ПМТФ, № 1, 1962

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШЕЙСЯ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

С. А. Регирер

(*Москва*)

Изучаются стационарные магнитогидродинамические задачи о конвективном движении вязкой проводящей жидкости в вертикальных цилиндрических каналах. Известны исследования такого рода, посвященные течениям в присутствии однородного поперечного магнитного поля [1-4]. Настоящая заметка содержит рассмотрение отмеченного ранее [5] класса точных решений для конвективных процессов в магнитных полях более общего вида.

1. Пусть в твердом массиве имеется вертикальный цилиндрический канал бесконечной длины, заполненный вязкой электропроводной жидкостью. Под воздействием нагревания извне и внутреннего тепловыделения (за счет диссипации) в жидкости поддерживается стационарное конвективное движение. На него оказывает влияние магнитное поле, которое может быть создано внешними источниками, токами, пропускаемыми через жидкость вдоль оси канала, и индуцированными токами.

Процессы внутри канала и в массиве подчиняются системе уравнений

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p^* + \eta\Delta\mathbf{V} + \varkappa(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} - \rho\beta\mathbf{g}T, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0$$

$$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \nu_m\Delta\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \; c_v\rho\mathbf{V}\nabla T = k\Delta T + \Phi \qquad (1.1)$$

$$\left(p^* = p - \rho g_z z + \frac{\mu H^2}{8\pi}, \; \varkappa = \frac{\mu}{4\pi}, \; \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\right)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_e = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_e = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_e = 0 \qquad (1.2)$$

$$\mathbf{j}_e = \sigma_e\mathbf{E}_e, \; k_e\Delta T_e + \Phi_e = 0$$

Здесь Φ — джоулева и вязкая диссипация, Φ_e — мощность распределенных тепловых источников в массиве, остальные обозначения общепринятые; индексом e отмечены величины, относящиеся к массиву. Физические свойства жидкости и массива считаются постоянными и отнесены к некоторому характерному значению температуры, принятому за начало отсчета T в (1.1), (1.2).

Будем искать решения этих уравнений при следующих упрощающих предположениях: (а) линии тока жидкости параллельны оси канала; (б) магнитное поле в жидкости и в массиве, а также мощность теплоисточников Φ_e неизменны в направлении течения; (в) скорости течения малы настолько, что вязкой диссипацией и джоулевым теплом от индуцированных токов можно пренебречь; (г) массив является диэлектриком, но может содержать линейные проводники с током, создающим поперечное магнитное поле.

Если направить ось z по оси канала вертикально вверх ($g_z = -g$), то предположения (а) и (б), с учетом уравнения неразрывности, записываются в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_z v(x, y), \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_e}{\partial z} = 0$$

Тогда, повторяя рассуждения работы [6], получим из (1.1)

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} = \mathrm{const}, \qquad \frac{\partial p^*}{\partial z} = C + \rho\beta g z\,\frac{\partial T}{\partial z}\,, \qquad C = \left(\frac{\partial p^*}{\partial z}\right)_{z=0} = \mathrm{const}$$

Эти равенства означают, что прямолинейное течение в условиях свободной конвекции возможно только при постоянном вертикальном градиенте температуры, который далее обозначается через γ и считается заданным как в жидкости, так и в массиве.

Решение системы (1.1), (1.2), как указывалось ранее [5], при сделанных предположениях сводится к решению линейных краевых задач. Введя потенциалы $A\ (x,\ y)$, $A_e\ (x,\ y)$ равенствами $H_x = \partial A/\partial y$, $H_y = -\partial A/\partial x$ и т. д., получим, с учетом предположений (б) и (г), уравнения для отыскания поперечного магнитного поля

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c}\,j, \qquad \Delta A_e = 0 \qquad (j = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

где j — заданная плотность продольного тока, пропускаемого через жидкость. Решение уравнений (1.3) должно удовлетворять условиям на стенке канала Σ

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial A_e}{\partial n}\,, \qquad \mu\,\frac{\partial A}{\partial \tau} = \mu_e\,\frac{\partial A_e}{\partial \tau} \quad \text{на } \Sigma \tag{1.4}$$

и условиям для A_e на бесконечности. При наличии проводников в массиве A_e должно еще иметь особенности заданного типа.

Дальнейшее решение сводится к отысканию v, T, T_e, H_z из системы

$$\begin{gathered} C = \varkappa \mathbf{H}_\perp \nabla H_z + \eta\Delta v + \rho\beta g t, \qquad \mathbf{H}_\perp \nabla v + \nu_m \Delta H_z = 0, \\ c_v \rho v \gamma = k\Delta t + j^2/\sigma, \qquad k_e \Delta t_e + \Phi_e = 0 \qquad (\mathbf{H}_\perp = \mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_y H_y) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь

$$t\,(x,\ y) = T - \gamma z, \qquad t_e\,(x,\ y) = T_e - \gamma z$$

Согласно предположению (в), в уравнении энергии принято $\Phi = j^2/\sigma$, и тем самым учтена только джоулева диссипация от пропускаемого тока.

Предельные условия для системы (1.5) состоят из условий на границе

$$v = H_z = 0, \qquad t = t_e, \qquad k\,\frac{\partial t}{\partial n} = k_e\,\frac{\partial t_e}{\partial n} \quad \text{на } \Sigma \tag{1.6}$$

и условий для температуры на бесконечности (обращение H_z в нуль на границе связано с тем, что массив считается диэлектрическим и в нем на бесконечности $H_z = 0$). Кроме того, задается еще величина расхода жидкости через канал.

Полное давление с точностью до постоянной $p_0{}^*$ определяется интегрированием уравнения движения (1.1) в проекциях на оси x, y

$$p^* = \frac{4\pi\varkappa j}{c}\,A + \rho\beta g\gamma\,\frac{z^2}{2} + Cz + p_0{}^*$$

Следует отметить, что если постоянная C не определена, а на бесконечности задан горизонтальный тепловой поток q_e

$$-k_e\,\frac{\partial T_e}{\partial x} \to q_e \qquad \text{при } |\,x^2 + y^2\,| \to \infty \tag{1.7}$$

то температуры t и t_e находятся из (1.5) — (1.7) с точностью до аддитивной постоянной, которая может быть включена в C. Поэтому при такой постановке задачи всегда можно, не теряя общности, полагать $C = 0$, независимо от того, есть или нет вынужденное течение. Неопределенность устраняется при других постановках задачи, включающих, например, задание температуры на стенке канала.

2. Рассмотрим отдельные случаи, когда уравнения (1.5) допускают дальнейшее упрощение.

Нулевой вертикальный градиент температуры ($\gamma = 0$). Уравнения для температуры в (1.5) решаются независимо от остальных. После отыскания t получаем систему

$$C - \rho\beta g t = \varkappa \mathbf{H}_\perp \nabla H_z + \eta \Delta v, \qquad \mathbf{H}_\perp \nabla v + \nu_m \Delta H_z = 0 \tag{2.1}$$

которая отличается от уравнений вынужденного изотермического течения жидкости в трубе только членом $\rho\beta g t$. Поэтому для вычисления v и H_z из (2.1) применимы результаты соответствующих исследований (см., напр., [5, 7, 8]), в частности, указанные в них преобразования.

Потенциальное поперечное магнитное поле ($j = 0$). Введем комплексный потенциал поперечного поля $W = \varphi - iA$, так что $W' = H_x + iH_y$, и перейдем в уравнениях (1.5) к переменным $\varphi(x, y)$, $A(x, y)$, получим

$$\frac{1}{H_\perp^2}(C - \rho\beta g t) = \varkappa \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \eta \Delta_\varphi v, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu_m \Delta_\varphi H_z = 0$$

$$c_v \rho v \gamma = k H_\perp^2 \Delta_\varphi t + j^2 / \sigma, \qquad k_e H_\perp^2 \Delta_\varphi t_e + \Phi_e = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $H_\perp^2 = (\nabla\varphi)^2 = f(\varphi, A)$ и Δ_φ — оператор Лапласа в новых переменных. Предельные условия (1.6), (1.7) сохраняют свой вид, но граничный контур Σ и бесконечно удаленная окружность $|x^2 + y^2| \to \infty$ переходят в некоторые многообразия в соответствии с конформным отображением $W(x + iy) = \varphi - iA$.

Первые три уравнения (2.2) можно свести к одному относительно t:

$$\Delta_\varphi \Delta_\varphi (H_\perp^2 \Delta_\varphi t) - \frac{\varkappa}{\eta \nu_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(H_\perp^2 \Delta_\varphi t) + \frac{c_v \rho \gamma}{k\eta} \Delta_\varphi \left(\frac{\rho\beta g t - C}{H_\perp^2}\right) = 0 \tag{2.3}$$

В частном случае, когда поперечное поле однородно и направлено по оси x ($H_y = 0$), исключение t и H_z из (2.2) приводит к уравнению четвертого порядка для v

$$\Delta\Delta v - \frac{\varkappa H_x^2}{\nu_m \eta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c_v \rho^2 \gamma g}{k\eta} v = \frac{\rho\beta g j^2}{\sigma k \eta} \tag{2.4}$$

Уравнения типа (2.4) встречаются в теории колебаний тонких плит. Полезно также иметь в виду, что исключение v из уравнений индукции и энергии (2.2) дает

$$\Delta\left(H_z + \frac{k H_x}{c_v \rho \gamma \nu_m} \frac{\partial t}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.5}$$

Аналогичные преобразования осуществимы в осесимметричных и некоторых других задачах, и иногда даже для вихревого поперечного поля.

Идеально проводящая жидкость. При $\sigma \to \infty$ уравнение индукции в (1.5) переходит в условие вмороженности $v = v(A)$, уравнение движения остается прежним, а из уравнения энергии, считая плотность тока ограниченной, следует исключить Φ. В этом случае система также имеет четвертый порядок.

3. В качестве примера рассмотрим свободное конвективное движение в круглом цилиндрическом канале при $\gamma = 0$ и $\Phi_e = 0$, когда через жидкость пропускается продольный ток плотностью j, создающий азимутальное магнитное поле $H_\theta = 2\pi r j / c$. Положим, как указано в п. 1,

$C=0$ и введем безразмерные величины

$$r'=\frac{r}{r_0},\quad v'=\frac{vr_0}{\nu},\quad H_\theta'=\frac{H_\theta}{H_0},\quad H_z'=\frac{H_z}{H_0},\quad t'=t\frac{k}{q_er_0}$$

$$t_e'=t_e\frac{k}{q_er_0},\quad \Phi'=\Phi\frac{r_0k}{q_ec_v\rho\nu},\quad \chi=\frac{k_e}{k},\quad M=\frac{\mu H_0r_0}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$$

$$G=\frac{\beta gq_er_0^4}{k\nu^2},\quad P=\frac{c_v\rho\nu}{k},\quad P_m=\frac{\nu_m}{\nu},\quad R=GP$$

где r_0 — радиус канала, $H_0=H_\theta(r_0)=2\pi r_0j/c$. Тогда, переходя к цилиндрическим координатам и отбрасывая штрихи при безразмерных величинах, получим вместо (1.5) — (1.7)

$$\begin{gathered}\triangle t+P\Phi=0,\qquad \triangle t_e=0\qquad \left(\triangle=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\\ -Gt=\frac{M^2}{P_m}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}+\triangle v,\qquad P_m\frac{\partial v}{\partial\theta}+\triangle H_z=0\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}v=H_z=0,\qquad t=t_e,\quad \frac{\partial t}{\partial r}=\chi\frac{\partial t_e}{\partial r}\qquad \text{при } r=1\\ \frac{\partial t_e}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial t_e}{\partial\theta}\sin\theta\to-1\qquad \text{при } r\to\infty\end{gathered}\tag{3.2}$$

Дополним эту систему условием равенства нулю расхода жидкости

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 rv(r,\ \theta)\,dr\,d\theta=0\tag{3.3}$$

Решение будем искать в виде

$$\begin{gathered}v=u_0(r)+u_1(r)\cos\theta,\qquad H_z=h_0(r)+h_1(r)\sin\theta\\ t=t_0(r)+t_1(r)\cos\theta,\qquad t_e=t_{e0}(r)+t_{e1}(r)\cos\theta\end{gathered}$$

Уравнения (3.1) приводятся тогда к обыкновенным и их решение записывается с помощью функций Томсона. Окончательный результат имеет вид

$$\begin{gathered}v=\frac{GP\Phi}{192}(3r^4-4r^2+1)-\frac{2G\chi\cos\theta}{M(1+\chi)}\frac{\operatorname{ber}_1 r\sqrt{M}\operatorname{bei}_1\sqrt{M}-\operatorname{bei}_1 r\sqrt{M}\operatorname{ber}_1\sqrt{M}}{\operatorname{ber}_1^2\sqrt{M}+\operatorname{bei}_1^2\sqrt{M}}\\ H_z=\frac{2P_mG\chi\sin\theta}{M^2(1+\chi)}\left(r-\frac{\operatorname{ber}_1 r\sqrt{M}\operatorname{ber}_1\sqrt{M}+\operatorname{bei}_1 r\sqrt{M}\operatorname{bei}_1\sqrt{M}}{\operatorname{ber}_1^2\sqrt{M}+\operatorname{bei}_1^2\sqrt{M}}\right)\\ t=\frac{P\Phi}{12}(1-3r^2)-\frac{2\chi}{1+\chi}r\cos\theta\\ t_e=-\frac{P\Phi}{6}\left(1+\frac{3\ln r}{\chi}\right)-\left(r-\frac{1-\chi}{1+\chi}\frac{1}{r}\right)\cos\theta\end{gathered}\tag{3.4}$$

Осесимметричная часть найденного решения не зависит от напряженности магнитного поля и определяется только величиной джоулевой диссипации Ф. Вследствие этого скорость на оси канала также зависит только от Ф

$$v=\frac{GP\Phi}{192}\qquad \text{при } r=0$$

При больших значениях M и $r \neq 0$, воспользовавшись асимптотическими представлениями ($|z| \gg 1$)

$$\operatorname{ber}_1 z \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\operatorname{bei}_1 z \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right)$$

получим

$$v \sim \frac{GP\Phi}{192}(3r^4 - 4r^2 + 1) - \frac{2G\chi\cos\theta}{M(1+\chi)\sqrt{r}} \exp\left[\sqrt{\frac{M}{2}}(r-1)\right] \sin\left[\sqrt{\frac{M}{2}}(1-r)\right]$$

$$H_z \sim \frac{2P_m G\chi\sin\theta}{M^2(1+\chi)}\left\{r - \frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left[\sqrt{\frac{M}{2}}(r-1)\right]\cos\left[\sqrt{\frac{M}{2}}(1-r)\right]\right\} \qquad (3.5)$$

Первая из этих формул показывает, что магнитное поле подавляет асимметричную часть потока.

Непосредственным вычислением легко убедиться, что для идеально проводящей жидкости задача (3.1)—(3.3) не имеет решения. Это означает, что при наличии бокового притока тепла и азимутального магнитного поля течение идеально проводящей жидкости не может быть прямолинейным.

Поступила 27 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой электропроводящей жидкости в магнитном поле. Физ. металлов и металловед., 1958, т. VI, вып. 3.
2. Cramer K. R. Magnetohydrodynamic free convection pipe flow. J. Aero/Space Sci., 1961, vol. 28, N 9.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Стационарное конвективное движение электропроводящей жидкости между параллельными плоскостями в магнитном поле. ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 3.
4. Регирер С. А. О конвективном движении проводящей жидкости между параллельными вертикальными пластинами в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 1 (7).
5. Регирер С. А. О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
6. Бугаенко Г. А. О свободной тепловой конвекции в вертикальном цилиндре произвольного сечения. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 4.
7. Якубенко А. Е. Стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости по трубам в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1961, № 1.
8. Гринберг Г. А. Об установившемся движении проводящей жидкости по трубам, находящимся в магнитном поле. ЖТФ, 1961, т. 31, вып. 1.