УДК 539.3

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. Роговой, О. С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mails: rogovoy@icmm.ru, sos@kig.pstu.ac.ru

С использованием формализованного подхода к построению определяющих соотношений сложных сред при конечных деформациях в предположении близости промежуточной и текущей конфигураций получено уравнение состояния термоупругости. Сформулирована вариационная постановка связанной термоупругой задачи. Определяющее уравнение, уравнение теплопроводности, соотношения для внутренней, свободной энергии и энтропии, а также вариационная постановка связанной задачи термоупругости при конечных деформациях протестированы на задаче одноосного растяжения стержня. Модель удовлетворительно описывает такие известные для эластомеров экспериментальные факты, как энтропийная упругость, температурная инверсия и изменение температуры в адиабатическом процессе.

Ключевые слова: термоупругость, конечные деформации, слабая сжимаемость, определяющие уравнения, уравнение теплопроводности, тестирование модели.

Введение. В работах [1–5] в рамках кинематики, определяемой наложением упруго-неупругих градиентов места (переводящих промежуточную конфигурацию в близкую текущую) на конечные упруго-неупругие (переводящие начальную конфигурацию в промежуточную), построено разложение полного градиента места на упругий, неупругий и температурный, совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего. На основе законов термодинамики и принципа объективности показано, что неупругий и температурный градиенты места должны быть чистыми деформациями без вращений. С учетом этого требования получена недостающая связь между малыми неупругими деформациями e_{IN}, для которых известно определяющее соотношение, и малыми неупругими вращениями d_{IN}, а также между малыми температурными деформациями e_Θ с известным определяющим соотношением и малыми температурными вращениями d_Θ. Получены вытекающие из термодинамики соотношения для напряжений и энтропии и построено уравнение теплопроводности. Уравнения состояния для конечных термоупруго-неупругих деформаций записаны относительно промежуточной конфигурации, близкой к текущей. При этом константы, содержащиеся в тензоре четвертого ранга, который определяет свойства материала в промежуточной конфигурации и зависит только от упругой кинематики, полагались функциями температуры и скалярных структурных параметров, определяемых неупругой кинематикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00050) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8055.2006.1), а также в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН и Интеграционной программы УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

В данной работе построена модель поведения термоупругой среды при конечных деформациях, основанная на теоретических положениях, перечисленных выше, и проведено тестирование этой модели на простейшей задаче, для которой имеется большое количество экспериментальных данных.

Как отмечено в работе [6], конечные деформации в термоупругости — это уже классическая и хорошо развитая теория нелинейной механики сплошных сред. В основополагающих работах дается термодинамическое обоснование предлагаемых в них кинематик для описания термоупругого процесса (см., например, работы [6–8], а также библиографию к ним). В настоящей работе получены соотношения термоупругости в рамках общего подхода к построению определяющих уравнений упруго-неупругих сред при конечных деформациях [1–5], основанного на кинематике, построенной в предположении близости промежуточной и текущей конфигураций, и позволяющего описать упругопластические [1] и вязкоупругие [2] процессы. Упругое поведение материала описывается соотношением, позволяющим с помощью одного из обобщенных модулей упругости учитывать как слабую сжимаемость, так и несжимаемость материала, а также зависимость "объемного модуля" и "модуля сдвига" от изменения объема [9–12].

1. Определяющее уравнение термоупругости и уравнение теплопроводности. В работах [1–3] в рамках кинематики, определяемой наложением малых деформаций (градиентов места) на конечные, построены эквивалентные формы уравнений состояния для конечных упруго-неупругих деформаций относительно промежуточной конфигурации, близкой к текущей, в случае, когда константы упругого потенциала не зависят от неупругих деформаций. Используем подход, развиваемый в [1–3], для построения уравнения состояния термоупругого материала в промежуточной конфигурации. В работе [3] тензор истинных напряжений представляется в виде

$$T = 4J^{-1}F \cdot \Big[\int\limits_0^t \Big(F \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^{\mathrm{T}} \Big) \cdot\cdot D_E d\tau \Big] \cdot F^{\mathrm{T}}. \tag{1.1}$$

Здесь F — полный (в данном случае термоупругий) градиент места; $J = I_3(F)$ — третий инвариант F (якобиан, определяющий относительное изменение объема); C_E — мера Коши — Грина упругих деформаций; $D_E = \dot{e}_E$ — деформация скорости упругих перемещений, в данном случае совпадающая со скоростью упругих деформаций; W — упругий потенциал, константы которого в соответствии с работой [3] в случае термоупругого процесса зависят от абсолютной температуры Θ как от параметра: $\Theta = \Theta(t)$. Операция $A \overset{3}{\circ} B^{\mathrm{IV}}$ означает скалярное умножение слева тензора второго ранга A на третий базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV}. Согласно [3–5] кинематические тензоры определяются выражениями

$$F = F_E \cdot F_\Theta = (g + \varepsilon h) \cdot F_* = [g + \varepsilon(h_E + h_\Theta)] \cdot F_*, \qquad F_* = F_{E*} \cdot F_{\Theta*}. \tag{1.2}$$

Здесь и далее величины с индексом "$*$" соответствуют промежуточной конфигурации (моменту времени t_*), а без него — близкой текущей конфигурации (моменту времени t), причем близость этих конфигураций характеризуется малой положительной величиной ε; g — единичный тензор; $h = h_E + h_\Theta$, h_E, h_Θ — градиенты векторов малых полных, упругих и температурных перемещений относительно промежуточной конфигурации (эти градиенты представляются в виде суммы симметричных градиентов e, e_E, e_Θ (малые полные, упругие и температурные деформации) и кососимметричных градиентов d, d_E, d_Θ (малые полные, упругие и температурные вращения), причем $e = e_E + e_\Theta$, $d = d_E + d_\Theta$); $C_E = F_E^{\mathrm{T}} \cdot F_E$; F_E, F_Θ — упругий и температурный градиенты места, записанные в виде

$$F_E = (g + \varepsilon h_E) \cdot F_{E*}, \qquad F_\Theta = (g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*}) \cdot F_{\Theta*}.$$

Градиент F_Θ есть чистая деформация без вращений, т. е. в полярном разложении $F_\Theta = R_\Theta \cdot U_\Theta$, ортогональный тензор $R_\Theta = g$. Как показано в работе [5], в предположении, что e_Θ определяется законом линейного температурного расширения $e_\Theta = \beta\theta g$, где β — коэффициент линейного температурного расширения; θ — малое изменение температуры, имеем $d_\Theta = 0$. Так как $d = d_E + d_\Theta$, то $d_E = d$. В результате получаем

$$F_E = [g + \varepsilon(h - \beta\theta)] \cdot F_{E*}, \qquad F_\Theta = U_\Theta = (1 + \varepsilon\beta\theta)U_{\Theta*}. \tag{1.3}$$

Интеграл от 0 до t в соотношении (1.1) представим в виде двух интегралов: от 0 до t_* и от t_* до момента времени t, близкого к t_*, а температуру, являющуюся одним из аргументов упругого потенциала W и зависящую от текущего времени t, — в виде $\Theta = \Theta_* + \varepsilon\theta$. Тогда

$$\frac{\partial^2 W(\Theta)}{\partial C_E^2} = \frac{\partial^2 W(\Theta_* + \varepsilon\theta)}{\partial C_E^2} = \frac{\partial^2 W(\Theta_*)}{\partial C_E^2} + \varepsilon\theta \frac{\partial^3 W(\Theta)}{\partial\Theta\,\partial C_E^2}\Big|_{\Theta=\Theta_*}.$$

В результате, учитывая соотношения (1.2) и применяя процедуру, аналогичную используемой при выводе выражения (4.7) в работе [3], определяющее уравнение (1.1) относительно промежуточной конфигурации запишем в виде

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e)]T_* + \varepsilon h \cdot T_* + \varepsilon T_* \cdot h^{\text{т}} + \varepsilon\theta(T_{,\Theta})_* + \varepsilon\tilde{L}_6^{\text{IV}} \cdot\cdot\, e_E. \tag{1.4}$$

Это приближенное уравнение сводится к эволюционному дифференциальному с объективной производной Трусделла

$$T^{\text{Tr}} = \dot{\theta}T_{,\Theta} + L_6^{\text{IV}} \cdot\cdot\, \dot{e}_E, \tag{1.5}$$

причем $\dot{\theta} = \dot{\Theta}$. В соотношении (1.4) T_*, $(T_{,\Theta})_*$ — истинные напряжения и их производные по температуре в промежуточной конфигурации; I_1 — первый инвариант; $\tilde{L}_6^{\text{IV}}$ — тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации:

$$\tilde{L}_6^{\text{IV}} = 4J_*^{-1}F_* \cdot \Big(F_* \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2}\Big|_{\substack{C_E=C_{E*}\\ \Theta=\Theta_*}} \overset{2}{*} F_*^{\text{т}}\Big) \cdot F_*^{\text{т}}, \tag{1.6}$$

причем операция $B^{\text{IV}} \overset{2}{*} A$ означает скалярное умножение справа тензора второго ранга A на второй базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV}. В соотношении (1.5) тензор четвертого ранга L_6^{IV} определяет отклик материала на скорости упругих деформаций относительно текущей конфигурации и записывается в виде (1.6), где все кинематические величины и температура определены не в промежуточной конфигурации, а в текущей.

Легко показать, что тензор $T_{,\Theta} \equiv \partial T/\partial\Theta$ в выражении (1.5) представляется в виде

$$\begin{gathered} T_{,\Theta} = [1 - \varepsilon I_1(e)](T_{,\Theta})_* + \varepsilon h \cdot (T_{,\Theta})_* + \varepsilon(T_{,\Theta})_* \cdot h^{\text{т}} + \varepsilon\theta(T_{,\Theta\Theta})_* + \varepsilon\tilde{L}_{6,\Theta}^{\text{IV}} \cdot\cdot\, e_E, \\ \tilde{L}_{6,\Theta}^{\text{IV}} = 4J_*^{-1}F_* \cdot \Big(F_* \overset{3}{\circ} \frac{\partial^3 W}{\partial\Theta\,\partial C_E^2}\Big|_{\substack{C_E=C_{E*}\\ \Theta=\Theta_*}} \overset{2}{*} F_*^{\text{т}}\Big) \cdot F_*^{\text{т}}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) аналогично (1.4). Структура соотношений (1.4), (1.6) и (1.17) показывает, каким образом можно построить производные от напряжения по температуре более высокого порядка.

Для описания конечных деформаций среды, которая в начальном состоянии является изотропным слабосжимаемым упругим материалом, будем использовать упругий потенциал

$$W = \hat{W} + \sigma(J_E^2 - 1) - \alpha(\sigma - \chi_1)^2/2, \qquad J_E = I_{3E}(F_E),$$

предложенный в работах [9–12]. Здесь

$$\hat{W} = k_1(\hat{I}_1 - 3) + k_2(\hat{I}_2 - 3), \qquad \sigma = \chi_1 + \chi_2(J_E^2 - 1),$$
$$\chi_1 = p_1(\hat{I}_1 - 3) + p_2(\hat{I}_2 - 3), \qquad \chi_2 = \chi_{20} + q_1(\hat{I}_1 - 3) + q_2(\hat{I}_2 - 3),$$
$$\hat{I}_1 = I_{1E} - (I_{3E} - 1), \qquad \hat{I}_2 = I_{2E} - 2(I_{3E} - 1), \qquad \alpha = 1/\chi_2,$$

I_{1E}, I_{2E}, $I_{3E} = J_E^2$ — инварианты тензора $C_E = F_E^{\text{т}} \cdot F_E$; k_1, k_2, p_1, p_2, q_1, q_2, χ_{20} — параметры материала, для которых, как показано в работах [9–12], справедливы соотношения $2(k_1 + k_2) = G$, $p_i = p_{i0}G$, $q_i = q_{i0}G$ при $i = 1, 2$; G — модуль сдвига. Тогда, учитывая соотношение (1.6), последнее слагаемое в (1.4) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\tilde{L}_6^{\text{IV}} \cdot\cdot\, e_E = 4J_*^{-1}\{(c_1 - \sigma_*)I_{3E*}[Y \cdot e_E \cdot Y - Y(Y \cdot\cdot\, e_E)] + \\
+ I_{3E*}[Y(\Phi_* \cdot\cdot\, e_E) + (\Phi_* - 2I_{3E*}Y)(Y \cdot\cdot\, e_E)]G[p_{10} + q_{10}(I_{3E*} - 1)] + \\
+ [\Phi_*(\Phi_* \cdot\cdot\, e_E) - \Phi_* \cdot e_E \cdot \Phi_* + 2I_{3E*}(Y \cdot e_E \cdot Y - (Y \cdot\cdot\, e_E)Y)]c_2 + \\
+ I_{3E*}[I_{1E*}Y(\Phi_* \cdot\cdot\, e_E) - Y(X \cdot\cdot\, e_E) + \\
+ (I_{1E*}\Phi_* - X - 4I_{3E*}Y)(Y \cdot\cdot\, e_E)]G[p_{20} + q_{20}(I_{3E*} - 1)] + \\
+ I_{3E*}^2[\chi_{20} + G(q_{10}(\hat{I}_{1E*} - 3) + q_{20}(\hat{I}_{2E*} - 3))]Y(Y \cdot\cdot\, e_E)\}, \\
c_i = k_i + G[p_{i0} + (1/2)q_{i0}(I_{3E*} - 1)](I_{3E*} - 1) \qquad (i = 1, 2), \\
\sigma_* = \chi_{20}(I_{3E*} - 1) + G\{[p_{10} + q_{10}(I_{3E*} - 1)](\hat{I}_{1E*} - 3) + [p_{20} + q_{20}(I_{3E*} - 1)](\hat{I}_{2E*} - 3)\},
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $Y = F_* \cdot C_{E*}^{-1} \cdot F_*^{\text{т}}$; $X = F_* \cdot C_{E*} \cdot F_*^{\text{т}}$; $\Phi_* = F_* \cdot F_*^{\text{т}}$ — тензор меры деформаций Фингера, инварианты которого совпадают с соответствующими инвариантами тензора C_*. Представляя в соотношении (1.8) малые упругие деформации в виде разности малых полных и температурных деформаций $e_E = e - e_\Theta$, завершаем построение определяющего уравнения (1.4), описывающего термоупругое поведение материала при конечных упругих (слабосжимаемый материал) и температурных деформациях.

Будем считать, что от температуры зависят модуль сдвига G (а значит, и величины p_1, p_2, q_1, q_2) через параметры материала k_1 и k_2 и величина χ_{20}. Представим эту зависимость в общем виде:

$$\begin{gathered}
\gamma_i = \gamma_{i0} + \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta} \gamma_{i1}(\Theta_1)\, d\Theta_1 = \gamma_{i*} + \varepsilon\gamma_{i1*}\theta, \qquad \theta = \Theta - \Theta_*, \\
\gamma_{i*} = \gamma_{i0} + \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta_*} \gamma_{i1}(\Theta_1) d\Theta_1, \qquad \gamma_{i1*} = \gamma_{i1}(\Theta_*)
\end{gathered} \tag{1.9}$$

(Θ_0 — абсолютная температура в начальный для всего процесса момент времени). Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}
\gamma_{i,\Theta} = \gamma_{i1}(\Theta) = \gamma_{i1}(\Theta_* + \varepsilon\theta) = \gamma_{i1*} + \varepsilon\gamma_{i2*}\theta, \qquad \gamma_{i2*} = \gamma_{i1,\Theta}\big|_{\Theta=\Theta_*}, \\
\gamma_{i,\Theta\Theta} = \gamma_{i1,\Theta} = \gamma_{i2}(\Theta_* + \varepsilon\theta) = \gamma_{i2*} + \varepsilon\gamma_{i3*}\theta, \qquad \gamma_{i3*} = \gamma_{i2,\Theta}\big|_{\Theta=\Theta_*}
\end{gathered} \tag{1.10}$$

и т. д. Пусть $\gamma_1 = k_1$, $\gamma_2 = k_2$, $\gamma_3 = \chi_{20}$, $\gamma_4 = G = 2(k_1 + k_2) = 2(\gamma_1 + \gamma_2)$. Тогда в соотношении (1.6) константы k_1, k_2, χ_{20}, G, входящие в выражения (1.8), в соответствии с (1.9) следует заменить величинами k_{1*}, k_{2*}, χ_{20*}, G_*, а в соотношении (1.7) в соответствии с (1.10) — величинами k_{11*}, k_{21*}, χ_{201*}, G_{1*} и т. д. Это позволяет вычислять тензоры T (1.4), $T_{,\Theta}$ (1.7) и производные от напряжения по температуре более высокого порядка, используя единый алгоритм.

Аналогично тому как были построены рекуррентные соотношения (1.4), (1.7), можно построить рекуррентное соотношение для функционала W_1, полученного в работах [3, 4]:

$$W_1 = \int\limits_0^t JT(\Theta) \cdot\cdot D_E \, d\tau = \int\limits_0^{t_*} JT(\Theta_* + \varepsilon\theta) \cdot\cdot D_E \, d\tau + \int\limits_{t_*}^t JT(\Theta) \cdot\cdot D_E \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t_*} J[T(\Theta_*) + \varepsilon T_{,\Theta}(\Theta_*)\theta] \cdot\cdot D_E \, d\tau + \varepsilon J_* T_* \cdot\cdot e_E.$$

Отсюда следует соотношение

$$W_1 = W_{1*} + \varepsilon\theta(W_{1,\Theta})_* + \varepsilon J_* T_* \cdot\cdot e - \varepsilon\beta_*\theta J_* I_1(T_*), \tag{1.11}$$

а также легко получаемое и обобщаемое на производные по температуре более высокого порядка соотношение

$$W_{1,\Theta} = (W_{1,\Theta})_* + \varepsilon\theta(W_{1,\Theta\Theta})_* + \varepsilon J_*(T_{,\Theta})_* \cdot\cdot e - \varepsilon\beta_*\theta J_* I_1((T_{,\Theta})_*). \tag{1.12}$$

При выводе (1.11), (1.12) учтено, что $e_E = e - e_\Theta = e - \beta\theta g$.

В случае термоупругости уравнение теплопроводности, полученное в [4] (соотношение (2.12)), имеет вид

$$\begin{gathered} A\dot\Theta + B\Theta = \rho\dot\Omega + \tilde\nabla \cdot (\lambda\tilde\nabla\Theta), \\ A = \Theta\big(\beta_{,\Theta} I_1(T) + \beta I_1(T_{,\Theta}) - J^{-1} W_{1,\Theta\Theta}\big) + J^{-1}\rho_0 c_T, \\ B = \beta(I_1(T) I_1(D) + I_1(\dot T)) - T_{,\Theta} \cdot\cdot D. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь ρ_0, ρ — плотность массы в недеформированной и текущей конфигурациях; c_T — теплоемкость при нулевом напряжении; $\dot\Omega$ — скорость производства тепла внутренними источниками в единице массы; λ — теплопроводность; $\tilde\nabla$ — оператор Гамильтона в текущей конфигурации. При выводе выражений для A и B из соотношения (2.12) в [4] учтено, что

$$\frac{d}{dt}(W_{1,\Theta}) = \dot\theta W_{1,\Theta\Theta} + JT_{,\Theta} \cdot\cdot D - \beta\dot\theta J I_1(T_{,\Theta}). \tag{1.14}$$

Последняя зависимость следует из уравнения (1.12), записанного в виде

$$\Delta W_{1,\Theta} = W_{1,\Theta} - (W_{1,\Theta})_* = (W_{1,\Theta\Theta})_*\Delta\Theta + J_*(T_{,\Theta})_* \cdot\cdot \Delta e - \beta_* J_* I_1((T_{,\Theta})_*)\Delta\Theta$$

($\Delta W_{1,\Theta}$ — приращение $W_{1,\Theta}$; $\Delta\Theta = \varepsilon\theta$ — приращение температуры Θ; $\Delta e = \varepsilon e$ — приращение деформации), в результате деления его левой и правой частей на приращение времени Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ в предположении, что все пределы существуют.

Граничные условия для уравнения теплопроводности (1.13) запишем в виде

$$\Theta\big|_{S_\Theta} = \Theta_S, \qquad \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{q}\big|_{S_q} = q_n, \qquad S = S_\Theta \cup S_q,$$

где $\boldsymbol{N}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности в текущей конфигурации; S — полная поверхность тела в текущей конфигурации; а части поверхности S_Θ и S_q могут быть пустыми множествами. Полагая, что тепловой поток $\boldsymbol{q}$ подчиняется закону Фурье $\boldsymbol{q} = -\lambda\tilde\nabla\Theta$, находим граничные условия первого и второго рода

$$\Theta\big|_{S_\Theta} = \Theta_S, \qquad -\boldsymbol{N} \cdot \lambda\tilde\nabla\Theta\big|_{S_q} = q_n. \tag{1.15}$$

Полагая $q_n = \alpha_s(\Theta - \Theta_c)$ (α_s — коэффициент теплопередачи; Θ_c — абсолютная температура окружающей среды), получаем граничные условия третьего рода. Начальные условия для уравнения теплопроводности следующие: $\Theta(\boldsymbol{x}, t_0) = \Theta_0(\boldsymbol{x})$.

2. Вариационная постановка связанной задачи термоупругости. Соотношения, описывающие квазистатические термоупругие процессы в теле, содержат уравнение равновесия, кинематическое и определяющее уравнения, граничные условия (в общем случае смешанные) для перемещений на поверхности S_u и напряжений на поверхности S_p, а также уравнение теплопроводности (1.13) с граничными (1.15) и начальным условиями. Применяя стандартную процедуру Галеркина к уравнениям равновесия, теплопроводности и к граничным условиям для напряжений и температуры в форме (1.15), а также учитывая связи, наложенные на перемещения на поверхности S_u и температуру на поверхности S_Θ, при условии независимости вариаций перемещений и температуры получаем известную слабую (вариационную) связанную постановку термоупругой задачи в обобщенной форме Лагранжа для начальной конфигурации и любого момента времени t:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} P_{\mathrm{II}} \cdot\cdot\, \delta C\, dV_0 - \int\limits_{V_0} \rho_0 \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, dV_0 - \int\limits_{S_0} J_s \boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{u}\, dS_0 = 0,$$
$$\int\limits_{V_0} J[\lambda \nabla\Theta \cdot C^{-1} \cdot \delta(\nabla\Theta) + (A\dot{\Theta} + B\Theta)\delta\Theta]\, dV_0 - \int\limits_{V_0} \rho_0 \dot{\Omega} \delta\Theta\, dV_0 + \int\limits_{S_0} J_s q_n \delta\Theta\, dS_0 = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь V_0, S_0 — объем и полная поверхность тела в начальной конфигурации; P_{II} — симметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа; C — мера полных деформаций Коши — Грина; $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{p}$ — массовые и поверхностные силы; $\boldsymbol{u}$ — вектор полных перемещений; $J_s = J\sqrt{\boldsymbol{n} \cdot C^{-1} \cdot \boldsymbol{n}}$ — якобиан, определяющий относительное изменение текущей и начальной поверхностей; $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности в начальной конфигурации; ∇ — оператор Гамильтона в начальной конфигурации. Учитывая, что $P_{\mathrm{II}} = JF^{-1} \cdot T \cdot F^{-\mathrm{т}}$, из соотношения (1.4) получаем

$$P_{\mathrm{II}} = (P_{\mathrm{II}})_* + \varepsilon\theta(P_{\mathrm{II},\Theta})_* + \varepsilon J_* F_*^{-1} \cdot (\tilde{L}_6^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot\, e_E) \cdot F_*^{-\mathrm{т}}. \qquad (2.2)$$

3. Тестирование модели. Тестирование построенных в работе определяющего уравнения и уравнения теплопроводности, а также соотношений для свободной энергии и энтропии, полученных в работе [4], осуществлено на простой задаче о растяжении стержня (одноосное напряженное состояние), для которой имеется большое количество экспериментальных данных. Рассматриваются только такие процессы, в которых поля напряжений и температуры однородны. Несмотря на то что поля однородные, для решения задачи используются вариационные уравнения (2.1), что является дополнительным их тестированием.

Процесс растяжения вдоль оси z прямолинейного стержня, материал которого в начальном состоянии изотропный, разобьем на ряд достаточно малых шагов. Тогда в декартовой системе координат положение точки на n-м шаге (в промежуточной конфигурации) и на $(n+1)$-м шаге (в текущей конфигурации, близкой к промежуточной) определяется радиус-векторами

$$\boldsymbol{R}_* = \alpha_{1*}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) + \alpha_{2*} z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{R} = \alpha_1(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) + \alpha_2 z\boldsymbol{k}.$$

Здесь орт $\boldsymbol{k}$ направлен вдоль оси стержня, а два других орта лежат в плоскости его поперечного сечения; $\alpha_1 = \alpha_{1*} + \varepsilon\xi$, $\alpha_2 = \alpha_{2*} + \varepsilon\eta$ и α_{1*}, α_{2*} — относительные удлинения стержня в поперечном и осевом направлениях в текущей и промежуточной конфигурациях соответственно; ξ, η — их приращения. При этом α_{2*}, η — заданные величины, а α_{1*} —

величина, известная из решения задачи на предыдущем шаге. Как и выше, близость промежуточной и текущей конфигураций определяется малым положительным параметром ε. Из данных соотношений находим вектор перемещений, переводящий промежуточную конфигурацию в текущую:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_* = \xi(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) + \eta z\boldsymbol{k}.$$

С использованием стандартной процедуры построим оператор Гамильтона относительно промежуточной конфигурации:

$$\overset{*}{\nabla} = \frac{1}{\alpha_{1*}}\Big(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big) + \frac{1}{\alpha_{2*}}\,\boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

и определим тензор полных малых деформаций, возникающий при переходе из промежуточной конфигурации в текущую:

$$e = \frac{\xi}{\alpha_{1*}}\,(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + \frac{\eta}{\alpha_{2*}}\,\boldsymbol{kk}.$$

Градиент места представляется в виде

$$F = (\nabla \boldsymbol{R})^{\text{т}} = F_* + \varepsilon[\xi(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + \eta\boldsymbol{kk}], \qquad F_* = \alpha_{1*}(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + \alpha_{2*}\boldsymbol{kk}, \tag{3.1}$$

а мера деформаций Коши — Грина $C = F^{\text{т}} \cdot F$ — в виде

$$C = C_* + 2\varepsilon[\alpha_{1*}\xi(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + \alpha_{2*}\eta\boldsymbol{kk}], \qquad C_* = \alpha_{1*}^2(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + \alpha_{2*}^2\boldsymbol{kk}.$$

Здесь удержаны только линейные слагаемые относительно ε. Из последнего соотношения находим вариацию меры деформаций Коши — Грина

$$\delta C = 2\alpha_{1*}\,\delta\xi\,(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}), \tag{3.2}$$

так как величины с индексом “$*$” и η заданы (их вариации равны нулю).

В силу нулевых внешних усилий на боковых поверхностях стержня и однородности поля напряжений в тензоре истинных напряжений отличны от нуля только осевые составляющие $T = T^{33}\boldsymbol{kk}$. С учетом соотношений (3.1) отсюда следует, что второй тензор Пиолы — Кирхгофа имеет такое же представление $P_{\text{II}} = P_{\text{II}}^{33}\boldsymbol{kk}$ как в текущей, так и в промежуточной конфигурациях. В результате, принимая во внимание соотношение (3.2), первое вариационное уравнение в (2.1) можно свести к уравнению $(P_{\text{II}}^{11} + P_{\text{II}}^{22})\delta\xi = 0$, которое в силу произвольности $\delta\xi$ с учетом соотношения (2.2) и зависимости $e_E = e - \beta\theta g$ записывается в виде

$$\begin{gathered} a_{11}\xi/\alpha_{1*} + a_{12}\theta = b_1\eta/\alpha_{2*}, \qquad a_{11} = Q^{11}(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + Q^{22}(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}), \\ a_{12} = (P_{\text{II},\Theta}^{11})_* + (P_{\text{II},\Theta}^{22})_* - \beta_*(Q^{11}(g) + Q^{22}(g)), \\ b_1 = -[Q^{11}(\boldsymbol{kk}) + Q^{22}(\boldsymbol{kk})]. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $Q^{kl}(M)$ — составляющие тензора второго ранга Q, записанного в декартовом базисе и зависящего от тензора второго ранга M: $Q(M) = J_* F_*^{-1} \cdot K(M) \cdot F_*^{-\text{т}}$. Тензор второго ранга $K(M) = \tilde{L}_6^{\text{IV}} \cdot\cdot\, M$ легко вычислить, используя соотношение (1.8), в котором тензор e_E заменяется на соответствующий тензор M, равный $\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}$, $\boldsymbol{kk}$ или единичному тензору g. В случае изотермического процесса второе уравнение в (2.1) исчезает, так как температура (однородная) задана (поэтому $\delta\Theta = 0$), и в уравнении (3.3) остается только одна неизвестная ξ. Если процесс адиабатический и температурное поле однородное, то во втором уравнении в (2.1) $q_n = 0$, $\nabla\Theta = 0$ и это уравнение приводится к виду $(A\dot{\Theta} + B\Theta - \rho_0\dot{\Omega})\delta\Theta = 0$. Следовательно, в силу произвольности $\delta\Theta$ выражение в скобках должно быть равно нулю. Умножая это выражение на малую величину Δt — время перехода из промежуточной конфигурации в текущую и учитывая выражения (1.13) для коэффициентов A и B, связь между малыми полными, упругими и температурными деформациями, а также соотношения $\dot{\Theta}\Delta t = \varepsilon\theta$, $D\Delta t = \varepsilon e$, $\dot{T}\Delta t = \varepsilon\Gamma$ ($\varepsilon\Gamma$ — правая часть выражения (1.4), не содержащая T_*) и $\dot{\Omega}\Delta t = \varepsilon\omega$, получаем

$$a_{21}\xi/\alpha_{1*} + a_{22}\theta = b_2\eta/\alpha_{2*} + \rho_0\omega, \quad a_{21} = \Theta_*[\beta_* I_1(K(\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj})) - (T_{,\Theta})_* \cdot\cdot (\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj})],$$
$$a_{22} = \Theta_*[(\beta_{,\Theta})_* I_1(T_*) + 2\beta_* I_1((T_{,\Theta})_*) - \beta_*^2 I_1(K(g)) - J_*^{-1}(W_{1,\Theta\Theta})_*] + J_*^{-1}\rho_0(c_T)_*, \tag{3.4}$$
$$b_2 = -\Theta_*\{\beta_*[2T_*^{33} + I_1(K(\boldsymbol{kk}))] - (T_{,\Theta})_* \cdot\cdot \boldsymbol{kk}\}.$$

Решив на $(n+1)$-м шаге уравнение (3.3) (в случае изотермического процесса) или систему (3.3), (3.4) (в случае адиабатического процесса) и зная в результате приращения удлинения ξ и температуры θ, по соотношениям (1.3) и (3.1) определим упругий и полный градиенты места, по соотношениям (1.4) и (1.7) — тензор напряжений и производную от него по температуре, по соотношениям (1.11) и (1.12) — функционал W_1 и производную от него по температуре, которые будут начальными на следующем шаге.

При численном расчете начальная температура Θ_0 полагалась равной 293 К. Константы материала при этой температуре, взятые из работ [10–12] для резины марки 2959, имели следующие значения: $k_1 \overset{(1.9)}{=} k_{10} = 0{,}25$ МПа, $k_2 \overset{(1.9)}{=} k_{20} = 0{,}25$ МПа, $p_{10} = 1$, $p_{20} = 0{,}425$, $q_{10} = 374$, $q_{20} = 300$, $\chi_{20} \overset{(1.9)}{=} \chi_{200} = 770$ МПа. Здесь запись $\overset{(1.9)}{=}$ означает “равно в соответствии с соотношением (1.9)”. В интервале $[\Theta_0, \Theta_0 + 100\ \text{К}]$ принимается линейная зависимость k_1, k_2 и χ_{20} от температуры. В обозначениях, принятых в (1.9), это означает, что $k_{11}(\Theta), k_{21}(\Theta)$ и $\chi_{201}(\Theta)$ — постоянные. Принимались следующие значения этих постоянных: $k_{11} = k_{21} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ МПа/К, $\chi_{201} = -2$ МПа/К. Так как через константы k_1 и k_2 определяется начальный модуль сдвига $G = 2(k_1 + k_2)$, то и он оказывается линейно зависимым от температуры, что согласуется как с экспериментальными данными (см., например, [13]), так и с выводами, полученными на основе положений статистической физики (см., например, [14]): $G = Nk\Theta$ (N — число цепей в эластомерной сетке на единицу объема; k — постоянная Больцмана). Последнее соотношение представляется в виде $G = G_0 + (G_0/\Theta_0)(\Theta - \Theta_0)$, где $G_0 = Nk\Theta_0$. Этому соотношению ставится в соответствие выражение $G = 2(k_{10} + k_{20}) + 2(k_{11} + k_{21})(\Theta - \Theta_0)$. Из равенства коэффициентов при $\Theta - \Theta_0$ в нулевой и первой степени в этих соотношениях, полагая $k_{11} = k_{21}$, получаем приведенные выше значения k_{11} и k_{21} для заданных величин k_{10} и k_{20}.

В работе [15] для такой же резины приведены экспериментальные данные об изменении объемного модуля в зависимости от температуры. Показано, что при изменении температуры от Θ_0 до $\Theta_0 + 110$ К объемный модуль уменьшается на 28 % и это изменение можно считать линейным в пределах доверительного интервала эксперимента. С учетом этих данных определено значение коэффициента χ_{201}. В рассматриваемом интервале температур коэффициент линейного температурного расширения β полагался неизменным (авторы настоящей работы не располагают данными о его температурной зависимости) и равным $13{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$ [16]. Начальная плотность материала $\rho_0 = 1{,}21 \cdot 10^3$ кг/м^3 [16]. Значение коэффициента удельной (на единицу массы) теплоемкости при нулевом напряжении c_T взято из справочника [17]. Предполагалась его линейная зависимость от температуры в рассматриваемом интервале ее изменения. В обозначениях, использованных в соотношении (1.9), принималось, что $c_{T0} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ МДж/(кг $\cdot$ К), $c_{T1} = 0{,}01 \cdot 10^{-3}$ МДж/(кг $\cdot$ К^2).

Стержень растягивался в 1,8 раза с постоянной скоростью удлинения, равной 0,1 с$^{-1}$, в течение 1000 шагов. На рис. 1 показано изменение температуры в процессе адиабатического растяжения стержня. Результаты, приведенные на рис. 1, хорошо согласуются с данными работы [18], причем не только качественно, но и количественно. Количественное

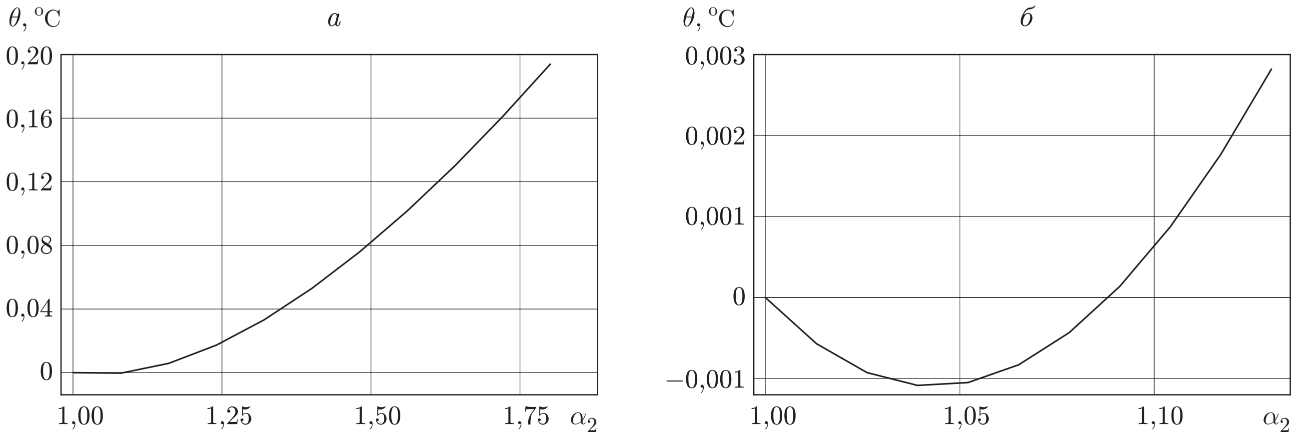

Рис. 1. Изменение температуры при адиабатическом растяжении стержня:
а — общий вид; *б* — начальный участок кривой, показанной на рис. 1,*а*

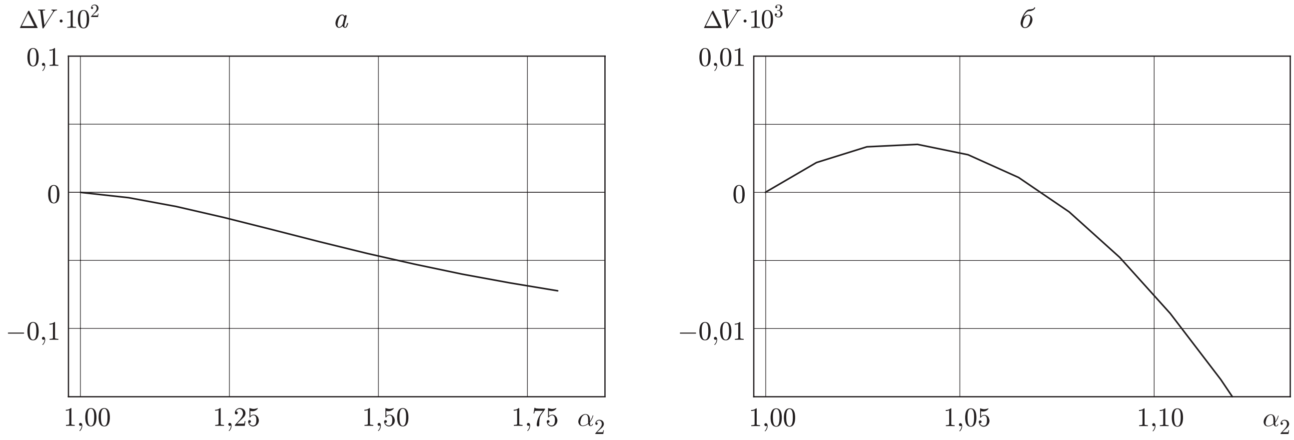

Рис. 2. Относительное изменение объема при адиабатическом растяжении стержня:
а — общий вид; *б* — начальный участок кривой, показанной на рис. 2,*а*

соответствие, по-видимому, случайное, так как в настоящей работе и в [18] рассматривались разные материалы. Уменьшение температуры обычно связывается с расширением образца, а ее увеличение — с уменьшением объема (см., например, [18]).

На рис. 2 показано относительное изменение объема ΔV в процессе адиабатического растяжения стержня. Видно, что законы изменения температуры и объема хорошо коррелируют.

Изменение единственной составляющей тензора истинного напряжения T^{33} в процессе адиабатического растяжения стержня приведено на рис. 3 (кривая *1*). Вследствие малого изменения температуры кривая *1* почти совпадает с кривой, построенной на основе аналитического решения задачи об изотермическом растяжении стержня (см. [9]).

Задача о растяжении стержня представляет интерес, поскольку позволяет связать единственное отличное от нуля напряжение со свободной и внутренней энергиями, энтропией и температурой. Действительно, в случае термоупругого процесса собственная диссипация φ (см. [4]) представляется в виде

$$T \cdot\cdot D = \rho(\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) \quad \text{или} \quad T \cdot\cdot D = \rho(\dot{u} - \Theta \dot{s}). \qquad (3.5)$$

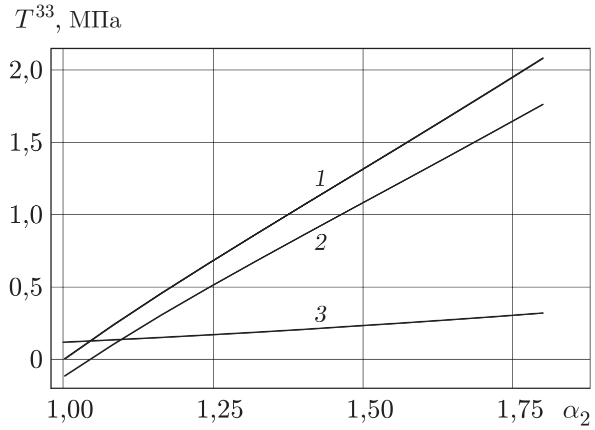

Рис. 3. Изменение составляющей тензора истинного напряжения при адиабатическом растяжении стержня:
1 — T^{33}; *2* — T_s; *3* — T_u

Здесь Ψ, u, s — удельные (отнесенные к единице массы) свободная, внутренняя энергии и энтропия, связанные соотношением $\Psi = u - \Theta s$. Выражение для свободной энергии, полученное в работе [4], записывается в виде $\Psi = W_1/\rho_0 + \Psi_2(\Theta)$, где функционал W_1 определен соотношением (2.7) в [4], а функция $\Psi_2(\Theta)$ — соотношением (2.9). Учитывая, что $\dot{W}_1 = JT \cdot\cdot D + \dot{\theta} W_{1,\Theta} - \beta\dot{\theta} J I_1(T)$ (соотношение получено из (1.11) аналогично тому, как было получено соотношение (1.14) из (1.12)), и принимая во внимание выражение для энтропии (соотношение (2.10) в работе [4]), имеем

$$\dot{\Psi} = \rho_0 J^{-1} T \cdot\cdot D - s\dot{\Theta}, \qquad \dot{u} = \rho_0 J^{-1} T \cdot\cdot D + \Theta\dot{s}, \tag{3.6}$$

поэтому выражения (3.5) становятся тождественными равенствами. Более того, так как в термоупругом адиабатическом процессе энтропия не меняется и полагается равной нулю, из выражений (3.5) следует, что $T \cdot\cdot D = \rho\dot{\Psi}$ в случае как изотермического, так и адиабатического процессов или $T \cdot\cdot D = \rho\dot{u}$ в случае адиабатического процесса. Поэтому данные соотношения становятся тождествами (с учетом выражений (3.6) для таких процессов).

В случае изотермического процесса второе соотношение в (3.5) позволяет оценить вклад внутренней энергии и энтропии в производство осевого напряжения. Согласно (3.1) градиент скорости перемещений $l = \dot{F} \cdot F^{-1}$, симметричная часть которого определяет тензор деформации скорости D, в задаче о растяжении стержня представляется в виде $l = (\dot{\xi}/\alpha_1)(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + (\dot{\eta}/\alpha_2)\boldsymbol{kk}$. Полагая $\dot{\xi}\,\Delta t = \varepsilon\xi$, $\dot{\eta}\,\Delta t = \varepsilon\eta$, из уравнения (3.3) в случае изотермического процесса находим $\dot{\xi} = \Lambda\dot{\eta}$, где $\Lambda = (\alpha_{1*}/\alpha_{2*})(b_1/a_{11})$. Так как в рассматриваемой задаче $l = D = \dot{h} = \dot{e}$, получаем

$$l = D = \dot{h} = \dot{e} = Z\dot{\eta}, \qquad Z = (\Lambda/\alpha_1)(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + (1/\alpha_2)\boldsymbol{kk}, \tag{3.7}$$

при этом второе соотношение в (3.5) записывается в виде

$$T^{33}\dot{\eta} = \rho\alpha_2(\dot{u} - \Theta\dot{s}). \tag{3.8}$$

Учитывая легко проверяемое для упругого материала в случае изотермического процесса равенство $\rho\dot{s} = B$ (B — коэффициент в (1.13)), вытекающее из соотношения (2.10) в работе [4], и принимая во внимание (3.7), получаем

$$\rho\Theta\dot{s} = \Theta B_0\dot{\eta}, \qquad B_0 = \beta[2T \cdot\cdot Z + I_1(\tilde{L}_6^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot Z)] - T_{,\Theta} \cdot\cdot Z.$$

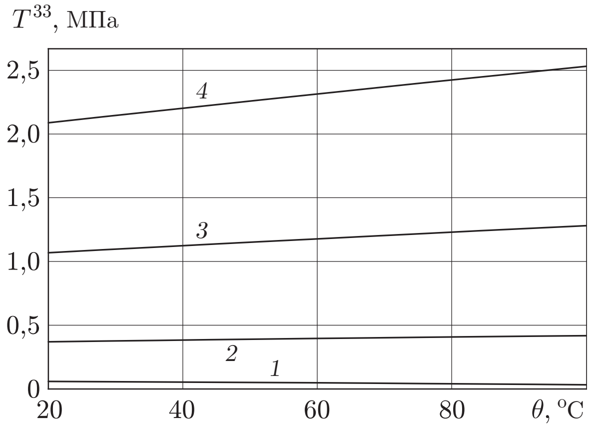

Рис. 4. Изменение истинного осевого напряжения при нагревании предварительно растянутого стержня:
1 — $\alpha_2 = 1{,}02$; *2* — $\alpha_2 = 1{,}13$; *3* — $\alpha_2 = 1{,}4$; *4* — $\alpha_2 = 1{,}8$

В результате выражение (3.8) имеет вид $T^{33} = T_u + T_s$, где $T_u = \alpha_2(T \cdot\cdot Z + \Theta B_0)$, $T_s = -\alpha_2 \Theta B_0$ — вклады внутренней энергии и энтропии в производство осевого напряжения. На рис. 3 величине T_u соответствует кривая *3*, величине T_s — кривая *2*. Видно, что в случае изотермического процесса основной вклад в производство осевого напряжения дает энтропия. Это известный факт, называемый энтропийной упругостью (см., например, [18, 19]). При этом незначительное изменение внутренней энергии позволяет считать ее функцией только температуры (см., например, [19]).

Еще одно тестирование модели проведено на задаче о нагревании предварительно растянутого стержня. В течение 1000 равных шагов стержень изотермически растягивался до определенной величины α_2, а затем также в течение 1000 равных шагов нагревался на 100 °C при постоянном удлинении (приращение температуры на каждом шаге $\theta = 0{,}08$ °C). На каждом шаге решалось только уравнение (3.3) при заданном значении θ. На рис. 4 показано изменение истинного осевого напряжения при нагревании предварительно растянутого стержня. С увеличением температуры напряжение в стержне уменьшается при малых степенях удлинения и возрастает при больших. Этот эффект известен как температурная инверсия (см. [13, 14, 18]) и объясняется действием двух факторов: увеличением при нагревании положительной температурной деформации, что приводит к уменьшению напряжения в растянутом стержне, и увеличением с ростом температуры модуля сдвига, что обусловливает увеличение напряжения растяжения. Взаимовлияние этих факторов легко показать в предположении малых деформаций простым инженерным расчетом.

Единственным отличным от нуля осевым напряжением в стержне является $T = E(\Theta)(e - e_\Theta)$. Здесь E — модуль Юнга; e — осевая составляющая тензора полных деформаций; $e_\Theta = \beta \Delta\Theta$ — осевая составляющая тензора температурных деформаций; $\Delta\Theta = \Theta - \Theta_0$. Полагая $E(\Theta) = E_0 + E_1 \Delta\Theta$ и учитывая, что для несжимаемого материала $E = 3G$, получаем $T = T_0 + 3[G_1 e - \beta(G_0 + G_1 \Delta\Theta)]\Delta\Theta$, где $T_0 = 3G_0 e$. Увеличение или уменьшение напряжения при положительном $\Delta\Theta$ зависит от знака выражения в квадратных скобках. После подстановки в последнее соотношение принятых выше значений материальных констант знак выражения в квадратных скобках определяется величиной $e - 4{,}2 \cdot 10^{-2}(1 + 3{,}2 \cdot 10^{-3}\,\Delta\Theta)$. Следовательно, если $e < 0{,}042$, что соответствует $\alpha_2 = \sqrt{1 + 2e} < 1{,}041$, то напряжение уменьшается при $\Delta\Theta > 0$, и если $e > 0{,}0554$, что соответствует $\alpha_2 > 1{,}054$, то напряжение увеличивается при $0\ °\mathrm{C} < \Delta\Theta < 100\ °\mathrm{C}$. При

$0{,}0420 < e < 0{,}0554$ напряжение сначала увеличивается, а затем уменьшается в указанном интервале изменения температуры. Приведенные на рис. 4 результаты расчетов при достаточно малых деформациях (кривые *1, 2*) хорошо согласуются с полученными оценками. Для кривых *1, 2* напряжения T_0, вычисленные по приведенному выше соотношению линейной упругости, равны 0,06 и 0,42 МПа соответственно, что также согласуется с данными на рис. 4.

Заключение. Таким образом, с использованием формализованного подхода к построению определяющих соотношений для сложных сред при конечных деформациях получено уравнение состояния термоупругости. Кинематика процесса определяется наложением малых температурных и малых упругих деформаций на конечные термоупругие. Получено общее представление определяющего соотношения в приращениях и его точный эволюционный аналог. Приведены конкретные уравнения состояния, полученные с использованием упругого закона для слабосжимаемого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 122–140.
3. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
4. **Роговой А. А.** Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 144–153.
5. **Роговой А. А.** Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 165–172.
6. **Vujošević L., Lubarda V. A.** Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theoret. Appl. Mech. 2002. V. 28/29. P. 379–399.
7. **Lubarda V. A.** Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity and biomechanics // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57, N 2. P. 95–108.
8. **Meggyes A.** Multiple decomposition in finite deformation theory // Acta Mech. 2001. V. 146. P. 169–182.
9. **Мошев В. В.** Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / В. В. Мошев, А. Л. Свистков, О. К. Гаришин и др. Екатеринбург: Ин-т механики сплошных сред, 1997.
10. **Кузнецова В. Г., Роговой А. А.** Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 64–77.
11. **Кузнецова В. Г., Роговой А. А.** Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 27–37.
12. **Rogovoy A.** Effect of elastomer slight compressibility // Eur. J. Mech. A. Solids. 2001. V. 20. P. 757–775.
13. **Mohsin M. A., Berry J. P., Treloar L. R. G.** An experimental study of the thermodynamics of rubber in extension and torsion // Brit. Polymer J. 1986. V. 18, N 3. P. 145–150.
14. **Lyon R. E., Farris R. J.** Thermomechanics of rubber at small strains // Polymer. 1987. V. 28. June. P. 1127–1132.

15. **Зотин В. Н., Ковров В. Н.** О влиянии температуры на сжимаемость резины ИРП-1226 // Реологическое поведение деформируемых сплошных сред: Сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. С. 77–78.
16. **Бабичев А. П.** Физические величины: Справ. / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др. М.: Энергоатомиздат, 1991.
17. **Иванченко А. И.** Теплофизические и реологические характеристики полимеров: Справ. / А. И. Иванченко, В. А. Пахаренко, В. П. Привалко и др. Киев: Наук. думка, 1977.
18. **Трелоар Л.** Физика упругости каучука. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
19. **Карнаухов В. Г.** Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982.

Поступила в редакцию 15/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 7/VI 2007 г.