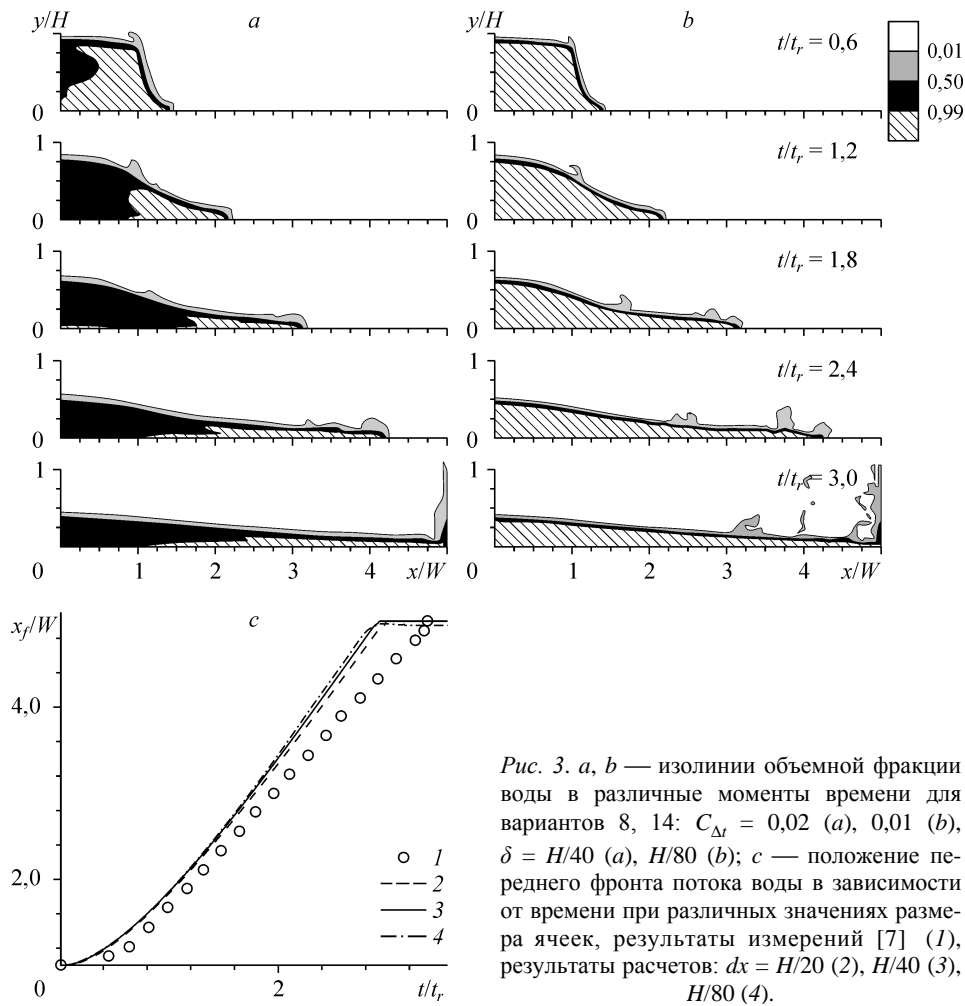


Рис. 3. *a, b* — изолинии объемной фракции воды в различные моменты времени для вариантов 8, 14:  $C_{\Delta t} = 0,02$  (*a*),  $0,01$  (*b*),  $\delta = H/40$  (*a*),  $H/80$  (*b*); *c* — положение переднего фронта потока воды в зависимости от времени при различных значениях размера ячеек, результаты измерений [7] (1), результаты расчетов:  $\delta x = H/20$  (2),  $H/40$  (3),  $H/80$  (4).

#### 4.2. Замечания о различных граничных условиях на стенке

Отдельное исследование выполнено относительно пристеночных граничных условий для касательной компоненты вектора скорости. Используются два типа условий. Условия прилипания (no-slip) соответствуют нулевой касательной скорости на границе. Аббревиатура ZNG (Zero Normal Gradient), использованная в таблице для вариантов 16–18, означает нулевой градиент по нормали к границе для касательной скорости, экстраполируемой из внутренней области течения. В предшествующих работах [3, 4] по численному решению задачи разрушения плотины условия прилипания применялись для границ в виде твердых стенок, тогда как в [5] все границы трактовались как невязкие стенки, на которых компоненты касательной скорости экстраполируются из внутренней области течения. В [1] неясно задание граничных условий в задаче разрушения плотины, однако использование граничных условий в виде твердых стенок со свободным проскальзыванием упомянуто для близкой физической задачи об уединенной волне (undular bore). ZNG-вариант также соответствует условиям симметрии для обеих вертикальных стенок в исследованиях неустойчивости Рэля–Тейлора [4–6].

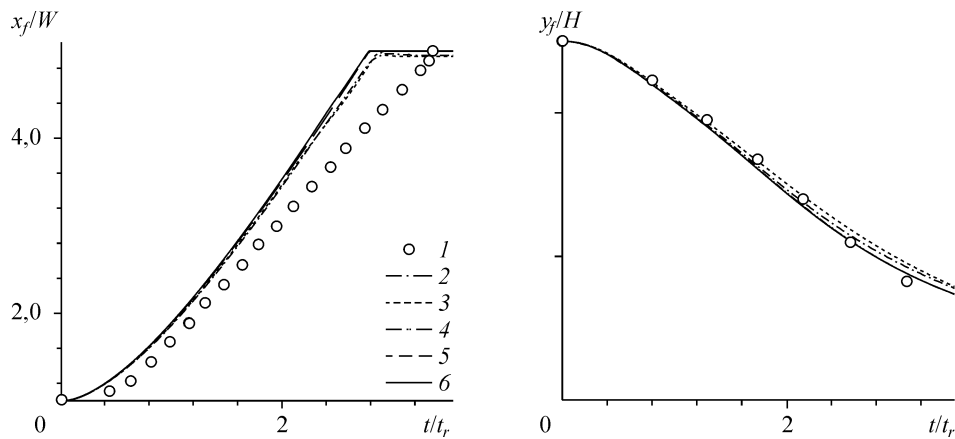
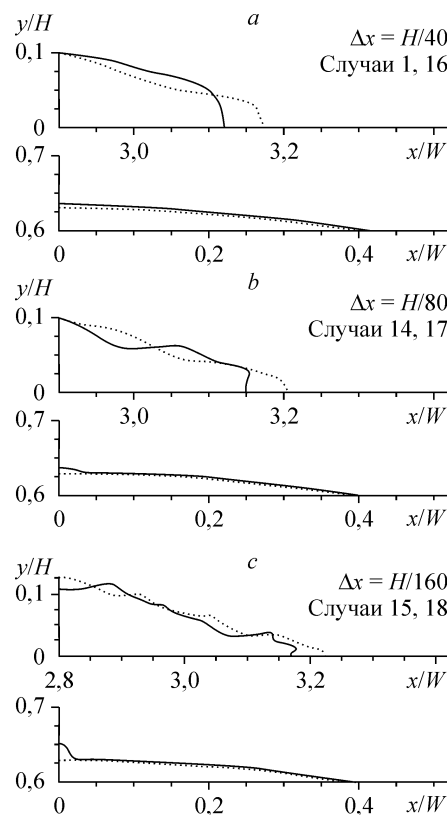


Рис. 4. Высота столба воды и положение переднего фронта в зависимости от времени при различных граничных условиях, результаты измерений [7] (1), результаты расчетов:  $\delta = H/80$  (2, 6),  $H/160$  (3, 5),  $H/40$  (4), граничные условия — no-slip (2, 3), ZNG (4, 5, 6).

В настоящей работе применение граничных условий прилипания дает меньшие значения  $x_f$  и завышает  $y_f$  в большие моменты времени (рис. 4). Такое завышение, также наблюдавшееся в [4], усиливается на более мелкой сетке с увеличением отклонений  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,91\%, 2,64\%)$  между вариантами 14 и 15 (где  $\delta = H/80$  и  $H/160$ ). Это вызвано некоторой задержкой пристеночного движения воды из-за нулевой скорости на стенке (рис. 5). Такая задержка и искажение свободной поверхности не зафиксированы на фотографиях переднего фронта, но могут быть видны для точек столба воды вблизи вертикальной стенки (при  $x = 0$ ) [7]. Отметим, что ZNG дает лучшие результаты по независимому от сетки решению, где  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (1,84\%, 0,34\%)$  для вариантов 16 и 17, соответствующих измельчению сетки с  $\delta = H/40$  и  $H/80$ , и  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (1,07\%, 0,15\%)$  для вариантов 17 и 18 (с  $\delta = H/80$  и  $H/160$ ). Можно также заметить более близкое согласование значений, вычисленных при помощи ZNG-условий, и измеренных значений функции  $y_f(t)$  (определенной в [7] лишь как высота остаточного столба воды) в большие моменты времени. Вероятно, величину  $y_f$  можно трактовать как высоту свободной поверхности не на самой вертикальной стенке, а на

Рис. 5. Свободная поверхность ( $f = 0,5$ ) при  $t/t_r = 1,8$  для вариантов с граничными условиями прилипания (сплошные линии) и ZNG (пунктир).



некотором расстоянии от нее (скажем, при  $x/W \sim 0,1$ ), где поверхность раздела вода–воздух еще не чувствует эффекта близости к стенке. Тогда одинаково хорошие результаты для  $y_f$  будут получаться при использовании и условий прилипания и ZNG-условий.

Эти исследования показывают, что точное предсказание эффекта прилипания к стенке требует очень мелкой сетки рядом с границами и дополнительной информации о движении жидкости в непосредственной близости от поверхности. Теоретические соображения [11] формируют сложную картину распространения жидкости вдоль твердых поверхностей. Одно из наблюдений заключается в следующем. Когда жидкость моделируется как ньютонова и несжимаемая, применение граничного условия прилипания на твердой поверхности приводит к сингулярности на контактной линии, т. е. к несправедливости непрерывного распределения приближенных решений в этой области. Тщательный анализ замещения одной жидкости другой вблизи движущейся контактной линии (на пересечении двух текучих несмешивающихся сред и твердой поверхности) до молекулярного уровня показывает также, что пристеночные частицы жидкости могут иметь движения качения вместо скольжения. Таким образом, некоторые исследователи предложили граничные условия проскальзывания, основанные на движениях молекул на поверхности газ-жидкость. Однако такие условия могут вводить неизвестные параметры (такие как динамический контактный угол, длина скольжения и т. д.) и, следовательно, являются неуниверсальными и неудобными для приложений.

#### 4.3. Применение различных схем для членов адвекции

Следующая серия расчетов выполнена с использованием различных схем для адвекции (рис. 6, 7). Вариант 19 (upwind, см. табл.) включает противопоточную схему (7) первого порядка для аппроксимации потоков в уравнениях для  $U$ ,  $V$ ,  $f$ . Варианты 20 (QUICK, см. табл.) и 1–18 (c4minmod, см. табл.) используют, соответственно, QUICK-схему (8) без ограничителей и эту же схему с ограничителями compressive minmod (9) в уравнениях для  $U$ ,  $V$ ,  $f$ . Вариант 21 (c4mm+SMF, см. табл.) соответствует TVD-MUSCL-схеме (9) только в уравнениях скорости и модификации наклона (10) в  $f$ -уравнении. В вариантах 22 и 23 (c4mm+VOF, см. табл.) схема (10) заменяется комбинированной VOF-процедурой (11) при тех же выражениях (9) для потоков в уравнениях для  $U$  и  $V$ .

Можно видеть, что противопоточная схема дает нереалистично толстую поверхность раздела (см. рис. 6, *a*) из-за численной диффузии. Схема третьего порядка QUICK способна уменьшить вычисляемую толщину поверхности раздела газ-жидкость, однако изолинии объемной фракции получают со значительными искажениями (см. рис. 6, *b*) из-за особенностей схемы, связанных с ложными осцилляциями. QUICK-схема с TVD-ограничителями (см. рис. 2, *a*) сглаживает эти искажения при помощи оператора compressive minmod, а модификация наклона (см. рис. 6, *c*) сжимает поверхность раздела еще сильнее, до размера нескольких ячеек. VOF-метод дает наиболее резкую свободную поверхность (см. рис. 6, *d*). Отметим некоторое искажение изолиний объемной фракции, заметное в большие моменты времени как для SMF-, так и для VOF-подхода, а также появление ложных образований в виде «плавающих осколков» в случае VOF, как и в [2]. С другой стороны, искажение свободной поверхности (средняя изолиния при  $f = 0,5$ ) может быть вызвано физическими процессами (обсуждаемыми ниже), и метод можно использовать с некоторыми ограничениями для описания основных особенностей реальной проблемы. В частности, при использовании в VOF-методе выбранного ранее коэффициента  $C_{\Delta t} = 0,01$  для шага по времени получается

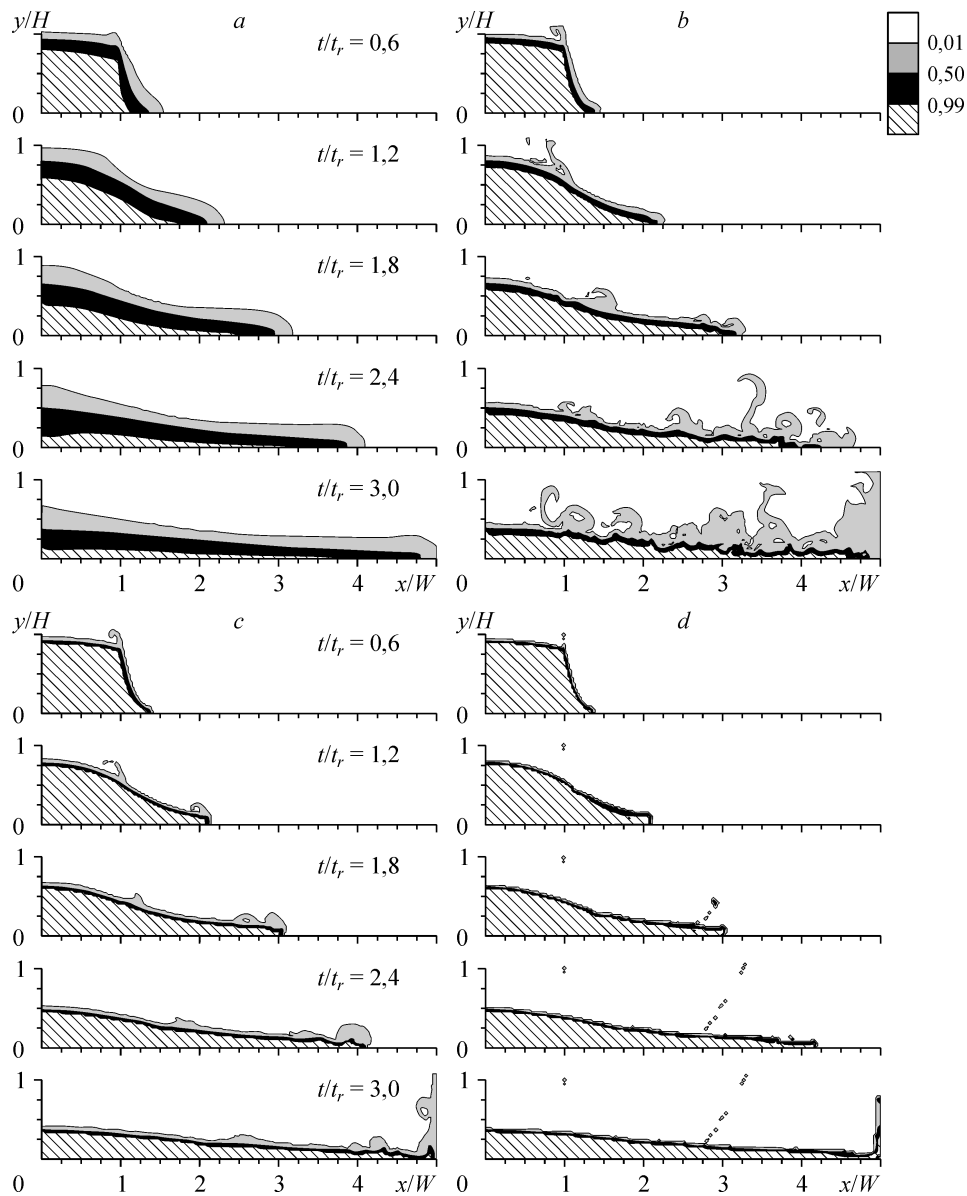


Рис. 6. Изолинии объемной фракции воды в различные моменты времени для вариантов: 19 (противопоточная схема, *a*), 20 (QUICK, *b*), 21 (c4mm+SMF, *c*), 23 (c4mm+VOF,  $C_{\Delta t} = 0,0025$ , *d*).

большое количество «плавающих осколков» в течении воды между дном и нижней границей поверхности раздела, но этого можно избежать при меньшем шаге по времени (см. рис. 6, *d*). Кроме того, более близкие уровни эффективных границ поверхности раздела ( $f = 0,33$  и  $0,67$ ) при использовании того же метода с  $C_{\Delta t} = 0,01$  дают вполне реалистичное воспроизведение (без ложных образований) эволюции в задаче разрушения плотины.

Сравнение результатов для интегральных характеристик, полученных при помощи различных схем, показывает (см. рис. 7) приблизительное совпадение функций  $x_f(t)$  и  $y_f(t)$  для всех схем, кроме противоположной. Также видно

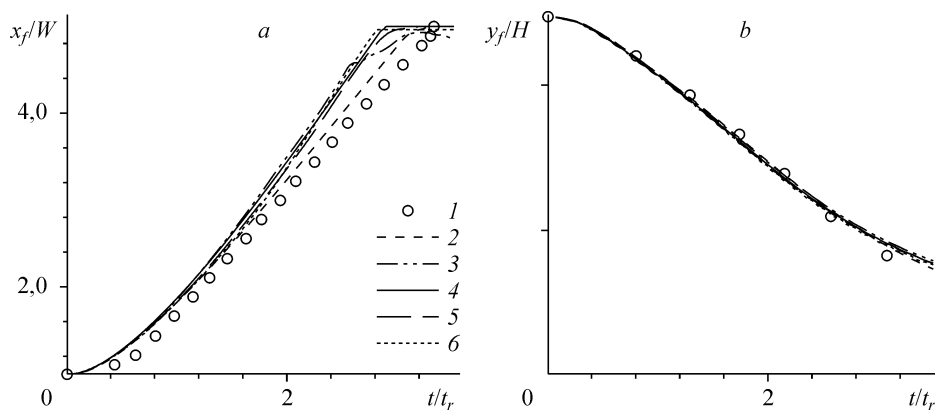


Рис. 7. Высота столба воды и положение переднего фронта в зависимости от времени для различных схем адвекции, результаты измерений [7] (1), результаты расчетов: urwind (2), QUICK (3), c4minmod (4), c4mm-SMF (5), c4mm-VOF (6).

нарушение работоспособности QUICK-схемы при  $t > 2,5t_r$  из-за усиления ложных осцилляций в большие моменты времени (см. рис. 6, *b*). Небольшое отставание экспериментальных данных от вычисленных при  $t < 2t_r$  (см. рис. 7) можно объяснить условиями измерений [7]. В экспериментах исходный столб воды ограничивался очень тонкой диафрагмой из папиросной бумаги, и сильный ток из автомобильных батарей использовался для того, чтобы удалить эту бумагу и, таким образом, инициировать начало движения. Значение  $t = 0$  было взято как время воздействия сильного тока, а движение воды начиналось с некоторой малой незафиксированной задержкой в интервале по времени  $0 < t < 0,2t_r$  [7].

Причина роста завывшения  $x_f$  при  $t > 2t_r$  (наблюдавшегося также в [4]) для всех схем, кроме противопоточной, не является столь очевидной. Противопоточная схема имеет сильную численную диффузию, которая размывает поверхность раздела (см. рис. 6, *a*) и, в дополнение к молекулярной вязкости, уменьшает ускорение коллапсирующего столба жидкости (рис. 7, *a*). Размывание средней поверхности раздела (с точки зрения осреднения по ансамблю реализаций) может, в самом деле, происходить в большие моменты времени вследствие турбулентной диффузии, а развивающаяся активность турбулентности может не способствовать ускорению образованного при разрушении плотины течения. Имеются некоторые указания на турбулентное движение в виде нерегулярных волнообразных поверхностей, возникающих в большие моменты времени в расчетах с меньшей численной вязкостью: на более мелкой сетке (см. рис. 3, *b*) или при использовании SMF- и VOF-схем (см. рис. 6, *c*, *d*). Следовательно, трехмерное (3D) прямое численное моделирование (DNS) может дать более точные результаты (слабый эффект улучшения показан в [4] для 3D-расчетов на грубой сетке). Кроме того, как альтернатива трехмерным DNS или LES, может быть использован 2D-расчет с осреднением по ансамблю реализаций и моделированием турбулентности. Проблема последнего подхода состоит в конструировании подходящей модели для областей перехода и реламинаризации. Корректная постановка граничных условий и более точное определение  $y_f$  в [7] (как отмечено выше) могут также помочь улучшить результаты численного моделирования.



#### 4.4. Влияние вязких членов

В заключение представлены результаты (рис. 8), полученные при  $Re_r = 121990$  (т. е. при  $H = W = 0,1143$  м). Данные по  $y_f$  доступны только для  $Re_r = 43130$  [7], тогда как из данных по  $x_f$ , имеющихся для обоих случаев, можно видеть большие значения положения переднего фронта течения для более высокого числа Рейнольдса при  $t > 2t_r$ . Сопоставление результатов вычислений показывает, что этот эффект числа Рейнольдса слабо воспроизводится (см. рис. 8, *a*), т. е. влияние вязких членов в вычислениях получается малым, но в правильном направлении. Кроме того, согласие расчетных линий и данных измерений получается лучше для более высокого числа Рейнольдса. Те же наблюдения отмечены в [4]. Исследования независимости решения от сетки дают для первого критерия результат, похожий на критерий для вариантов 1 и 14: а именно, довольно близкие результаты с  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (1,95\%, 0,46\%)$  для вариантов 24 и 25 (где  $\delta = H/40$  и  $H/80$ ). Однако вычисления при более высоком числе Рейнольдса демонстрируют более неустойчивое поведение (см. рис. 8, *a, b*), чем для более низкого числа (см. рис. 2, *b, 3, b*).

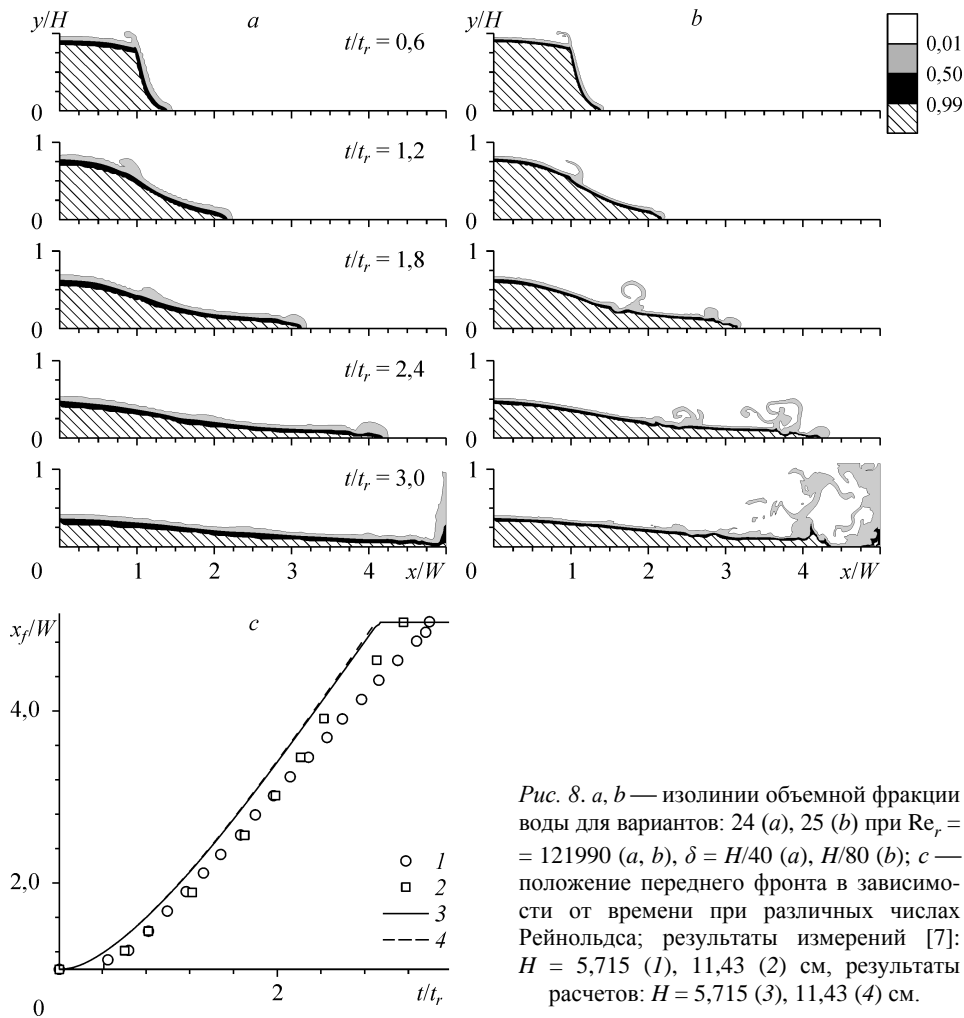


Рис. 8. *a, b* — изолинии объемной фракции воды для вариантов: 24 (*a*), 25 (*b*) при  $Re_r = 121990$  (*a, b*),  $\delta = H/40$  (*a*),  $H/80$  (*b*); *c* — положение переднего фронта в зависимости от времени при различных числах Рейнольдса; результаты измерений [7]:  $H = 5,715$  (1), 11,43 (2) см, результаты расчетов:  $H = 5,715$  (3), 11,43 (4) см.

Вязкие члены в (2)–(3), с учетом (1), можно записать в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \frac{\partial U}{\partial y} \right], \quad (12)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \frac{\partial V}{\partial y} \right] \quad (13)$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \cong \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \right], \quad (14)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \cong \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial V}{\partial y} \right] \quad (15)$$

в предположении несущественного влияния градиентов вязкости, существующих только на поверхности раздела. Вычисления подтверждают возможность такой замены при рассматриваемых числах Рейнольдса  $Re_r \geq 43130$ . В частности, если в базовом варианте 1 подставить приближенные выражения (12)–(13) вместо исходных в уравнения (2)–(3), то различие этих расчетов будет ничтожно мало с  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,02 \%, 0,03 \%)$ , тогда как использование (14)–(15) приводит к погрешности  $\chi_{\max}^{(x_f, y_f)} = (0,17 \%, 0,15 \%)$  по сравнению с вариантом 1. Это подтверждает слабое влияние вязких членов и позволяет применять оба упрощения (12)–(13) и (14)–(15) при немалых числах Рейнольдса.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Путем численных экспериментов для задачи о течении при разрушении плотины выполнен сравнительный анализ различных схем для аппроксимации потоков (членов адвекции) в уравнениях для скорости и объемной фракции. Проведенные расчеты сопровождались тщательными исследованиями по получению независимого от параметров сетки и шага по времени решения с использованием нормализованных погрешностей основных характеристик течения. Показано, что реалистичные результаты могут быть достигнуты не только за счет использования измельченных сеток или более точных и надежных схем, но и путем модификации пристеночных условий, особенно для области вокруг движущихся контактных линий. Результаты будут полезны для дальнейшего развития методов разрешения поверхностей раздела и численного описания поля течений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comp. Phys. — 1981. — Vol. 39. — P. 201–225.
2. Rudman M. Volume-tracking method for interfacial flow calculations // Inter. J. for Numerical Methods in Fluids. — 1997. — Vol. 24. — P. 671–691.
3. Yeh C.-L. Numerical investigation of liquid jet emanating from plain-orifice atomizers with chambered or rounded orifice // JSME Inter. J., Ser. B. — 2004. — Vol. 47, No. 1. — P. 37–47.

4. **Kelecy F.J., Pletcher R.H.** The development of a free surface capturing approach for multidimensional free surface flows in closed containers // J. Comp. Phys. — 1997. — Vol. 138. — P. 939–980.
5. **Chang C.-H.** The development of a multi-fluid surface-capturing method for the computation of incompressible free surface flows. — Ph.D.Thesis. — Tainan: NCKU, 1998. — 137 p.
6. **Pan D., Chang C.-H.** A free surface capturing method for incompressible multi-fluid flows // Proc. of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engng Conf. — 1999. — FEDSM99-7105. — P. 1–6.
7. **Martin J.C., Moyce W.J.** An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser. A. — 1952. — Vol. 224. — P. 312–324.
8. **Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н.** Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1966. — С. 186–192.
9. **Viccelli J.A.** A computing method for incompressible flows bounded by moving walls // J. Comp. Phys. — 1952. — Vol. 8. — P. 119–143.
10. **Курбацкий А.Ф., Яковенко С.Н.** Численное исследование турбулентного течения вокруг двумерного препятствия в пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 145–163.
11. **Dussan E.B.V.** On the spreading of liquids on solid surfaces: Static and dynamic contact lines // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1979. — Vol. 11. — P. 371–400.

*Статья поступила в редакцию 3 сентября 2007 г.*