

3. Б. М. Будаков, Ф. П. Васильев, А. Б. Успенский. В сб. «Численные методы в газовой динамике». Вып. IV. М., Изд-во МГУ, 1965.
4. О. А. Олейник. Докл. АН СССР, 1960, 135, 5.
5. В. Т. Гонтковская. Тепло- и массоперенос. Т. VI. Минск, изд-во «Наука и техника», 1966.
6. А. Г. Мержанов, Н. И. Дураков и др. ЖФХ, 1966, X, 4, 811.

УДК 536.46

О РАЗНОСТНОМ СЧЕТЕ ЗАДАЧ ЗАЖИГАНИЯ И ГОРЕНИЯ С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИКИ

К. Г. Шкадинский

(Москва)

Для описания процессов зажигания и горения газов с учетом гидродинамики необходимо находить решение следующей системы дифференциальных уравнений для конкретных начальных и краевых условий:

закон сохранения массы

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0,$$

уравнение движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \pi \frac{\partial p}{\partial m} = \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right),$$

закон сохранения тепловой энергии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + kp \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{(1 + \beta \theta)^s}{V} \frac{\partial \theta}{\partial m} \right] + F, \quad (1)$$

закон сохранения массы одной компоненты смеси

$$\frac{\partial a}{\partial t} = L \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{(1 + \beta \theta)^s}{V} \frac{\partial a}{\partial m} \right] - \gamma F,$$

уравнение состояния

$$pV = (1 + \beta \theta)[a + (1 - a)/\sigma],$$

связь между лагранжевыми и эйлеровыми координатами

$$dx(m) = V dm,$$

где $F = a \exp[\theta/(1 + \beta \theta)]$, $V = 1/\rho$.

Здесь записана простейшая модель. Сплошная среда представляет собой смесь двух идеальных газов (горючая смесь и продукты реакции). Подогретая горючая смесь сгорает, превращаясь в продукты реакции и выделяя тепло. Процесс описывают законы сохранения в безразмерных переменных и уравнение состояния смеси двух идеальных газов. Запишем систему (1) в векторной форме:

$$\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = [B(W) \overline{W}'_m]_m + \overline{F}. \quad (2)$$

Эта система обладает следующими особенностями. Матрица B диагональная и вырожденная, так как в уравнении сохранения массы нет диссипативных членов, а для модели невязких газов ($Pr=0$) нет диссипативных членов и в уравнении движения. Если отбросить диссипативные члены, то оставшаяся система $\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = 0$ будет гиперболической, причем некоторые собственные значения матрицы A оказываются много больше элементов матрицы B . Эти особенности затрудняют построение устойчивых разностных схем.

Рассмотрим две системы:

$$\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = 0, \quad (3)$$

$$\overline{W}'_t = [B(W) \overline{W}'_m]'_m + \overline{F}. \quad (4)$$

Первая система гиперболическая, и для нее разработана методика построения устойчивых разностных схем даже для негладких решений (см., например, [1]). Вторая система в силу диагональности матрицы B распадается на отдельные уравнения типа теплопроводности, для которых также разработаны разностные методы [2]. Вместо того чтобы решать систему (2), будем решать системы (3) и (4). По начальным данным и устойчивой разностной схеме (для (3) просчитаем функции на следующем слое, полученный результат возьмем в качестве начальных данных для (4) и по устойчивой разностной схеме для системы (4) получим окончательный результат для системы (2). Разностная схема, представляющая последовательное действие двух устойчивых разностных схем, устойчива и аппроксимирует (2). Ознакомиться с такой методикой построения разностных схем можно по статье [3].

Разностные схемы для системы (3) устойчивы при выполнении условия Куранта ($\tau \leq h/c$, где c максимальное собственное значение матрицы A). Это требование по существу, оно связано со скоростью распространения звуковых возмущений системы. Поэтому если собственные значения матрицы A большие, по сравнению с элементами матрицы B , то счет требует большого машинного времени. В этом случае имеет смысл несколько слоев сосчитать по разностной схеме для системы (3), а затем, взяв результат в качестве начальных данных, с суммарным временным шагом сосчитать по разностной схеме для (4). Это экономит время счета, так как реже считаются разностные уравнения для системы (4).

ЗАЖИГАНИЕ ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ НАГРЕТОЙ СТЕНКОЙ

В этом случае для системы (1) ставятся следующие краевые и начальные условия:

при

$$m=0 \text{ и } t>0$$

$$u(t, 0) = \theta(t, 0) = a'_m(t, 0) = 0,$$

при

$$t=0 \text{ и } m \geq 0$$

$$u(0, m) = 0, \theta(0, m) = -\theta_n, a(0, m) = 1, V(0, m) = 1.$$

Параметр λ задавался $\sim 10^{14}$. В качестве разностной схемы для системы (3) выбиралась схема Лакса [1], а для системы (4) неявная

четырёхточечная схема. В источнике концентрация бралась с верхнего слоя. Из-за рассогласованности для температуры начальных и краевых условий возникала волна, которая покидала зону прогрева и реакции. Интенсивность волны была малой, и она оставляла после прохождения исходную температуру и плотность (в пределах точности счета), а газ начинал двигаться от стенки. Счет велся в области $[0, R(t)]$, $R(t)$ выбиралось так, чтобы все возмущения оставались левее $R(t)$. Сама зона $[0, R(t)]$ разбивалась на две $[0, r]$ и $[r, R(t)]$. В зоне $[0, r]$ происходил прогрев газа, начиналась экзотермическая реакция. Счет прекращался, когда температура, превысив температуру стенки, начинала резко расти. Зона $[r, R(t)]$ характеризовалась тем, что там можно было полагать $a=1$, а $\theta = -\theta_n$ и решать более простую задачу с более крупным шагом. Шаг по мере роста $R(t)$ удваивался. Счет на $[r, R(t)]$ давал значение скорости в точке r для полной системы.

Рассмотрим второе уравнение системы (1). Если производные от скорости небольшие, то $\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right) \right]$ можно считать очень малым. Тогда второе уравнение системы (1) можно заменить условием $p(t, m) = p_0(t)$. Если нам известно $p_0(t)$, то из уравнения состояния находим $V(a, \theta)$, а из третьего и четвертого уравнения системы (1) определяем безразмерную температуру θ и концентрацию горючей смеси a . Первое уравнение служит для определения скорости. В нашей задаче область неограниченная, если начальную температуру задать сглаженной, а удельный объем задать, исходя из постоянства давления, то давление можно считать постоянным во времени и равным исходному. Такое упрощение резко сокращает машинное время счета, здесь ограничения на шаг по времени накладываются только требованиями точности счета. В зоне $[0, r]$ проводилось сравнение результатов упрощенного счета и счета полной системы для времен, когда волна уже покинула зону $[0, r]$. Наибольшее рассогласование получалось для скорости (около 6%), остальные переменные совпадали с точностью до 1%.

ЗАДАЧА О ВЫХОДЕ НА РЕЖИМ ГОРЕНИЯ

Краевые и начальные условия ставятся те же, что и для предыдущей задачи. Но если раньше мы прекращали счет, когда резко растет температура, то здесь нас интересуют процесс роста температуры и формирование фронта горения. Если производные от скорости большие, то полагать $\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right) \right]$ малым нельзя. В задачах зажигания и перехода к горению наибольшее изменение скорости наблюдается, когда происходит непосредственное зажигание, «вспышка», в узкой зоне за короткое время происходит прогрев до температур горения. Газ при этом расширяется и скорость растет. Затем эта зона увеличивается и формируется фронт пламени. Ограничимся случаем, когда эти изменения допускают предположение $P(t, m) = p_0(t)$, предположим, что газ невязкий ($\text{Pr}=0$) и механические источники энергии значительно меньше химических ($k=0$). Даже для такой упрощенной задачи счет вести трудно. Для вычислений предлагается использовать шаг, неравномерный по пространству. В зоне, где резко меняются температура и концентрация, необходимо иметь более густую сетку расчетных точек. После того, как реакция прошла, там устанавливается

температура порядка температуры горения ($\theta \approx -\theta_n + 1/\gamma$) и концентрация горючей смеси $a \approx 0$. сетка расчетных точек должна становиться реже. Это реализовано следующим алгоритмом: если разница значений температур в двух соседних точках выше допустимой ($\frac{1}{20\gamma} + \frac{1}{10\gamma}$), то сетка расчетных точек дополняется промежуточной точкой, а значения переменных вычисляются линейной интерполяцией, если разность значений меньше допустимой ($\frac{1}{50\gamma}$) и расстояние между окаймляющими точками меньше исходного шага, то такая точка выбрасывается из сетки расчетных точек. Это позволило автоматически иметь на фронте горения и в зоне «вспышки» нужное для точности счета количество расчетных точек.

Для счета использовалась следующая неявная четырехточечная схема:

$$\begin{aligned} \theta_i^{n+1} &= \theta_i^n + \frac{2\tau}{m_i + m_{i+1}} [b_{i+0,5} (\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}) - \\ &\quad - b_{i-0,5} (\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})] + a_i^{n+1} \varphi_i, \\ a_i^{n+1} &= a_i^n + \frac{2\tau L}{m_i + m_{i+1}} [b_{i+0,5} (a_{i+1}^{n+1} - a_i^{n+1}) - \\ &\quad - b_{i-0,5} (a_i^{n+1} - a_{i-1}^{n+1})] - \gamma a_i^{n+1} \varphi_i, \end{aligned}$$

где b и φ соответствующие функции θ и a . Такая схема устойчива и дает аппроксимацию первого порядка. Шаг по времени τ выбирался из двух соображений: он не должен превышать τ_0 (которое выверяется для уравнения теплопроводности без источников) и максимум изменения концентрации за один временной шаг не должен превышать допустимой величины ($\approx 0,03$). Указанная схема дивергентная, она удовлетворяет разностным законам сохранения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1}}{2} m_{i+1} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{2} m_{i+1} + \\ + \tau \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i^{n+1} \varphi_i + a_{i+1}^{n+1} \varphi_{i+1}}{2} m_{i+1} &- \tau \left[\frac{m_1}{m_0 + m_1} b_{-0,5} \times \right. \\ \times (\theta_0^{n+1} - \theta_{-1}^{n+1}) + \frac{m_0}{m_0 + m_1} b_{0,5} &(\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}) \left. \right] + \\ + \tau \left[\frac{m_{N+1}}{m_{N+1} + m_N} b_{N-0,5} &(\theta_N^{n+1} - \theta_{N-1}^{n+1}) + \right. \\ + \frac{m_N}{m_{N+1} + m_N} b_{N+0,5} &(\theta_{N+1}^{n+1} - \theta_N^{n+1}) \left. \right]. \end{aligned}$$

Второй член правой части выражает изменение тепловой энергии на временном слое, вызванное химическими источниками, третий и четвертый члены описывают тепловые потоки через границу и указывают как правильно аппроксимировать краевые условия.

Алгоритм изменения сетки расчетных точек при пополнении новыми точками сохраняет $\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{2} m_{i+1}$, а при выбрасывании не со-

храняет, но так как процедура выбрасывания происходит для слабо меняющихся профилей, то больших погрешностей не получается. Коэффициенты b и φ берутся снизу (для θ_i^n и a_i^n). Но когда фронт начинает формироваться и можно приближенно посчитать скорость его движения ω , то b и φ брались на фронте ($0 < a < 1$) со сдвигом по пространству на $-\omega\tau$, что равносильно выбору их с верхнего слоя.

ЗАДАЧА О ФРОНТЕ ГОРЕНИЯ

Нужно получить распределение переменных вдоль фронта горения, изучить влияние переменной плотности и температурной зависимости коэффициентов теплопроводности и диффузии на скорость горения и структуру фронта. Подобная задача изучалась в [4]. Задача рассматривалась в предположении, что газ невязкий ($Pr=0$), химические источники тепла значительно больше механических ($k=0$) и число Льюиса $L=1$ (в этом случае существует подобие полей концентраций и температур $a=1-\gamma(\theta+\theta_n)$). Находилась решение системы (1), зависящее от параметра $z=m-\omega t$, где ω — скорость распространения фронта. При $z=+\infty \theta=-\theta_n, u=0, V=V_0, a=1$, при $z=-\infty \theta=-\theta_n+1/\gamma, a=0$. Система (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\omega \theta'_z &= [(1+\beta\theta)^s / V \theta'_z]'_z + a \exp[\theta / (1+\beta\theta)], \\ -\omega u'_z + \pi p'_z &= 0, \\ +\omega V'_z + u'_z &= 0, \quad dx = V dz, \\ a &= 1 - \gamma(\theta + \theta_n), \quad p' = (1+\beta\theta)[a + (1-a)/\varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Заменив $y = \frac{(1+\beta\theta)^s}{V} \frac{d\theta}{dz}$ в первом уравнении системы (5), а остальные интегрируя, мы сведем задачу к системе уравнений первого порядка и алгебраических соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -\omega - \frac{a(1+\beta\theta)^s \exp[\theta / (1+\beta\theta)]}{yV}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= \frac{(1+\beta\theta)^s}{y}, \\ a &= 1 - \gamma(\theta + \theta_n), \quad u = -\omega(V - V_0), \\ \omega^2(V - V_0) + \pi(p - p_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для первого уравнения системы (6) $y(-\theta_n) = y(-\theta_n + 1/\gamma) = 0$, для второго нет краевых условий, так как x находится с точностью до постоянного слагаемого. При $\theta = -\theta_n \exp[\theta / (1+\beta\theta)]$ принимает близкие к нулю значения; при замене ее нулем в окрестности $[-\theta_n, -\theta_n + h]$ существует такое значение ω , при котором удовлетворяются оба краевых условия. В точке $-\theta_n + 1/\gamma$ первое уравнение системы (6) имеет особую точку типа седла, в окрестности $[-\theta_n, -\theta_n + h]$ решение имеет вид $y = -\omega(\theta + \theta_n)$. Параметр ω на-

