

ВЫПУЧИВАНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧНО СЖАТОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

УДК 539.3

Н. С. Астапов, В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Задача определения формы упругой линии продольно сжатого стержня имеет точное решение в эллиптических функциях [1–3] и поэтому кроме самостоятельной ценности еще исключительно полезна в качестве тестовой задачи при построении эффективных приближенных решений. В данной работе закритическое поведение идеально нагруженного стержня исследуется методом возмущений. Полученные приближенные формулы применяются для анализа выпучивания методом последовательного догружения эксцентрично сжатого стержня (неидеальная система), причем на каждом шаге догружения используется информация об искажении спектра критических нагрузок выпученной идеальной системы. Сравнение результатов показывает границы применимости приближенных формул, вычисление по которым не требует использования таблиц эллиптических интегралов и легко выполнимо на калькуляторах.

1. Идеально нагруженный стержень. Анализ выпучивания методом возмущений. Рассмотрим шарнирно опертый стержень длиной L (рис. 1), нагруженный осевой сжимающей силой P , сохраняющей величину и направление при деформации стержня. Предположим, что длина L осевой линии стержня неизменна, а ось стержня может изгибаться только в плоскости (x, y) . Исследуем форму потери устойчивости и закритическое поведение методом возмущений.

Воспользуемся точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе стержня в виде [1–5]

$$\varkappa = M/EI, \quad (1.1)$$

где \varkappa — кривизна в данной точке упругоизогнутой продольной оси стержня; M — изгибающий момент в этой точке; EI — изгибная жесткость. Выразим изгибающий момент $M = -Pw$ и кривизну $\varkappa = w_{ss}/(1 - w_s^2)^{1/2}$ в произвольной точке s стержня через функцию $w(s)$, которая полностью [6] определяет деформированное положение стержня (рис. 1). Подставим эти выражения в уравнение (1.1) и продифференцируем дважды по s :

$$(w_{ss}/(1 - w_s^2)^{1/2})_{ss} = -Pw_{sss}/EI.$$

Таким образом, функция $w(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w_{ssss} + \left[\frac{P}{EI} + \frac{w_{ss}^2(1 + 2w_s^2) + 3w_s w_{sss}(1 - w_s^2)}{(1 - w_s^2)^{5/2}} \right] (1 - w_s^2)^{1/2} w_{ss} = 0 \quad (1.2)$$

и граничным условиям

$$w(0) = w(L) = w_{ss}(0) = w_{ss}(L) = 0.$$

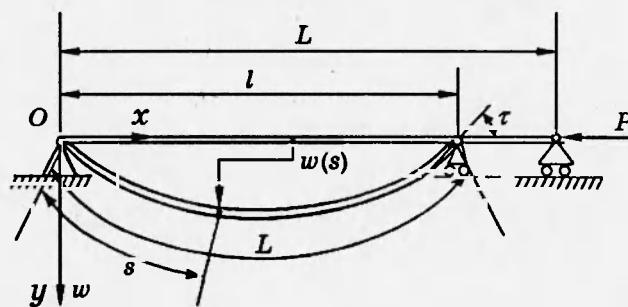


Рис. 1

Запишем уравнение (1.2) с точностью до членов шестой степени включительно, содержащих функцию $w(s)$ и ее производные:

$$w_{ssss} + \left[w_{ss}^2 (1 + 4w_s^2) + 3w_s w_{sss} (1 + w_s^2) \right] w_{ss} + \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{1}{2} w_s^2 - \frac{1}{8} w_s^4 \right) w_{ss} = 0. \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение новую переменную $z = \pi s/L$ и функцию W такую, что $w = \alpha W$ (α — константа того же порядка малости, что и амплитуда прогиба). В этих обозначениях уравнение (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 W_{zzzz} + \left[\alpha^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 W_{zz}^2 \left(1 + 4\alpha^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 W_z^2 \right) + \right. \\ & \left. + 3\alpha^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 W_z W_{zzz} \left(1 + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 W_z^2 \right) \right] \alpha \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 W_{zz} + \\ & + \frac{P}{EI} \left[1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 W_z^2 - \frac{1}{8} \alpha^4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 W_z^4 \right] \alpha \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 W_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Разделив уравнение (1.4) на $\alpha/(\pi/L)^4$ и обозначив через $\varepsilon = \pi^2(\alpha/L)^2$ малый параметр, характеризующий отклонение системы от тривиального решения $W = 0$, получим

$$\begin{aligned} & W_{zzzz} + \varepsilon \left[W_{zz}^2 \left(1 + 4\varepsilon W_z^2 \right) + 3W_z W_{zzz} \left(1 + \varepsilon W_z^2 \right) \right] W_{zz} + \\ & + \frac{P}{EI} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon W_z^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 W_z^4 \right] W_{zz} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до членов, содержащих ε^2 , имеем задачу о собственных функциях и числах:

$$\begin{aligned} & (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2) W - \Lambda (B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2) W = 0, \\ & W(0) = W(\pi) = W_{zz}(0) = W_{zz}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\Lambda = P(L/\pi)^2/EI$; A_0, B_0 и A_1, B_1, A_2, B_2 — линейные и нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} A_0 &= ()_{zzzz}, & B_0 &= -()_{zz}, \\ A_1 &= ()_{zz}^3 + 3()_z ()_{zz} ()_{zzz}, & B_1 &= \frac{1}{2} ()_z^2 ()_{zz}, \\ A_2 &= 4()_z^2 ()_{zz}^3 + 3()_z^3 ()_{zz} ()_{zzz}, & B_2 &= \frac{1}{8} ()_z^4 ()_{zz}. \end{aligned}$$

Для любого Λ тривиальное решение $W \equiv 0$ задачи (1.5) относится к неискривленному равновесному состоянию стержня. Задача (1.5) при $\varepsilon = 0$ называется невозмущенной (ли-

неаризованной). Собственные функции невозмущенной задачи $W_n^{(0)} = \gamma_n \sin nz$ (γ_n — коэффициенты нормировки), а собственные числа $\Lambda_n^{(0)} = n^2$. Следуя обычным процедурам теории возмущений [7], представим собственные функции W_n и числа Λ_n возмущенной задачи (1.5) в виде асимптотических рядов по параметру ε :

$$W_n = W_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k W_n^{(k)}, \quad \Lambda_n = \Lambda_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_n^{(k)}. \quad (1.6)$$

Условия нормировки для невозмущенной задачи даются соотношением $(B_n W_i^{(0)}, W_j^{(0)}) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера), из которого следует равенство $n^2 \gamma_n^2 = 2/\pi$ для определения коэффициентов γ_n , а для возмущенной задачи (1.5), кроме того, — соотношением $(W_i^{(0)}, \bar{W}_i^{(1)}) = 0$. Здесь под скалярным произведением понимается функционал

$$(f(z), g(z)) = \int_0^\pi f g dz.$$

Подставим асимптотические разложения (1.6) в уравнение и краевые условия задачи (1.5) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε . Используя условия нормировки, найдем разложения Λ_n с точностью до члена с ε^2 и разложения W_n с точностью до члена с ε в первой степени включительно. Приравняв нулю коэффициент при ε , получим уравнение

$$A_0 W_n^{(1)} + A_1 W_n^{(0)} - \Lambda_n^{(0)} (B_0 W_n^{(1)} + B_1 W_n^{(0)}) - \Lambda_n^{(1)} B_0 W_n^{(0)} = 0, \quad (1.7)$$

которое содержит в качестве неизвестных функции $W_n^{(1)}(z)$ и параметры $\Lambda_n^{(1)}$. Подставляя в (1.7) разложение функций $W_n^{(1)}$ в ряд

$$W_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} W_j^{(0)}$$

по собственным функциям невозмущенного уравнения и используя условия нормировки, имеем

$$\Lambda_n^{(1)} = (A_1 W_n^{(0)}, W_n^{(0)}) - \Lambda_n^{(0)} (B_1 W_n^{(0)}, W_n^{(0)}), \quad \alpha_{nn} = 0, \\ \alpha_{nj} = [\Lambda_n^{(0)} (B_1 W_n^{(0)}, W_j^{(0)}) - (A_1 W_n^{(0)}, W_j^{(0)})] / (\Lambda_j^{(0)} - \Lambda_n^{(0)}), \quad j \neq n.$$

Вычислив эти величины, найдем собственные функции и числа возмущенной задачи (1.5) с точностью до членов, содержащих ε в первой степени:

$$W_n(z) = \gamma_n \sin nz - \varepsilon \frac{3}{32\pi} \gamma_{3n} \sin 3nz, \quad \Lambda_n = n^2 + \varepsilon \gamma_n^2 n^4 / 8.$$

Подставляя разложения (1.6) в уравнение задачи (1.5), приравняв нулю коэффициент при ε^2 и т. д., следуя процедурам теории возмущений, находим выражения для Λ_n и $W_n(z)$ с точностью до членов, содержащих ε^2 включительно.

В нелинейной задаче (1.5) наибольший практический интерес представляют наименьшее собственное значение

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{1}{8} \gamma_1^2 \varepsilon + \frac{21}{512} \gamma_1^4 \varepsilon^2$$

и соответствующая ему с точностью до ε собственная функция

$$W_1(z) = \gamma_1 \sin z - \varepsilon \frac{3}{32\pi} \gamma_3 \sin 3z.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям ($z = \pi s/L$, $w = \alpha W$, $\varepsilon = \pi^2 (\alpha/L)^2$, $\Lambda = P(L/\pi)^2/EI$), получим

$$P = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L}\right)^2 + \frac{21\pi^4}{512} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L}\right)^4\right] \quad (1.8)$$

и, учитывая следующее из условий нормировки равенство $(3\gamma_3)^2 = \gamma_1^2 = 2/\pi$, запишем

$$w_1(s) = \alpha\gamma_1 \left[\sin \frac{\pi s}{L} - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L}\right)^2 \sin \frac{3\pi s}{L} \right]. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) дает приближенное выражение координаты $w_1(s)$ изогнутой оси стержня. Максимальный прогиб стержня достигается в точке $s = L/2$ и имеет вид

$$f_1 = \max_{0 \leq s \leq L} w_1(s) = \alpha\gamma_1 \left[1 + \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L}\right)^2\right]. \quad (1.10)$$

Из (1.8) и (1.10) с точностью до членов, содержащих $(f_1/L)^4$ включительно, находим зависимость

$$P = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f_1}{L}\right)^2 + \frac{19\pi^4}{512} \left(\frac{f_1}{L}\right)^4\right], \quad (1.11)$$

связывающую внешнюю нагрузку P с величиной f_1 , или, разрешая последнее равенство относительно f_1 , получим

$$f_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} L \sqrt{\left(\sqrt{1 + 19(P/P_* - 1)/2} - 1\right)/19} \quad (1.12)$$

($P_* = EI(\pi/L)^2$). При $t = 19(P/P_* - 1)/2 \ll 1$ равенство (1.12) можно записать с точностью до величин второго порядка малости относительно t в виде выражения

$$f_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} L \sqrt{P/P_* - 1} [1 - 19(P/P_* - 1)/16], \quad (1.13)$$

которое точнее приведенного в [1, с. 74] равенства

$$f_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} L \sqrt{P/P_* - 1} \left[1 - (P/P_* - 1)/8\right]. \quad (1.14)$$

Результаты вычислений по формулам (1.12) и (1.13) представлены в табл. 1. Кроме того, в табл. 1 для различных значений угла τ между касательной к оси стержня в его вершине и осью Ox (рис. 1) даны точные значения прогибов (см. [1, с. 73; 2, с. 509; 3, с. 74]), вычисленные с помощью таблиц эллиптических интегралов по формулам

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \frac{P}{P_*} = \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2, \quad \frac{f_1}{L} = \frac{k}{F} \quad (1.15)$$

($k = \sin(\tau/2)$). Сравнение приближенных значений прогибов, вычисленных по (1.12), с точными показывает вполне приемлемое с инженерной точки зрения совпадение вплоть до нагрузок, превышающих критическую в 1,15 раза. Заметим, что, вычисляя прогиб стержня по формуле (1.14), для $\tau = 30^\circ$ имеем $f_1/L \approx 0,168$ вместо точного значения $f_1/L = 0,162$ и $f_1/L \approx 0,406$ для $\tau = 70^\circ$ вместо $f_1/L = 0,3313$.

Таблица 1

τ , град	Нагрузка P/P_*	Прогиб f_1/L		
		Точное значение	Формула	
			(1.12)	(1.13)
10	1,0038	0,0554	0,0554	0,0554
20	1,0154	0,1097	0,1098	0,1096
30	1,0351	0,1620	0,1625	0,1617
40	1,0637	0,2111	0,2134	0,2100
60	1,1517	0,2966	0,3098	0,2875
70	1,2147	0,3313	0,3562	0,3108
80	1,2939	0,3597	0,4021	0,3177

Покажем, что формулу (1.11) можно найти из (1.15) разложением P/P_* в ряд по степеням f_1/L . Подставив для этого во второе соотношение (1.15) представление

$$F = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right) \quad (1.16)$$

полного эллиптического интеграла первого рода в виде сходящегося для $|k| < 1$ ряда [7], получим

$$\frac{P}{P_*} = 1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{11}{32} k^4 + \dots \quad (1.17)$$

Заменяя в (1.17) k^2 выражением $(\pi^2/4)(P/P_*)(f_1/L)^2$, которое следует из второго и третьего соотношений (1.15), и учитывая абсолютную сходимость ряда (1.16), имеем выражение

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_*} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{P}{P_*} \right] \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 + \frac{11}{32} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{P}{P_*} \right] \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 \right\}^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 + \dots \right] \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 + \frac{11}{32} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 \right\}^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f_1}{L} \right)^2 + \frac{19\pi^4}{512} \left(\frac{f_1}{L} \right)^4 + \dots, \end{aligned} \quad (1.18)$$

совпадающее с (1.11) с точностью до членов, содержащих $(f_1/L)^4$. Из второго и третьего соотношений (1.15) и очевидного неравенства $f_1 < L/2$ вытекает достаточное для сходимости рядов (1.16) и (1.17) неравенство $k^2 = (\pi^2/4)(P/P_*)(f_1/L)^2 < (\pi^2/16)(P/P_*) < 1$, если $P/P_* < 16/\pi^2 \approx 1,62$. Следовательно, пользуясь частичными суммами ряда (1.18), можно для $P/P_* < 1,62$ с любой желаемой точностью получить зависимость нагрузка — прогиб.

2. Анализ выпучивания эксцентрично сжатого стержня методом догружения. На рис. 2 изображен заземленный стержень длины L , изогнутый под действием сохраняющей вертикальное направление силы P , приложенной с эксцентриситетом e [4]. Здесь же показан фиктивный шарнирно опертый стержень длиной $2L_1$, концы которого лежат на линии действия силы P . Для функции прогиба $w(s)$ ($0 \leq s \leq L$) фиктивного

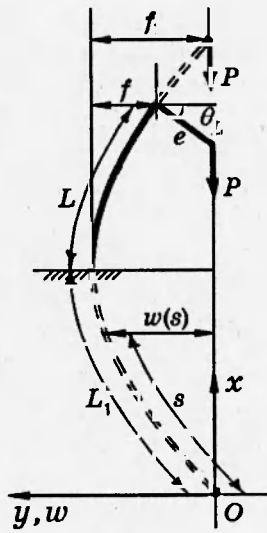


Рис. 2

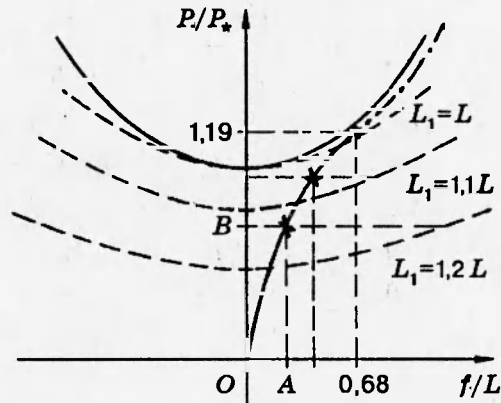


Рис. 3

стержня можно воспользоваться приближенным выражением (1.9), заменяя в нем L на $2L_1$. Угол θ_L наклона верхнего торца выражается через функцию прогиба [4, 5]:

$$\cos \theta_L = (1 - w_s^2(L_1 + L))^{1/2}.$$

Максимальный прогиб стержня обозначен через f , фиктивного стержня — f_1 . Так как $f_1 - f = e \cos \theta_L$ (рис. 2), то

$$w(L_1 + L) = e(1 - w_s^2(L_1 + L))^{1/2}$$

и, подставляя вместо w выражение (1.9), находим уравнение

$$\begin{aligned} & (\alpha\gamma_1)^2 \left[\sin \frac{\pi(L_1 + L)}{2L_1} - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L} \right)^2 \sin \frac{3\pi(L_1 + L)}{2L_1} \right]^2 = \\ & = e^2 \left\{ 1 - (\alpha\gamma_1)^2 \left[\frac{\pi}{2L_1} \cos \frac{\pi(L_1 + L)}{2L_1} - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{\alpha\gamma_1}{L} \right)^2 \frac{3\pi}{2L_1} \cos \frac{3\pi(L_1 + L)}{2L_1} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

позволяющее определить $\alpha\gamma_1$ по заданным L , L_1 и e . Пользуясь обозначениями

$$\mu = \left(\frac{\alpha\gamma_1 \pi}{2L_1} \right)^2, \quad b = \left(\frac{e\pi}{2L_1} \right)^2, \quad c = \sin^2 \left(\frac{L\pi}{2L_1} \right),$$

получим с точностью до $(\alpha\gamma_1)^4$ включительно квадратное относительно μ уравнение

$$[4(1 - 3b)c^2 - (5 - 9b)c + 1]\mu^2/32 + [(b - 1)c + 1]\mu - b = 0,$$

дискриминант которого

$$D = (1 - c)^2 + b(1 + 11c - 12c^2)/8 + b^2c(9 - 4c)/8 \geq 5b^2c/8 \geq 0.$$

Окончательно для $\alpha\gamma_1$ имеем

$$\alpha\gamma_1 = \frac{8L_1}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (b - 1)c - \sqrt{D}}{4(3b - 1)c^2 + (5 - 9b)c - 1}}, \quad (2.1)$$

что легко вычислить для заданных e , L и L_1 . Выбор знака перед $D^{1/2}$ определен физиче-

Таблица 2

L_1	Приближенное решение		Точное решение	
	P/P_*	f/L	P/P_*	f/L
1,2	0,7140	0,2615	0,7141	0,2618
1,1	0,8913	0,4441	0,8946	0,4472
1,06	1,0032	0,5589	1,0209	0,5707
1,03	1,1044	0,6423	1,1683	0,6750
1,02	1,1375	0,6630	1,2330	0,7076
1,01	1,1679	0,6775	1,3076	0,7372
1	1,1942	0,6846	1,3932	0,7628

ским смыслом параметра $\alpha\gamma_1$, который приближенно равен амплитуде прогиба стержня. Так, если перед $D^{1/2}$ взять знак плюс, то при $L_1/L \geq 4$ значение дроби под корнем становится отрицательным, а при $L_1/L = 2$ получим $\alpha\gamma_1 \approx 7L$.

Теперь изложим алгоритм построения зависимости нагрузка — прогиб. Положим сначала, например, $L_1 = 3L$ и с некоторым шагом ($0,1L$ или $0,01L$) станем уменьшать L_1 вплоть до L . Другими словами, будем последовательно догружать стержень, увеличивая нагрузку P до тех пор, пока угол наклона верхнего торца стержня не станет равным $\pi/2$. Для каждого шага нагружения, т. е. для каждого L_1 , вычислим $\alpha\gamma_1$ по (2.1).

На рис. 3 штриховыми линиями показаны построенные по приближенным формулам (1.10) и (1.11) графики зависимости нагрузка — прогиб идеального стержня длины L_1 . Подставляя полученное значение $\alpha\gamma_1$ в выражение (1.9) функции прогиба идеальной системы, можно приближенно вычислить горизонтальное смещение $w(s)$ в любой точке s стержня (см. рис. 2). Так, для верхнего торца реального стержня $s = L_1 + L$, следовательно, максимальный прогиб $f = w(L_1) - w(L_1 + L)$ (точка A на рис. 3), а соответствующую ему нагрузку (точку B на рис. 3) можно вычислить по формуле (1.8) или (1.11), заменяя L на $2L_1$. Тем самым для заданных L и L_1 приближенно вычислим прогиб стержня и нагрузку. Придавая L_1 различные значения, построим точки, отмеченные на рис. 3 крестиком, кривой нагрузка — прогиб эксцентрично сжатого стержня.

В табл. 2 приведены результаты вычислений по изложенному алгоритму для $e = 0,1$, $L = 1$. Последовательным уменьшением L_1 с 1,2 до 1 (догрузением стержня) получен ряд точек зависимости нагрузка — прогиб. Здесь же указаны уточненные значения, вычисленные с помощью линейной интерполяции табличных данных [3] при решении системы уравнений (1.200), (1.205), (1.206) [4, с. 69–70] с тремя неизвестными, часть которых входит под знак неполного эллиптического интеграла первого рода. Табл. 2 показывает хорошее совпадение результатов вплоть до $L_1/L = 1,03$, т. е. до нагрузок, превышающих критическую на 10%. Однако если считать заданным не L_1 , а P/P_* , то отличие прогибов, получаемых приближенным методом, от точных становится несущественным (см. в табл. 2 приближенное значение прогиба для $L_1 = 1,01$ и точное для $L_1 = 1,03$) на всем промежутке применимости метода, т. е. вплоть до $P/P_* = 1,19$. Так, для $P/P_* = 1,1044$ имеем $f/L \approx 0,6423$ вместо точного $f/L = 0,6353$, для $P/P_* = 1,1942$ имеем $f/L \approx 0,6846$ вместо $0,6889$, т. е. отличие приближенных значений прогибов, полученных описанным методом, от точных при одной и той же внешней нагрузке около 1%. Таким образом, предлагаемым

Таблица 3

e	Приближенное решение		Точное решение	
	P/P_*	f/L	P/P_*	f/L
0,1	0,89129	0,44407	0,89461	0,44722
0,01	0,82748	0,06001	0,82741	0,05999
0,001	0,82646	0,00603	0,82657	0,00604

методом очень точно строится кривая нагрузка — прогиб вплоть до нагрузки, превышающей критическую на 19%, при которой прогиб стержня достигает $\approx 0,68$ его длины. Штрихпунктирная кривая рис. 3 данным методом не воспроизводится.

Из табл. 3, в которой для $L_1 = 1, 1L$ представлено влияние эксцентриситета на погрешность приближенных результатов, видно, что с уменьшением эксцентриситета до $e = 0,001$ погрешность не превышает 0,7%. Влияние эксцентриситета на расхождение между кривыми, соответствующими точной зависимости нагрузка — прогиб, при $P > P_*$ падает [4, рис. 1.29, с. 70]. Этому и следует ожидать, так как потенциальная функция идеального стержня имеет вид катастрофы сборки [8], и, следовательно, устойчивость вдоль кривых равновесия стержня с малыми начальными несовершенствами (например, при эксцентричном нагружении) полностью определяется свойствами устойчивости катастрофы сборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1946.
2. Крылов А. Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.: ОНТИ, 1936.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
6. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985.
7. Найфе Ф. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 6/VI 1994 г.,
в окончательном варианте — 19/XII 1994 г.