

Далее, по теории [4] на экваторе должно образовываться кольцо из жидкости. С увеличением скорости вращения между кольцом и шаром должен появляться постепенно сужающийся перешеек, после чего произойдет отрыв кольца от шара и в дальнейшем разрыв кольца на отдельные части.

Эксперимент показал, что жидкость под действием сил центробежного поля вращающегося шара стягивается к экватору, но уже в процессе формирования шнура начинает собираться в отдельные капли. Возможно, образование капель можно объяснить теорией [5] о неустойчивости столба жидкости. При формировании шнура на экваторе жидкость совершает вихревое движение, возникающее из-за малых возмущений, создаваемых трением жидкости о поверхность шара и окружающий воздух, что приводит к ее неустойчивости и образованию отдельных капель.

Поступила 5 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Понизовский В. М. Генератор для магнитной подвески ферромагнитных роторов ПТЭ, 1965, № 5.
2. Beams J. W., Boyle R. D., Hexner P. E. Magnetically suspended equilibrium ultracentrifuge. — «Rev. Scient. Instrum.», 1961, vol. 32.
3. Понизовский В. М., Ошканова Г. С. Фотоэлектрический датчик для измерения больших скоростей вращения. — В кн.: Радиоспектроскопия. Пермь, 1974 (Межвузовский сб. № 8).
4. Маурин Л. Н. О равновесии жидкой пленки на вращающейся сфере. — ПММ, 1969, т. 33, № 1.
5. Рэлея. Теория звука. Т. 2. М.—Л., ОГИЗ, 1944.

УДК 541.124 : 532.5

О СТРУКТУРЕ ПОЛНОСТЬЮ ДИСПЕРГИРОВАННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СМЕСЯХ

А. Л. Ни, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются ударные волны в химически активных газовых смесях с произвольным числом реакций. Предполагается, что разность между замороженной и равновесной скоростями звука, вычисленная по невозмущенному состоянию вещества и отнесенная к одной из этих скоростей, представляет собой малую величину. Скорость потока на бесконечности считается заключенной в диапазоне между замороженной и равновесной скоростями звука; ударная волна не содержит тогда разрывов, т. е. обладает полной дисперсией. Последовательно изучаются различные случаи, которые могут встретиться при увеличении скорости набегающего потока. Для построения решения используется метод сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений.

1. Формулировка задачи. Для изучения структуры слабых ударных волн в многокомпонентных релаксирующих смесях применим систему уравнений, которая описывает одномерный стационарный поток в трансзвуковом диапазоне скоростей

$$(1.1) \quad 2(\varepsilon m_{\infty} v' + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{dv'}{dx'} = \delta_a^2 e_2' \frac{dq_2'}{dx'}, \quad \delta_a^2 = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2} \varepsilon_a^2,$$

$$\frac{dq_2'}{dx'} = -\mathbf{E} \omega_2', \quad \omega_2' = \mathbf{D} q_2' + e_2' v'.$$

Как длина вдоль координаты x' , так и скорость v' возмущенного движения частиц вместе в компонентами векторов $q_2' = (q_{21}', \dots, q_{2N}')$ и $\omega_2' = (\omega_{21}', \dots, \omega_{2N}')$ полноты и сродства химических реакций берутся здесь в специальной безразмерной системе единиц. Буквами ρ , p и m обозначены соответственно плотность, давление и безразмерный термодинамический коэффициент, пропорциональный кривизне адиабаты Пуассона для смеси с постоянным составом. Индекс ∞ относится к состоянию вещества в набегающем равномерном потоке. Малый параметр ε пропорционален амплитуде возмущений, появление другого малого параметра ε_a^2 диктуется условиями для обеспечения близости замороженной $a_{f\infty}$ и равновесной $a_{e\infty}$ скоростей звука в невозмущенном состоянии. При выводе уравнений (1.1) предполагалось, что скорость v_{∞} набегающего потока несильно отклоняется от обеих названных скоростей звука; число γ_f используется для задания этого отклонения

$$(1.2) \quad v_{\infty}' - a_{f\infty}' = \varepsilon_a^2 \gamma_f v_{\infty}'.$$

В исходных уравнениях Эйлера в качестве кинетической матрицы и матрицы устойчивости системы могут фигурировать две любые положительно определенные и симметричные матрицы. Линейные преобразования векторов полноты и сродства химических реакций позволяют привести эти матрицы соответственно к единичной \mathbf{E} и диагональной \mathbf{D} матрицам. В системе уравнений (1.1) это преобразование считается выполненным. Компоненты постоянного безразмерного вектора $e_2' = (e_{21}', \dots, e_{2N}')$, пропорциональные адиабатическим производным от удельной внутренней энергии системы по удельному объему и одной из составляющих вектора полноты реакций, также считаются подвергшимися указанным линейным преобразованиям.

Поскольку набегающий поток является равномерным и находится в состоянии полного термодинамического равновесия,

$$(1.3) \quad v' \rightarrow 0, \quad q_2' \rightarrow 0, \quad \frac{dv'}{dx'} \rightarrow \hat{0}, \quad \frac{dq_2'}{dx'} \rightarrow \hat{0} \quad \text{при } x' \rightarrow -\infty.$$

В результате сжатия внутри ударной волны газовая смесь достигает нового равновесного состояния, поэтому

$$(1.4) \quad v' \rightarrow v_0', \quad \frac{dv'}{dx'} \rightarrow 0, \quad \frac{dq_2'}{dx'} \rightarrow 0 \quad \text{при } x' \rightarrow +\infty.$$

Граничные условия (1.3), (1.4) определяют решение с точностью до несущественного сдвига по x' .

Как будет видно в дальнейшем, иногда вместо системы (1.1) удобней оперировать с одним эквивалентным ей уравнением $(N+1)$ -го порядка [1]

$$(1.5) \quad \sum_{k=0}^N \sigma_{N-k} \frac{d^k}{dx'^k} \left[(\varepsilon m_{\infty} v' + \varepsilon_a^2 \gamma^{(k)}) \frac{dv'}{dx'} \right] = 0$$

для возмущенной скорости. Здесь символ σ_l означает сумму всевозможных произведений, которые составлены из положительных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, равных соответственно диагональным элементам $\tilde{a}_{11}, \dots, \tilde{a}_{NN}$ релаксационной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{D} = \mathbf{D}$ и взятых по l в каждом произведении. Параметры $\gamma^{(k)}$ характеризуют отклонения каждой из так называемых промежуточных скоростей звука $\alpha_{k\infty}$ от скорости набегающего потока, именно

$$(1.6) \quad v_\infty - \alpha_{k\infty} = \varepsilon_a^2 \gamma^{(k)} v_\infty.$$

Сами промежуточные скорости звука выражаются формулами

$$(1.7) \quad \alpha_{k\infty} = a_{f\infty} + \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{m=k+1}^N (-1)^{m-k} \frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-k}} \mathbf{e}'_2 \mathbf{D}^{m-k-1} \mathbf{e}'_2$$

и подчиняются неравенствам [2-4]

$$(1.8) \quad a_{e\infty} = \alpha_{0,\infty} < \alpha_{1,\infty} < \dots < \alpha_{N-1,\infty} < \alpha_{N,\infty} = a_{f\infty}.$$

В предельных случаях $k=0$ и $k=N$ получим $\gamma^{(0)} = \gamma_e$ и $\gamma^{(N)} = \gamma_f$. Таким образом, формула (1.6) переходит в (1.2), когда промежуточная скорость звука совпадает со скоростью распространения возмущений в смеси с постоянным химическим составом.

Проинтегрируем первое из уравнений (1.1). Определив произвольную постоянную из граничных условий при $x' \rightarrow -\infty$, имеем

$$(1.9) \quad \varepsilon m_\infty \left(v' + \frac{\varepsilon_a^2 \gamma_f}{\varepsilon m_\infty} \right)^2 - \delta_a^2 \mathbf{e}'_2 \mathbf{Q}'_2 = \frac{\varepsilon_a^4 \gamma_f^2}{\varepsilon m_\infty}.$$

Воспользовавшись граничными условиями при $x' \rightarrow +\infty$ и вытекающей из (1.7) при $k=0$ связью

$$(1.10) \quad a_{e\infty} = a_{f\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{i=1}^N \frac{e_{2i}^{\prime 2}}{\lambda_i}$$

между замороженной и равновесной скоростями звука, находим

$$v'_0 = - \frac{2\varepsilon_a^2 \gamma_e}{\varepsilon m_\infty}.$$

Последнее равенство дает возможность задавать вместо постоянной v'_0 коэффициенты γ_e либо γ_f .

В дальнейшем ради краткости в обозначениях как постоянных, так и переменных величин будем опускать штрихи и индекс 2, который указывает на результат линейного преобразования векторов полноты и средства химических реакций.

2. Общие свойства решения. Задача о внутренней структуре ударных волн принадлежит к числу классических. Исчерпывающий обзор посвященных ей теоретических и экспериментальных исследований, выполненных к 1965 г., содержится в [5, 6]. Основной вывод ранних работ сводится к тому, что существует последовательность располагающихся друг за другом релаксационных зон, если скорости химических реакций значительно отличаются друг от друга. Эти зоны имеют различную ширину, определяемую одним или несколькими релаксационными процессами. Одна из первых попыток дать количественный анализ явления была предприня-

та, по-видимому, в [7]; численные расчеты подтвердили сделанное на основании простых физических рассуждений заключение о том, что ударные волны имеют «полосатую» структуру. Недавно решена задача о нестационарных возмущениях, возбуждаемых в газовой смеси движением плоского поршня [8]. Полученные данные показывают, каким образом происходит расслоение во времени релаксационных зон с различной шириной.

Решения нелинейной системы уравнений (1.1) обладают всеми качественными особенностями, что и решения, построенные в [7] при помощи численных методов. Эти уравнения допускают последовательный анализ, основанный на методе сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. Более того, предположение о близости замороженной и равновесной скоростей звука позволяет выяснить все закономерности, присущие «полосатой» структуре ударной волны. Отметим, что указанное предположение не ведет к большому ограничению, поскольку для многих реальных химически активных газовых смесей относительная разность между замороженной и равновесной скоростями звука лежит в пределах 10%.

Чтобы исключить образование разрывов в ударной волне, в дальнейшем будут изучаться режимы с $a_{f\infty} > v_\infty > a_{e\infty}$. Полагая в соотношении (1.6) $k = 0$ и $k = N$, имеем

$$(2.1) \quad \gamma_f < 0 < \gamma_e.$$

Когда $\gamma_f > 0$, набегающий поток подвергается сначала скачкообразному сжатию, а затем его параметры изменяются непрерывно.

Асимптотическое представление решения системы уравнений (1.1) при $x \rightarrow -\infty$ проще всего найти, если пренебречь в интеграле (1.9) квадратичным членом. В итоге

$$2\gamma_f v = \frac{P_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{q}.$$

Отсюда следует уравнение

$$(2.2) \quad \frac{d\mathbf{q}}{dx} = - \left(\mathbf{D} + \frac{1}{2} \frac{P_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 \gamma_f} \mathbf{B} \right) \mathbf{q}$$

для вектора полноты химических реакций, где \mathbf{B} — симметричная матрица с элементами $b_{ik} = e_i e_k$.

Выясним, каковы собственные числа симметричной матрицы

$$(2.3) \quad \mathbf{S} = \mathbf{D} + \frac{1}{2} \frac{P_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 \gamma_f} \mathbf{B},$$

элементы которой пусть будут s_{ik} . Для этой цели рассмотрим квадратичную форму

$$(2.4) \quad \Phi(\xi_i, \xi_k) = \sum_{i,k=1}^N s_{ik} \xi_i \xi_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i^2 + \frac{1}{2} \frac{P_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 \gamma_f} \left(\sum_{i=1}^N e_i \xi_i \right)^2.$$

Введем линейное преобразование

$$\xi = \mathbf{C}\eta,$$

заданное соотношениями

$$\eta_i = \xi_i, \quad i = 1, \dots, N-1; \quad \eta_N = \sum_{i=1}^N e_i \xi_i.$$

В новых переменных квадратичная форма (2.4) принимает вид

$$\varphi(\xi_i, \xi_k) = \psi(\eta_i, \eta_k) = \sum_{i,k=1}^N w_{ik} \eta_i \eta_k,$$

причем матрицы S и $W = ||W_{ik}||$ связаны равенством

$$(2.5) \quad W = C^*SC = C^*DC + \frac{1}{2} \frac{P_{co}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2 \gamma_f} C^*BC.$$

Здесь, как обычно, символом C^* обозначена транспонированная к C матрица.

Матрица $D^{(1)} = C^*DC$ обладает довольно сложной структурой, однако можно утверждать, что она является симметричной и в силу закона инерции квадратичных форм положительно определенной. Что касается матрицы $B^{(1)} = C^*BC$, то, как показывает прямое вычисление, она имеет единственный ненулевой элемент $b_{NN}^{(1)} = 1$. Отсюда следует, что матрица W симметрична, а $N - 1$ ее главных миноров

$$\Delta_1 = w_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{N-1} = \begin{vmatrix} w_{11} & \dots & w_{N-1,1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ w_{1,N-1} & \dots & w_{N-1,N-1} \end{vmatrix}$$

совпадают с аналогичными минорами матрицы $D^{(1)}$. Поскольку последняя является положительно определенной, на основании критерия Сильвестра [9] заключаем, что $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}$ положительны.

Осталось выяснить знак N -го главного минора Δ_N , который есть просто $\det W$. В силу свойств определителей произведения матриц имеем

$$\det W = \det C^* \cdot \det S \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det S,$$

т. е. знаки $\det W$ и $\det S$ одинаковы. В результате простых вычислений находим

$$(2.6) \quad \det S = \prod_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2 \gamma_f} \sum_{j=1}^N e_j^2 \prod_{i=1}^{N(j)} \lambda_i,$$

где верхний индекс (j) у произведения $\prod_{i=1}^{N(j)} \lambda_i$ указывает, что из полного набора его сомножителей λ_i исключается λ_j . Дальнейшее преобразование (2.6) приводит к

$$\det S = \prod_{i=1}^N \lambda_i \left[1 + \frac{1}{2} \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2 \gamma_f} \sum_{j=1}^N \frac{e_j^2}{\lambda_j} \right].$$

Из формулы (1.10) видно, что выражение в квадратных скобках в правой стороне последнего равенства записывается как $1 + (\gamma_e - \gamma_f)/\gamma_f$. Поскольку все собственные числа λ_i ($i = 1, \dots, N$) положительны, из неравенств (2.1) вытекает условие $\det S < 0$. Таким образом, N -й главный минор Δ_N матрицы W , которая была введена соотношением (2.5), имеет отрицательный знак.

Применим теперь метод Якоби для приведения квадратичной формы $\psi(\eta_i, \eta_k)$ к сумме квадратов [9]. Этот метод позволяет записать коэффи-

циент при j -м члене в виде отношения Δ_{j-1}/Δ_j . Отсюда ясно, что $N - 1$ собственных чисел симметричной матрицы W положительны, а одно собственное число отрицательно. В силу закона инерции квадратичных форм можно утверждать, что аналогичным свойством обладают собственные числа исходной матрицы S , определяемой формулой (2.3). Обозначим собственные числа этой матрицы посредством l_i и положим $l_1, \dots, l_{j-1} > 0$, $l_j < 0$, $l_{j+1}, \dots, l_N > 0$.

Возвратимся к уравнению (2.2). Подстановка в него выражения

$$(2.7) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{\mu x}$$

для вектора полноты химических реакций дает

$$(2.8) \quad (S + \mu E)\mathbf{q}_0 = 0.$$

Так как имеет место условие $\mathbf{q} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, то интегралы уравнения (2.2) с $\mu = -l_i$ ($i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$) следует отбросить. Отсюда заключаем, что в формуле (2.7) коэффициент в показателе степени принимает единственное значение $\mu = -l_j$. Однородное уравнение (2.8) определяет вектор \mathbf{q}_0 с точностью до произвольного множителя. Принимая во внимание связь между возмущенной скоростью частиц и вектором полноты химических реакций, представим асимптотику решения при $x \rightarrow -\infty$ в виде

$$(2.9) \quad v = ce^{\mu x}, \quad q_i = -\frac{e_i c}{\mu + \lambda_i} e^{\mu x}, \quad \mu = -l_j \quad (i = 1, \dots, N).$$

Докажем теперь, что термодинамические параметры q_i монотонно возрастают, а скорость газа монотонно убывает вдоль координаты x . Для поставленной цели введем вспомогательные величины $q_i^x = \lambda_i q_i / e_i$. Рассматривая v в качестве известной функции, имеем

$$(2.10) \quad q_i^x = -\lambda_i \int_{-\infty}^x v(\xi) e^{\lambda_i(\xi-x)} d\xi \quad (i = 1, \dots, N).$$

Можно проверить, что интегральные представления для q_i^x согласуются с асимптотическими формулами (2.9) при $x \rightarrow -\infty$. В силу первой из названных формул существует диапазон $-\infty < x < x_0$, в котором производная $dv/dx < 0$, если произвольная постоянная $c < 0$. Решения с $c > 0$ нужно исключить из рассмотрения, так как они не удовлетворяют граничным условиям (1.4) при $x \rightarrow \infty$. Монотонный характер изменения v будет установлен, если окажется, что $dv(x_0)/dx < 0$.

Допустим, противное и положим $dv(x_0)/dx = 0$. Тогда в соответствии с первым уравнением из системы (1.1) в точке x_0 имеем

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{\lambda_i} \frac{dq_i^x(x_0)}{dx} = 0.$$

Комбинация остальных уравнений этой системы с соотношениями (2.10) дает

$$(2.12) \quad \frac{dq_i^x(x_0)}{dx} = -\lambda_i^2 \int_{-\infty}^{x_0} [v(x_0) - v(\xi)] e^{\lambda_i(\xi-x_0)} d\xi \quad (i = 1, \dots, N).$$

Функция $v(x)$ достигает своего минимального значения $v(x_0)$ на краю интервала $-\infty < x \leq x_0$. Отсюда следует, что подынтегральное выражение в (2.12) является отрицательным, а производные

$$\frac{dq_i^x(x_0)}{dx} > 0 \quad (i=1, \dots, N).$$

Суммируя последние неравенства, умноженные предварительно на e_i^2/λ_i , приходим к противоречию с соотношением (2.11). Это противоречие доказывает, что скорость газа монотонно убывает вдоль координаты x . Обращение к формулам (2.12) ведет к заключению о монотонном возрастании компонентов вектора полноты химических реакций.

3. Корни характеристического уравнения. Собственные числа матрицы S определяются как взятые с обратным знаком корни следующего из (2.8) характеристического уравнения. В наиболее компактном виде оно получается, если подставить первую из формул (2.9) в уравнение (1.5) для возмущенной скорости и отбросить в найденном таким образом соотношении младшие члены. В результате

$$(3.1) \quad \sum_{k=0}^N \sigma_{N-k} \gamma^{(k)} \mu^k = P_N = 0.$$

Как доказано выше, уравнение (3.1) имеет N действительных корней $\mu_1 = -l_1, \dots, \mu_N = -l_N$, причем только один из них положительный, а остальные отрицательные. Расположим эти корни в следующем порядке:

$$(3.2) \quad |\mu_i| \geq |\mu_{i+1}| \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

По основной теореме алгебры

$$(3.3) \quad P_N = \gamma_f \prod_{i=1}^N (\mu - \mu_i) = \gamma_f \sum_{k=0}^N (-1)^{N-k} \sigma_{N-k}(\mu) \mu^k,$$

где аргументами сумм $\sigma_{N-k}(\mu)$ служат корни μ_1, \dots, μ_N . Сравнение формул (3.1) и (3.3) с $N-k = j$ дает

$$(3.4) \quad (-1)^j \sigma_j(\mu) = \frac{\gamma^{(N-j)}}{\gamma_f} \sigma_j.$$

Установим асимптотическое распределение корней характеристического уравнения в предположении

$$(3.5) \quad \lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \dots \gg \lambda_{N-1} \gg \lambda_N.$$

Такого рода условия весьма часто характеризуют реальные химические смеси, где скорости реакций могут отличаться на несколько порядков. Кроме того, в дальнейшем будем считать, что каждое из отношений e_i^2/λ_i ($i = 1, \dots, N$) по порядку величины сравнимо с единицей.

Неравенства (3.5) позволяют значительно упростить выражения для промежуточных скоростей звука. Используя изложенные в [10] результаты, можно показать, что формула (1.7) сводится к

$$(3.6) \quad \alpha_{k\infty} = a_{f\infty} - \frac{1}{2} \delta_{av\infty}^2 \sum_{m=1}^{N-k} \frac{c_m^2}{\lambda_m}.$$

При $k = 0$ отсюда вытекает точное соотношение (1.40) между замороженной и равновесной скоростями звука. Обращаясь к равенству (1.6), имеем

$$(3.7) \quad \gamma^{(k)} = \gamma_f + \frac{1}{2} \frac{P_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{m=1}^{N-k} \frac{e_m^2}{\lambda_m}.$$

Рассмотрим различные случаи, которые могут встретиться при решении характеристического уравнения. Пусть вначале все числа $\gamma^{(k)} \sim 1$ ($k = 0, \dots, N$). Тогда должен существовать корень, который по абсолютной величине много больше или порядка λ_1 . По устанавливаемой неравенствами (3.2) нумерации это будет μ_1 . Принимая во внимание условия (3.5), сохраним в уравнении (3.1) только главные члены. В результате находим приближенное значение

$$(3.8) \quad \mu_1 = - \frac{\gamma^{(N-1)}}{\gamma_f} \lambda_1.$$

Следующие корни μ_2, \dots, μ_N определяются уравнением

$$P_{N-1} = \prod_{i=2}^N (\mu - \mu_i) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{N-1-k} \sigma_{N-1-k}^{(1)}(\mu) \mu^k = 0,$$

где верхний индекс (1) у суммы $\sigma_l^{(1)}(\mu)$ указывает, что из полного набора составляющих ее чисел μ_i исключено μ_1 . Напишем тождество

$$(3.9) \quad \sigma_j(\mu) = \mu_1 \sigma_{j-1}^{(1)}(\mu) + \sigma_j^{(1)}(\mu).$$

Можно показать, что для корня μ_2 справедлива оценка $|\mu_1| \gg |\mu_2|$. Воспользовавшись равенствами (3.4), (3.8), получим приближенно

$$\sigma_{N-1-k}^{(1)}(\mu) = (-1)^{N-1-k} \frac{\gamma^{(k)}}{\gamma^{(N-1)}} \frac{\sigma_{N-k}}{\lambda_1},$$

а затем

$$P_{N-1} = \frac{1}{\lambda_1 \gamma^{(N-1)}} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{N-k} \gamma^{(k)} \mu^k.$$

Результат применения тождества (3.9) к сумме σ_{N-k} гласит $\sigma_{N-k} = \lambda_1 \sigma_{N-1-k}^{(1)}$, если пренебречь не зависящим от λ_1 слагаемым. Окончательно

$$(3.10) \quad P_{N-1} = \frac{1}{\gamma^{(N-1)}} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{N-1-k}^{(1)} \gamma^{(k)} \mu^k.$$

Сравнение формул (3.1) и (3.10) показывает, что полиномы P_N и P_{N-1} аналогичны по своей структуре. Отсюда сразу следует, что для корня μ_2 справедливо равенство типа (3.8).

Продолжая описанную процедуру, можно вычислить корни μ_3, \dots, μ_N . Асимптотические выражения для них очевидны

$$(3.11) \quad \mu_i = \frac{\gamma^{(N-i)}}{\gamma^{(N-i+1)}} \lambda_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

За исключением одного, все эти корни отрицательны. В силу неравенств

(1.8), (2.1) и соотношений (3.6), (3.7) асимптотическое представление единственного положительного корня μ_j выделяется условиями

$$(3.12) \quad \mu_i = -\frac{\gamma^{(N-i)}}{\gamma^{(N-j+i)}} \lambda_j, \quad \gamma^{(N-j+1)} < 0 < \gamma^{(N-j)}.$$

При $i = 1$ формула (3.11) переходит в (3.8).

Рассмотрим случай, когда $|\gamma^{(N-1)}| \ll 1$, а остальные постоянные $\gamma^{(k)}$ в согласии с формулой (3.7) по порядку величины сравнимы с единицей, причем $\gamma_f < 0$, а $\gamma^{(N-i)} > 0$ ($i = 2, \dots, N$). Положим в соотношении (3.4) номер $j = 2$, после чего сохраним в нем только главные члены

$$\sigma_2(\mu) = \frac{\gamma^{(N-2)}}{\gamma_f} \lambda_1 \lambda_2.$$

Если бы все корни μ_i ($i = 1, \dots, N$) были по абсолютной величине одного порядка с λ_2 или даже меньше, чем это число, последнее равенство не могло бы выполняться. Среди корней характеристического уравнения непременно существуют такие, модуль которых превосходит λ_2 . Для их определения выводим из (3.1) приближенное уравнение

$$\gamma_f \mu^2 + \lambda_1 \gamma^{(N-1)} \mu + \lambda_1 \lambda_2 \gamma^{(N-2)} = 0.$$

Придерживаясь устанавливаемой требованиями (3.2) нумерации, имеем

$$(3.13) \quad \mu_{1,2} = -\frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\gamma^{(N-1)}}{\gamma_f} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \lambda_1^2 \left[\frac{\gamma^{(N-1)}}{\gamma_f} \right]^2 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\gamma^{(N-2)}}{\gamma_f}}$$

с отношением $\gamma^{(N-2)}/\gamma_f < 0$.

Чтобы найти следующие корни μ_3, \dots, μ_N , нужно решить уравнение

$$P_{N-2} = \prod_{i=3}^N (\mu - \mu_i) = \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^{N-2-k} \sigma_{N-2-k}^{(1,2)}(\mu) \mu^k = 0.$$

Воспользуемся тождеством

$$(3.14) \quad \sigma_j(\mu) = \mu_1 \mu_2 \sigma_{j-2}^{(1,2)}(\mu) + (\mu_1 + \mu_2) \sigma_{j-1}^{(1,2)}(\mu) + \sigma_j^{(1,2)}(\mu).$$

Поскольку $|\mu_{1,2}| \gg |\mu_3|$, результат применения равенств (3.4), (3.13) записывается приближенно в виде

$$\sigma_{N-2-k}^{(1,2)}(\mu) = (-1)^{N-k} \frac{\gamma^{(k)}}{\gamma^{(N-2)}} \frac{\sigma_{N-k}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Полином P_{N-2} преобразуется к виду

$$P_{N-2} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \gamma^{(N-2)}} \sum_{k=0}^{N-2} \sigma_{N-k} \gamma^{(k)} \mu^k.$$

Обращаясь к тождеству (3.14) для суммы σ_{N-k} , находим, что ее асимптотическое представление будет $\sigma_{N-k} = \lambda_1 \lambda_2 \sigma_{N-2-k}^{(1,2)}$, если удержать в нем только главный член. В итоге

$$(3.15) \quad P_{N-2} = \frac{1}{\gamma^{(N-2)}} \sum_{k=0}^{N-2} \sigma_{N-2-k} \gamma^{(k)} \mu^k.$$

Из сопоставления формулы (3.15) с (3.4) и (3.10) видно, что полином P_{N-2} аналогичен по своей структуре полиномам P_N и P_{N-1} . Как ясно отсюда, искомые корни μ_3, \dots, μ_N задаются равенством (3.11) с $i = 3, \dots, N$, причем все они отрицательные. Величина единственного положительного корня устанавливается соотношением (3.13) с верхним знаком перед радикалом в его правой части.

Пусть, наконец, имеет место условие $|\gamma^{(N-j)}| \ll 1$ с $j = 1, \dots, N-1$. В соответствии с неравенствами (1.8), (2.1) и формулами (3.6), (3.7) остальные постоянные $\gamma^{(N-i)} < 0$ при $i = 0, \dots, j-1$, в то время как $\gamma^{(N-i)} > 0$ при $i = j+1, \dots, N$. В этом случае, очевидно, первые $j-1$ отрицательных корней характеристического уравнения находятся из равенства (3.11), в котором $i = 1, \dots, j-1$. Следующие два корня будут

$$(3.16) \quad \mu_{j,j+1} = -\frac{1}{2} \lambda_j \frac{\gamma^{(N-j)}}{\gamma^{(N-j+1)}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \lambda_j^2 \left[\frac{\gamma^{(N-j)}}{\gamma^{(N-j+1)}} \right]^2 - \lambda_j \lambda_{j+1} \frac{\gamma^{(N-j-1)}}{\gamma^{(N-j+1)}}}.$$

Из них положительный получается выбором верхнего знака перед радикалом в правой части (3.16). Остальные $N-j-1$ отрицательных корней характеристического уравнения определяются равенствами (3.11), где $i = j+2, \dots, N$.

4. Квазиравновесный режим. Предположим, что скорость набегающего потока, хотя и превосходит равновесную скорость $a_{e\infty}$, остается меньше даже первой промежуточной скорости $\alpha_{1\infty}$. Тогда $\gamma^{(N-i)} < 0$ при $i = 0, \dots, N-1$ и лишь $\gamma_e > 0$. Введем новый масштаб длины посредством

$$(4.1) \quad x = x_N / \lambda_N.$$

Первое уравнение из исходной системы (1.1) принимает вид

$$(4.2) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{\bar{a}v}{x_N} = -\delta_a^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_N} e_i (\lambda_i q_i + e_i v),$$

в то время как оставшиеся уравнения для составляющих вектора полноты химических реакций имеют вид

$$(4.3) \quad \frac{dq_i}{dx_N} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_N} \left(q_i + \frac{e_i}{\lambda_i} v \right) \quad (i = 1, \dots, N-1),$$

$$\frac{dq_N}{dx_N} = -\left(q_N + \frac{e_N}{\lambda_N} v \right).$$

Исключим из системы уравнений (4.2), (4.3) термодинамическую переменную q_1 . В итоге получим

$$\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \frac{d}{dx_N} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{dv}{dx_N} \right] + \frac{1}{2} \delta_a^2 \sum_{i=2}^N e_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} - 1 \right) \frac{dq_i}{dx_N} +$$

$$+ \left[\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f + \frac{1}{2} \delta_a^2 \left(\frac{e_1^2}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^N \frac{e_i^2}{\lambda_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) \right] \frac{dv}{dx_N} = 0.$$

Перейдем здесь в соответствии с условиями (3.5) к пределу по $\lambda_i/\lambda_1 \rightarrow 0$ ($i = 2, \dots, N$). Учитывая, что отношение $e_i^2/\lambda_i \sim 1$ при любом $i = 1, \dots, N$, и воспользовавшись формулой (3.7) с $k = N-1$, имеем

$$(4.4) \quad 2(\varepsilon m_{\infty} v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}) \frac{dv}{dx_N} = -\delta_a^2 \sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_N} e_i (\lambda_i q_i + e_i v).$$

Написанное уравнение совпадает с исходным уравнением (4.2), если в последнем заменить постоянную γ_f на $\gamma^{(N-1)}$ и, кроме того, суммирование по индексу i производить не от 1 до N , а от 2 до N . Исключим из рассматриваемой системы вторую термодинамическую переменную q_2 . В результате получится уравнение типа (4.4), где вместо параметра $\gamma^{(N-1)}$ стоит $\gamma^{(N-2)}$, а индекс i пробегает значения 3, ..., N .

Продолжим указанную процедуру, сопровождая каждый раз исключение очередной термодинамической переменной q_i предельным переходом по $\lambda_i/\lambda_j \rightarrow 0$ ($i = j + 1, \dots, N$). После $(N - 1)$ -кратного повторения всех действий возникает сравнительно простая система уравнений

$$(4.5) \quad 2(\varepsilon m_{\infty} v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(1)}) \frac{dv}{dx_N} = \delta_a^2 e_N^2 \frac{dq_N}{dx_N},$$

$$\frac{dq_N}{dx_N} = -\left(q_N + \frac{e_N}{\lambda_N} v\right),$$

которая содержит лишь две искомые функции v и q_N . Если решение (4.5) известно, то термодинамические переменные q_1, \dots, q_{N-1} определяются из конечных соотношений

$$(4.6) \quad q_i = -\frac{e_i}{\lambda_i} v \quad (i = 1, \dots, N - 1).$$

Их смысл чрезвычайно прост: это условия равновесного протекания первых $N - 1$ реакций. Ведь процесс сжатия газа заканчивается, после того как N -я реакция придет к новому состоянию равновесия.

Сформулируем начальные условия, которые должны быть удовлетворены при интегрировании системы (4.5). Из асимптотических представлений (2.9) с $\lambda_N/\lambda_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, N - 1$) при $x_N \rightarrow -\infty$ получим

$$(4.7) \quad v = c e^{\mu_N x}, \quad q_i = \frac{e_i c}{\lambda_i} e^{\mu_N x} \quad (i = 1, \dots, N - 1),$$

$$q_N = \frac{e_N c}{\lambda_N} \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(0)} - \gamma^{(1)}} e^{\mu_N x}, \quad \dot{\mu}_N = -\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(1)}} \lambda_N.$$

Эти формулы показывают, что асимптотические значения функций v и q_i ($i = 1, \dots, N - 1$) соответствуют конечным соотношениям (4.6).

Система (4.5) эквивалентна одному уравнению второго порядка

$$(4.8) \quad \frac{d}{dx_N} \left[(\varepsilon m_{\infty} v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(1)}) \frac{dv}{dx_N} \right] + (\varepsilon m_{\infty} v + \varepsilon_a^2 \gamma e) \frac{dv}{dx_N} = 0.$$

Последнее можно получить также из уравнения (1.5), подставив в него переменную (4.1) и совершив предельный переход по $\lambda_{i+1}/\lambda_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, N - 1$). Интеграл уравнения (4.8), удовлетворяющий асимптотическим начальным данным (4.7), имеет вид

$$(4.9) \quad c_N - x_N = \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(0)}} \ln |v| + \left(2 - \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(0)}} \right) \ln \left| \varepsilon_a^2 \gamma^{(0)} + \frac{1}{2} \varepsilon m_{\infty} v \right|.$$

Он допускает значительное упрощение, когда $|\gamma^{(0)}| \ll 1$. В этом случае

введем новую искомую функцию

$$u = \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(0)} + v$$

и обозначим посредством

$$\sigma = \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(0)}, \quad l = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(1)}, \quad \exp \left[\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(1)}} d_N \right] = \frac{\varepsilon m_\infty}{2} \exp \left[\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(1)}} c_N \right]$$

постоянные величины. Тогда

$$u = -\sigma \operatorname{th} \frac{\sigma}{l} (x_N - d_N).$$

Это известное решение Тэйлора, описывающее структуру ударной волны в вязком теплопроводящем газе [11]. При стремящейся к нулю амплитуде ему подчиняется квазиравновесный процесс сжатия релаксирующей смеси, в которой происходит единственная реакция [5, 6, 12]. Как показывают приведенные выше рассуждения, решение Тэйлора задает также структуру слабой ударной волны в химически активной смеси с произвольным числом реакций при условии, что скорость v_∞ набегающего потока лишь немного превосходит равновесную скорость звука $a_{e\infty}$. При увеличении скорости течения на бесконечности в диапазоне $a_{e\infty} < v_\infty < \alpha_{1\infty}$ сжатие смеси внутри единственной релаксационной зоны определяется формулой (4.9).

5. Общий случай. Дальнейший рост скорости набегающего потока приводит к необходимости рассмотреть ситуацию, когда эта скорость попадает внутрь интервала $a_{e\infty} < v_\infty < a_{f\infty}$. Пусть, например, $\alpha_{N-j,\infty} < v_\infty < \alpha_{N-j+1,\infty}$, тогда $\gamma^{(N-j+1)} < 0 < \gamma^{(N-j)}$. Будем считать, что оба параметра $\gamma^{(N-j)}$ и $\gamma^{(N-j+1)}$ по порядку величины сравнимы с единицей.

Учитывая выражение (3.12) для единственного положительного корня характеристического уравнения, вводим переменную

$$(5.1) \quad x = x_j / \lambda_j.$$

Первое уравнение исходной системы (1.1) принимает вид

$$(5.2) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{dv}{dx_j} = -\delta_a^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_j} e_i (\lambda_i q_i + e_i v).$$

Остальные уравнения с учетом требований $\lambda_k / \lambda_j \rightarrow 0 (k = j+1, \dots, N)$ дают

$$(5.3) \quad \frac{dq_i}{dx_j} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \left(q_i + \frac{e_i}{\lambda_i} v \right) \quad (i = 1, \dots, j-1),$$

$$\frac{dq_j}{dx_j} = -\left(q_j + \frac{e_j}{\lambda_j} v \right), \quad \frac{dq_k}{dx_j} = 0 \quad (k = j+1, \dots, N).$$

Из системы уравнений (5.2), (5.3) можно исключить термодинамическую переменную q_1 . После предельного перехода по $\lambda_i / \lambda_1 \rightarrow 0 (i = 2, \dots, j)$ получится, очевидно, уравнение (4.4), где суммирование по индексу i в правой части производится от 2 до j . Продолжим процедуру исключения термодинамических переменных по описанному в предыдущем разделе правилу. В результате $(j-1)$ -кратного повторения всех действий при-

ходим к системе уравнений

$$(5.4) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} = \delta_a^2 e_j \frac{dq_j}{dx_j},$$

$$\frac{dq_j}{dx_j} = - \left(q_j + \frac{e_j}{\lambda_j} v \right), \quad \frac{dq_k}{dx_j} = 0 \quad (k = j + 1, \dots, N).$$

После того как ее решение построено, первые $j - 1$ термодинамических переменных q_1, \dots, q_{j-1} вычисляются из конечных соотношений (4.6). Возникшая ситуация может быть интерпретирована естественным образом: первые $j - 1$ реакций протекают равновесно, а последние $N - j$ реакций находятся в замороженном состоянии.

Выясним теперь, какие начальные условия нужно поставить при интегрировании системы (5.4). Из асимптотических представлений (2.9) с $\lambda_j/\lambda_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, j - 1$) следует, что при $x_j \rightarrow -\infty$

$$(5.5) \quad v = c e^{\mu_j x}, \quad q_i = - \frac{e_i c}{\lambda_i} e^{\mu_j x}, \quad i = 1, \dots, j - 1,$$

$$q_j = \frac{e_j c}{\lambda_j} \frac{\gamma^{(N-j+1)}}{\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}} e^{\mu_j x}, \quad q_k = 0, \quad k = j + 1, \dots, N,$$

$$\mu_j = - \frac{\gamma^{(N-j)}}{\gamma^{(N-j+1)}} \lambda_j.$$

Написанные формулы показывают, что асимптотические значения функций v и q_i ($i = 1, \dots, j - 1$) согласуются с конечными соотношениями (4.6). Как видно из дифференциальных уравнений и начальных данных для переменных q_k ($k = j + 1, \dots, N$), в рассматриваемой релаксационной зоне эти термодинамические переменные остаются равными нулю.

Система (5.4) эквивалентна одному уравнению второго порядка

$$(5.6) \quad \frac{d}{dx_j} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} \right] + (\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j)}) \frac{dv}{dx_j} = 0,$$

которое совпадает с (4.8) при $j = N$. Разумеется, написанное уравнение вытекает из (1.5), если воспользоваться переменной (5.1) и совершить предельный переход по всем $\lambda_{j+1}/\lambda_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, N - 1$). Интеграл уравнения (5.6) с асимптотикой (5.5) при $x_j \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$(5.7) \quad c_j - x_j = \frac{\gamma^{(N-j+1)}}{\gamma^{(N-j)}} \ln |v| + \left(2 - \frac{\gamma^{(N-j+1)}}{\gamma^{(N-j)}} \right) \ln \left| \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j)} + \frac{1}{2} \varepsilon m_\infty v \right|$$

и переходит в (4.8) при $j = N$.

Существует большая разница между рассматриваемым движением газа и тем, которое было изучено в п. 4. Когда $a_{e\infty} < v_\infty < \alpha_{1\infty}$, процесс сжатия заканчивается с приходом к равновесию N -й реакции в единственной релаксационной зоне. В общем случае $\alpha_{N-j,\infty} < v_\infty < \alpha_{N-j+1,\infty}$ стремление к равновесию j -й реакции не завершает сжатие химически активной смеси. Вслед за первой релаксационной зоной простираются другие более широкие области, где доминирующая роль принадлежит реакциям с номерами $j + 1, \dots, N$.

Чтобы построить поле возмущений в следующей релаксационной зоне, приведем асимптотическое выражение интеграла (5.7) при $x_j \rightarrow +\infty$

$$(5.8) \quad v = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j)} + b_j \exp \left[-\frac{\gamma^{(N-j)}}{2\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}} x_j \right],$$

$$b_j = \frac{2}{\varepsilon m_\infty} \left[\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j)} \right]^{-\frac{\gamma^{(N-j+1)}}{2\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}}} \exp \left[\frac{\gamma^{(N-j)} x_j}{2\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}} \right],$$

которое остается справедливым и при $j = N$. Из второго уравнения системы (5.4) получим асимптотику термодинамической переменной

$$q_j = \frac{e_j}{\lambda_j} \left\{ \frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j)} + \frac{2\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}}{\gamma^{(N-j)}} b_j \exp \left[-\frac{\gamma^{(N-j)} x_j}{2\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}} \right] \right\} + d_j \exp(-x_j)$$

с новой постоянной d_j . Иными словами, в конце первой релаксационной зоны рассматриваемая термодинамическая переменная стремится к своему равновесному значению

$$(5.9) \quad q_j = -\frac{e_j}{\lambda_j} v_{sj}, \quad v_{sj} = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j)}.$$

Если вычислять параметры частиц за ударным фронтом (разрывом) в смеси, в которой первые j реакций пришли к равновесию, то роль замороженной скорости звука $a_{j\infty}$ будет играть, очевидно, промежуточная скорость $\alpha_{N-j,\infty}$. Величина v_{sj} есть не что иное, как скорость частиц газа при таком внезапном сжатии.

Как видно непосредственно из исходных уравнений (1.1), в условиях равновесного протекания первых j реакций масштаб следующей релаксационной зоны должен быть задан посредством $x = x_{j+1}/\lambda_{j+1}$. Рассуждения, которые совершенно аналогичны изложенным выше, приводят к системе уравнений (5.4) с заменой в ней индекса j на $j+1$. После ее решения термодинамические переменные q_1, \dots, q_j можно вычислять при помощи конечных соотношений (4.6).

Чтобы поставить начальные данные, которые необходимы для интегрирования дифференциальных уравнений во второй релаксационной зоне, воспользуемся принципом сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений [13]. Так, как

$$x_{j+1} = \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} x_j,$$

то из предельных условий (5.9) находим при $x_{j+1} = 0$

$$(5.10) \quad v = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j)}, \quad q_i = \frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \frac{e_i}{\lambda_i} \gamma^{(N-j)} \quad (i = 1, \dots, j),$$

$$q_k = 0 \quad (k = j+1, \dots, N).$$

Соответствующие начальные значения производных будут

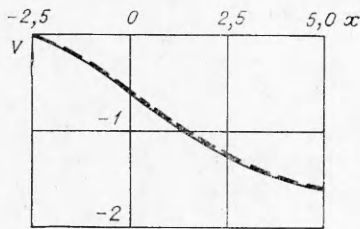
$$(5.11) \quad \frac{dv}{dx_{j+1}} = -\frac{\delta_a^2}{\varepsilon m_\infty} \frac{e_{j+1}^2}{\lambda_{j+1}}, \quad \frac{dq_{j+1}}{dx_{j+1}} = \frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \frac{e_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \gamma^{(N-j)}.$$

Для построения решения сформулированной задачи Коши применим уравнение второго порядка (5.6), предварительно заменив в нем индекс j

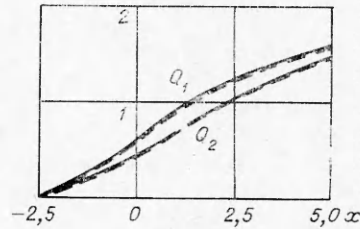
на $j + 1$. Его интегрирование дает

$$(\epsilon m_\infty v + \epsilon_a^2 \gamma^{(N-j)}) \frac{dv}{dx_{j+1}} + \frac{1}{2} \epsilon m_\infty v^2 + \epsilon_a^2 \gamma^{(N-j-1)} v = c_{j+1}.$$

Подставляя сюда начальные данные (5.10), (5.11), находим, что произвольная постоянная $C_{j+1} = 0$. Это значение постоянной C_{j+1} ведет к интегралу (5.7), в котором вместо индекса j фигурирует $j + 1$. Формулы



Ф и г. 1



Ф и г. 2

(5.8) определяют асимптотику возмущений при выходе из второй релаксационной зоны, т. е. при $x_{j+1} \rightarrow \infty$.

Этот процесс без каких-либо изменений можно продолжить. Полученное в результате решение дает асимптотическое описание движения химически активной смеси внутри полностью диспергированной ударной волны. Когда $\alpha_{N-j,\infty} < v_\infty < \alpha_{N-j+1,\infty}$, возмущенная область разбивается на $N - j + 1$ релаксационных зон, в каждой из которых доминирующая роль принадлежит одной реакции. Ширина всех предыдущих зон в масштабе любой последующей стремится к нулю. Поэтому непрерывное сжатие газа в какой-либо релаксационной зоне оказывается эквивалентным его внезапному сжатию на ударном фронте. При изучении конечной стадии процесса в $(N - j + 1)$ -й зоне первые $N - j$ релаксационных зон можно рассматривать в качестве последовательности $N - j$ разрывов.

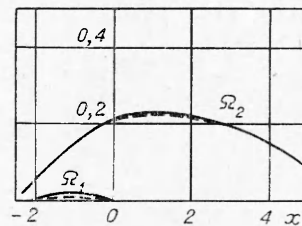
Для иллюстрации развитой теории проделаны расчеты структуры полностью диспергированной ударной волны в смеси, в которой протекают две реакции. В расчетах полагалось $\epsilon_a^2/\epsilon m_\infty = 1$, $\delta^2/\epsilon_a^2 = 2,9$, $\lambda_1 = 100$, $e_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $e_2 = 1$, $\gamma_f = -1,5$.

Результаты изображены на фиг. 1-3, где сплошные линии соответствуют точному численному решению задачи, а штриховые — данным асимптотического анализа. При построении фиг. 1-3 использовались переменные $V = v/\gamma_e$, $Q_1 = \lambda_1 q_1/(\gamma_e e_1)$, $Q_2 = \lambda_2 q_2/(\gamma_e e_2)$, $\Omega_1 = \omega_1/(\gamma_e e_1)$, $\Omega_2 = \omega_2/(\gamma_e e_2)$, в качестве независимой переменной была выбрана координата $x_2 = \lambda_2 x = x$. Результаты асимптотического анализа хорошо согласуются с теми, которые следуют из численного решения исходной системы (1.1).

6. Переход через промежуточную скорость звука. Выясним, что происходит, когда скорость потока v_∞ близка к некоторой промежуточной скорости $\alpha_{N-j,\infty}$. В этом переходном случае $|\gamma^{(N-j)}| \ll 1$. В соответствии с формулой (3.16) сделаем преобразование

$$(6.1) \quad x = x_j/\mu_j$$

и под μ_j будем понимать единственный поло-



Ф и г. 3

жительный корень характеристического уравнения. Обращаясь с исходной системой уравнений (1.1) по изложенному в двух предыдущих разделах правилу, имеем

$$(6.2) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} = \delta_a^2 \left(e_j \frac{dq_j}{dx_j} + e_{j+1} \frac{dq_{j+1}}{dx_j} \right),$$

$$\frac{dq_j}{dx_j} = -\frac{\lambda_j}{\mu_j} \left(q_j + \frac{e_j}{\lambda_j} v \right), \quad \frac{dq_{j+1}}{dx_j} = -\frac{\lambda_{j+1}}{\mu_j} \left(q_{j+1} + \frac{e_{j+1}}{\lambda_{j+1}} v \right),$$

$$\frac{dq_k}{dx_j} = 0, \quad k = j+2, \dots, N.$$

После решения системы уравнений (6.2) первые $j-1$ термодинамических переменных q_1, \dots, q_{j-1} восстанавливаются при помощи конечных соотношений (4.6). Релаксационный процесс характеризуется тем, что j -ю и $(j+1)$ -ю реакции нельзя рассматривать независимо. Хотя их скорости различаются по порядку величины, именно взаимное влияние обеих реакций определяет структуру поля возмущений при $x \rightarrow -\infty$. Этим обстоятельством диктуется введение масштаба (6.1).

Начальные условия для системы (6.2) при $x_j \rightarrow -\infty$ имеют вид

$$(6.3) \quad v = ce^{\mu_j x}, \quad q_i = -\frac{e_i c}{\lambda_i} e^{\mu_j x} \quad (i = 1, \dots, j-1),$$

$$q_j = -\frac{e_j c}{\lambda_j + \mu_j} e^{\mu_j x}, \quad q_{j+1} = -\frac{e_{j+1} c}{\lambda_{j+1} + \mu_j} e^{\mu_j x},$$

$$q_k = 0 \quad (k = j+2, \dots, N).$$

Ясно, что асимптотические значения функций v и q_i ($i = 1, \dots, j-1$) соответствуют конечным соотношениям (4.6).

Система (6.2) эквивалентна одному уравнению третьего порядка

$$(6.4) \quad \frac{d^2}{dx_j^2} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} \right] + \frac{\lambda_j}{\mu_j} \frac{d}{dx_j} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j)}) \frac{dv}{dx_j} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda_j \lambda_{j+1}}{\mu_j^2} (\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j-1)}) \frac{dv}{dx_j} = 0,$$

которое также можно получить непосредственно из уравнения (1.5), если перейти в последнем к переменной (6.1). Интегрирование уравнения (6.4) с учетом начальных данных (6.3) дает

$$\frac{d}{dx_j} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} \right] + \frac{\lambda_j}{\mu_j} (\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j)}) \frac{dv}{dx_j} +$$

$$+ \frac{\lambda_j \lambda_{j+1}}{\mu_j^2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon m_\infty v^2 + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j-1)} v \right) = 0.$$

Отсюда можно установить асимптотическое представление

$$v = -\frac{2\varepsilon_c^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j-1)} + b_{j+1} \exp \left[-\frac{\gamma^{(N-j-1)}}{2\gamma^{(N-j-1)} - \gamma^{(N-j)}} \frac{\lambda_{j+1}}{\mu_j} x_j \right]$$

для функции v , которое справедливо при $x_j \rightarrow +\infty$. Таким образом, в конце первой релаксационной зоны термодинамические переменные q_j и q_{j+1} стремятся к равновесным значениям

$$(6.5) \quad q_j = -\frac{e_j}{\lambda_j} v_{s,j+1}, \quad q_{j+1} = -\frac{e_{j+1}}{\lambda_{j+1}} v_{s,j+1}, \quad v_{s,j+1} = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-j-1)}.$$

Формулы (6.5) аналогичны (5.9), поэтому построение решения в остальных $N - j - 1$ релаксационных зонах следует пути, указанному в п. 5.

Отметим предельный случай $\gamma^{(N)} = 0$. Вплоть до некоторой точки $x = x^*$ поток остается невозмущенным, т. е. $v = q_i = 0$, $i = 1, \dots, N$. Пусть $x^* = 0$, тогда в первой релаксационной зоне решение имеет вид [12]

$$v = -\frac{2\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} \gamma^{(N-1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_1 x\right) \right].$$

В точке $x = 0$ параметры газа непрерывны, но их производные по координате меняются скачком. Очевидно, эта точка соответствует характеристике дифференциальных уравнений, которым подчиняются течения релаксирующих смесей. Продолжение решения в остальные $N - 1$ релаксационных зон осуществляется по описанной выше стандартной процедуре.

Поступила 5 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ни А. Л., Рыжов О. С. Уравнения трансзвуковых течений релаксирующих смесей. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1977, № 4.
2. Napolitano L. G. Generalized velocity potential equation for pluri-reacting mixtures. — «Arch. mech. stosowanej», 1964, vol. 16, N 2.
3. Napolitano L. G. Non-linear non-equilibrium flows. I. A. Rept., 1969, N 142.
4. Ни А. Л., Рыжов О. С. О скоростях звука в многокомпонентных химически активных газовых смесях. — «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон.», 1976, № 13, вып. 3.
5. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М., «Наука», 1965.
6. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
7. Clarke J. F., Rodgers J. B. Shock waves in a gas with several relaxing internal energy modes. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, pt 4.
8. Ни А. Л. Распространение слабых ударных волн в средах с произвольным числом химических реакций. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
9. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971.
10. Ни А. Л., Рыжов О. С. Предельные выражения для промежуточных скоростей звука в неравновесных течениях с произвольным числом химических реакций. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
11. Taylor G. I. The conditions necessary for discontinuous motion in gases. — «Proc. Roy. Soc.», ser A, 1910, vol. 84, N 571.
12. Рыжов О. С. О собственно трансзвуковом режиме в течениях реагирующей смеси. — В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1971.
13. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.