

УДК 532.5:533.6

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КРЫЛА В ПЛОСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск
E-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

С использованием результатов, полученных ранее автором данной работы, обобщены основные аспекты нелинейной теории крыла в плоском нестационарном потоке жидкости. Сформулирована начально-краевая задача для комплексной скорости. Приведена система дифференциальных соотношений с условиями в точках схода вихревых следов, позволяющая корректно решать широкий класс задач. С использованием стандартной процедуры дискретизации по времени решается задача Коши. Краевая задача на каждом временном шаге сводится к сингулярным интегральным уравнениям первого и второго рода. Проведено сравнение точности решения этих уравнений методами дискретных вихрей и панелей. Обсуждаются особенности расчета давления при отрывном обтекании контура.

Ключевые слова: теория крыла, нестационарное течение жидкости, нелинейная начально-краевая задача, вихревой след.

1. Нелинейная теория крыла в нестационарном потоке появилась в середине XX в. С математической точки зрения эта теория сводится к решению нелинейных начально-краевых задач в областях с неизвестными границами, представляющими собой вихревые следы, форма которых меняется с течением времени и зависит от предыстории движения крыла и жидкости. Точных решений таких задач практически не построено, что обусловлено прежде всего нелинейной зависимостью между формой вихревых следов, полем скоростей и неустойчивостью этих следов. Поэтому на начальном этапе развития нелинейной теории крыла в нестационарном потоке основные усилия исследователей были направлены на поиски эффективных способов моделирования вихревых следов и методов их расчета. Результаты этих исследований приведены в детальном обзоре Т. Сарпкаи [1], составленном на основе анализа свыше 500 публикаций.

Наиболее полные результаты теоретических исследований получены в рамках модели плоского потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Одной из первых работ в этом направлении является работа [2]. В 70–80-х гг. появилось большое количество публикаций, в которых исследовались теоретические и практические задачи нестационарного обтекания крыльев и других тел в рамках различных моделей плоского и пространственного течений. Основное внимание в этих публикациях уделялось вычислительным технологиям. Особое место в этом направлении занимают работы С. М. Белоцерковского и его учеников, которые внесли существенный вклад в решение различных задач нелинейной теории крыла методом дискретных вихрей [3, 4].

В настоящей работе предпринята попытка выполнить достаточно полное описание теоретических основ нелинейной теории крыла в нестационарном потоке в рамках модели плоского потенциального течения несжимаемой жидкости.

2. При нестационарном обтекании крылового профиля искомыми величинами в каждый момент времени являются поле скоростей, гидродинамическое давление, циркуляция

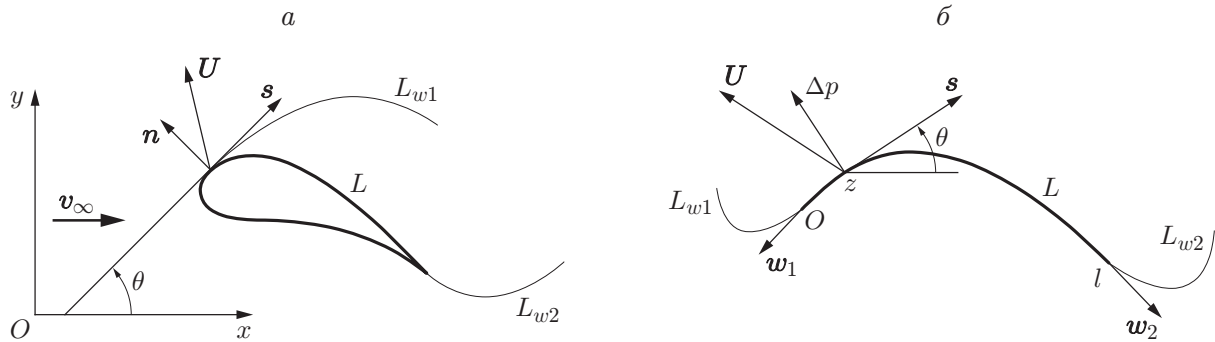


Рис. 1. Модели нестационарного течения вокруг замкнутого (а) и разомкнутого (б) контуров с двумя вихревыми следами

скорости вокруг профиля, интенсивности и форма вихревых следов, а также скорости их схода. Кроме того, нужно определить точки схода вихрей с гладких участков контура. Все эти величины связаны между собой, поэтому для их определения необходимо иметь соответствующую систему нелинейных соотношений.

Рассмотрим для определенности нелинейную начально-краевую задачу нестационарного обтекания замкнутого контура L идеальной несжимаемой жидкостью в декартовой системе координат Oxy . Эта задача рассматривалась во многих работах (см., например, [2, 4–6]). Поставим задачу исходя из современных представлений. Предположим, что на бесконечном удалении от контура скорость жидкости равна v_∞ , до момента времени $t < t_0$ контур L неподвижен, а при $t > t_0$ начинает двигаться со скоростью $U(x, y, t)$, $(x, y) \in L$ (рис. 1).

В общем случае циркуляция скорости $\Gamma(t)$ вокруг контура L при $t < t_0$ постоянна ($\Gamma(t) = \Gamma_0$), а при $t > t_0$ начинает меняться с течением времени, что приводит к появлению вихревых следов L_{wj} , $j = 1, \dots, N_w$, которое в соответствии с теоремой Кельвина о постоянстве циркуляции скорости вокруг замкнутого жидкого контура должно компенсировать изменение $\Gamma(t)$. Вихревые следы моделируются линиями тангенциального разрыва скорости. Движение жидкости вне контура L и вихревых следов L_{wj} считается потенциальным, что позволяет ввести в рассмотрение комплексную скорость $\bar{v}(z, t)$ в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Вне контура L и вихревых следов L_{wj} комплексная скорость $\bar{v}(z, t)$ является аналитической функцией, которая может быть представлена в виде

$$\bar{v}(z, t) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N_w} \int_{L_{wj}(t)} \frac{\gamma_{wj}(\sigma, t) d\sigma}{z - \zeta_{wj}(\sigma, t)}, \quad (1)$$

$$\zeta(s, t) \in L(t), \quad \zeta_{wj}(\sigma, t) \in L_{wj}(t).$$

Здесь $\gamma(s, t)$ — интенсивность вихревого слоя, моделирующего контур $L(t)$; $\gamma_{wj}(\sigma, t)$ — интенсивность вихревых следов; s, σ — дуговые координаты. Интегрирование по контуру $L(t)$ в формуле (1) ведется по часовой стрелке, а на вихревых следах дуговая координата σ отсчитывается от точки схода вихрей с контура $L(t)$ вдоль каждого вихревого следа $L_{wj}(t)$. По определению

$$\gamma(s, t) = v_s^-(s, t) - v_s^+(s, t), \quad \gamma_{wj}(\sigma, t) = v_\sigma^-(\sigma, t) - v_\sigma^+(\sigma, t), \quad (2)$$

где индексами “+”, “−” отмечены предельные значения скорости жидкости при приближении к контуру $L(t)$ и вихревому следу $L_{wj}(t)$ соответственно.

При моделировании замкнутого контура L вихревым слоем предполагается, что внутри этого контура находится жидкость, движущаяся вместе с ним, поэтому $v_s^- = U_s$. Вихревой слой на контуре L целесообразно называть присоединенным вихревым слоем, так как он неподвижен относительно контура и движется вместе с ним. Что касается вихревых следов, то они моделируются свободными вихрями, которые перемещаются вместе с жидкостью.

Выражение (1) определяет поле скоростей вне контура L и вихревых следов $L_{wj}(t)$. В точках самого контура комплексная скорость равна $\bar{v}(z, t) = \bar{v}^+(z, t)$. Предельные значения скоростей $\bar{v}^+(z, t)$, $\bar{v}^-(z, t)$ связаны с $\gamma(s, t)$ формулами Сохоцкого — Племеля

$$\begin{aligned}\bar{v}^+(z, t) &= \bar{v}_0(z, t) + \gamma(s, t) e^{-i\theta(z, t)} / 2, \\ \bar{v}^-(z, t) &= \bar{v}_0(z, t) - \gamma(s, t) e^{-i\theta(z, t)} / 2, \quad z \in L.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $\bar{v}_0(z, t)$ определяется выражением (1), в котором соответствующий сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши; θ — угол наклона касательной к контуру L в точке z , отсчитываемый от оси x (см. рис. 1).

В качестве начальных условий задаются поле скоростей и границы области течения жидкости. При этом обычно предполагается, что до начального момента времени вихревые следы отсутствуют. Строго говоря, появление вихревых следов не следует из уравнений движения жидкости, поэтому при введении их в модель нестационарного течения должны выполняться постулат о конечности скорости на угловой кромке тела и теорема Кельвина о постоянстве циркуляции скорости по произвольному замкнутому жидкому контуру. Что касается граничных условий, то они ставятся на всех границах течения жидкости.

Комплексная скорость $\bar{v}(z, t)$ должна принимать конечные значения во всех точках области течения ($|\bar{v}(z, t)| < \infty$) и удовлетворять граничным условиям непротекания в точках контура L и условию затухания возмущенных скоростей в бесконечно удаленной точке:

$$\operatorname{Im} \{ [\bar{v}(z, t) - \bar{U}(z, t)] e^{i\theta(z, t)} \} = 0, \quad z \in L;\tag{4}$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \bar{v}(z, t) = \bar{v}_\infty.\tag{5}$$

Заметим, что условие (5) выполняется, если комплексная скорость задана с помощью формулы (1).

Граничными условиями на вихревых следах $L_{wj}(t)$ являются условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидкости. Эти условия выполняются, если вихревые следы свободно перемещаются вместе с жидкостью, т. е. если комплексная координата $z_{wj}(\sigma, t)$ вихря, сошедшего с точки z_{*j} контура профиля в некоторый момент времени τ ($0 \leq \tau < t$), определяется решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}_{wj}}{dt} = \bar{v}_0(z_{wj}, t), \quad z_{wj} \in L_{wj}(t)\tag{6}$$

с начальным условием $\bar{z}_{wj}(0, \tau) = \bar{z}_{*j}(\tau)$, $\tau \in [0, t)$ и заданным полем скоростей в момент времени τ . В уравнении (6) $\bar{v}_0(z_{wj}, t)$ — комплексная скорость движения вихрей в следе, равная полусумме предельных значений комплексной скорости жидкости $\bar{v}(z, t)$ при приближении к точке $z_{wj} \in L_{wj}$.

Для величины суммарной циркуляции скорости вокруг контура $L(t)$ и вихревых следов $L_{wj}(t)$ должна выполняться теорема Кельвина о постоянстве циркуляции скорости вокруг произвольного жидкого контура, охватывающего профиль и вихревые следы:

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) + \sum_{j=1}^{N_w} \frac{d}{dt} \Gamma_j(t) = 0, \quad (7)$$

$$\Gamma(t) = \int_{L(t)} \gamma(s, t) ds, \quad \Gamma_j(t) = \int_{L_{wj}(t)} \gamma_{wj}(\sigma, t) d\sigma, \quad j = 1, \dots, N_w.$$

В большинстве работ по нелинейной теории крыла рассматриваются только соотношения (1)–(7). При этом предполагается, что координаты дискретных свободных вихрей, непосредственно сходящих с контура в каждый момент времени, известны (они, как правило, задаются априорно). Попытки определить координаты сходящих вихрей в рамках соотношений (1)–(7) не дали положительных результатов, поэтому для корректного решения задачи Коши (6) необходимы дополнительные соотношения. В качестве таких соотношений выберем условия в точках схода вихревых следов с контура L [7, 8]. Следует рассматривать точки схода трех типов: острую кромку (точку возврата), угловую кромку и точку схода на гладком контуре. Общим условием для кромок всех типов является соотношение

$$\frac{d}{dt} \Gamma_j(t) = \gamma_{wj}(0, t) w_j(t), \quad j = 1, \dots, N_w, \quad (8)$$

связывающее интенсивность сходящих вихрей $\gamma_{wj}(0, t)$, скорость их схода $w_j(t)$ и циркуляцию скорости $\Gamma_j(t)$ вокруг вихревого следа $L_{wj}(t)$.

Отметим, что комплексная скорость, индуцируемая вихревым следом, определяется сингулярным интегралом с ядром Коши. В соответствии с предположением об ограниченности скорости жидкости во всех точках области течения этот интеграл должен принимать конечные значения в конце следа (при $\sigma = l_{wj}$). Для этого необходимо потребовать выполнения условия

$$\gamma_{wj}(l_{wj}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, N_w, \quad (9)$$

так как при $\gamma_{wj}(l_{wj}, t) \neq 0$ соответствующий сингулярный интеграл имеет логарифмическую особенность в точке $\sigma = l_{wj}$ [9].

Скорость схода вихрей определяется относительной скоростью, равной разности абсолютной скорости движения вихрей в следе $\bar{v}_0(s_{*j}, t)$ в точке схода $z_{*j}(t)$ и переносной скорости движения точки схода. Сход вихрей происходит по касательной к контуру, поэтому скорость схода вихрей $w_j(t)$ с контура $L(t)$ в след $L_{wj}(t)$ определяется выражением

$$w_j(t) = v_{0\sigma}(s_{*j}, t) - v_{e\sigma}(s_{*j}, t), \quad j = 1, \dots, N_w, \quad (10)$$

где $v_{e\sigma}(s_{*j}, t)$ — переносная скорость точки схода, равная абсолютной скорости этой точки в исходной декартовой системе координат. Следует отметить, что сход вихрей с контура возможен только при $w_j(t) > 0$.

Определение величин $\gamma_{wj}(0, t)$, $w_j(t)$ для всех типов точек схода вихревых следов, представленных на рис. 2, приведено в [7, 8]. Для острой кромки замкнутого контура (профиля)

$$\begin{aligned} \gamma_{wj}(0, t) &= \gamma(s_{*j} - 0, t) + \gamma(s_{*j} + 0, t), \\ w_j(t) &= [\gamma(s_{*j} - 0, t) - \gamma(s_{*j} + 0, t)]/2. \end{aligned} \quad (11)$$

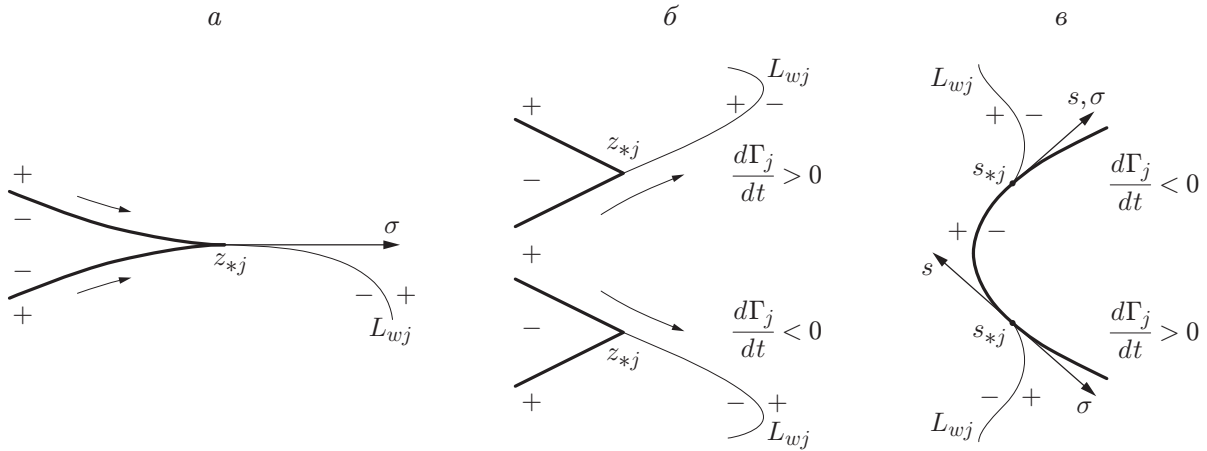


Рис. 2. Моделирование схода вихревого следа:

a — острая кромка, *б* — угловая кромка, *в* — точка схода на гладком контуре

На острых кромках разомкнутого контура ($s_{*1} = 0$, $s_{*2} = l$), моделируемого одним вихревым слоем, выражения (11) переходят в выражения

$$\gamma_{wj}(0, t) = \gamma(s_{*j}, t), \quad w_j(t) = v_{0\sigma}(s_{*j}, t) - U_\sigma(s_{*j}, t). \quad (12)$$

В случае угловой кромки сход вихрей происходит по касательной к одной из сторон контура в зависимости от знака производной $d\Gamma_j(t)/dt$. Выражения для $\gamma_{wj}(0, t)$, $w_j(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_j < 0: \quad \gamma_{wj}(0, t) &= \gamma(s_{*j} - 0, t), \quad w_j(t) = -\frac{\gamma(s_{*j} - 0, t)}{2}, \\ \frac{d}{dt} \Gamma_j > 0: \quad \gamma_{wj}(0, t) &= \gamma(s_{*j} + 0, t), \quad w_j(t) = \frac{\gamma(s_{*j} + 0, t)}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

На гладком контуре точка схода вихревого следа может перемещаться со скоростью $\dot{s}_{*j}(t)$. Интенсивность вихревых слоев на контурах L и L_{wj} определяется разрывом относительных скоростей. С учетом этого в зависимости от знака производной $d\Gamma_j(t)/dt$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_j < 0: \quad \gamma_{wj}(0, t) &= \gamma(s_{*j} - 0, t) + \dot{s}_{*j}, \quad w_j(t) = -\frac{\gamma(s_{*j} - 0, t) + \dot{s}_{*j}}{2}, \\ \frac{d}{dt} \Gamma_j > 0: \quad \gamma_{wj}(0, t) &= \gamma(s_{*j} + 0, t) + \dot{s}_{*j}, \quad w_j(t) = \frac{\gamma(s_{*j} + 0, t) + \dot{s}_{*j}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определение дуговой координаты $s_{*j}(t)$ точки схода вихревого следа с гладкого контура является сложной задачей. Один из возможных алгоритмов расчета $s_{*j}(t)$ предложен в работе [8].

Соотношения (1)–(14) представляют собой систему уравнений для корректного определения комплексной скорости $\bar{v}(z, t)$ без априорного задания координат сходящихся вихрей. Эти соотношения не содержат явно гидродинамическое давление, что позволяет решать кинематическую задачу независимо от динамической.

В рассматриваемом случае нестационарного потенциального обтекания контура гидродинамическое давление p определяется интегралом Коши — Лагранжа. В точке, движущейся со скоростью \mathbf{v}_e , этот интеграл принимает вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} - \nabla\varphi \cdot \mathbf{v}_e + \frac{v^2}{2} + F = C(t), \quad (15)$$

где φ — потенциал скорости; ρ — плотность жидкости; $C(t)$ — произвольная функция времени; F — потенциал массовых сил (если значение F постоянное, то его можно включить в правую часть (15)); оператор $\delta/\delta t$ определяет производную по t в точке, движущейся с переносной скоростью \mathbf{v}_e . В точках контура L , движущихся в системе координат Oxy со скоростью \mathbf{U} , переносная скорость равна $\mathbf{v}_e = \mathbf{U}$. В вихревом следе вихри перемещаются свободно вместе с жидкостью, и комплексная переносная скорость равна $\bar{v}_e = \bar{v}_0$. При таком выборе скорости перемещения вихрей в следе давление не претерпевает разрыв, а суммарная интенсивность вихрей любого фрагмента следа, точки которого движутся вместе с жидкостью, остается постоянной в течение всего времени его движения. Это условие лежит в основе математического моделирования вихревых следов системой свободных дискретных вихрей.

Для расчета распределения давления по контуру L интеграл Коши — Лагранжа (15) целесообразно выразить через интенсивность вихревого слоя на L . При этом следует учитывать, что при переходе через вихревые следы (в точках с дуговыми координатами s_{*j}) потенциал скорости φ и интенсивность вихревого слоя γ претерпевают разрыв: φ меняется на величину, равную циркуляции скорости по вихревому следу Γ_j , а γ — на величину, равную интенсивности вихрей γ_{wj} , сходящих с контура L в вихревой след L_{wj} . Соответствующие формулы для различных режимов обтекания разомкнутых и замкнутых контуров получены в работе [10].

В качестве примера рассмотрим отрывное обтекание разомкнутого контура L , когда вихревые следы сходят с передней и задней кромок (см. рис. 1). В этом случае перепад давления $\Delta p(s, t)$ в точках контура L определяется формулой

$$\Delta p(s, t) = -\rho \left(v_{rs}(s, t) \gamma(s, t) + \frac{d\Gamma(s, t)}{dt} + \gamma_{w1}(0, t) w_1(t) \right), \quad s \in [0, l],$$

где $\Gamma(s, t)$ — циркуляция скорости по части контура L с дуговой координатой s . Можно показать, что в точках схода вихревых следов с контура ($s = 0, s = l$) перепад давления равен нулю [10]. Следует отметить, что в некоторых известных алгоритмах решения задач нестационарного отрывного обтекания контуров расчет давления проводится с учетом разрыва интенсивности вихревого слоя только в задней кромке (см., например, [4]). В общем случае, когда число точек схода вихрей $N_w > 1$, это приводит к нарушению условия нулевого перепада давления в точках схода и к погрешности расчета давления по контуру.

3. Численное решение начально-краевых задач с помощью теории крыла, как правило, строится с использованием процедуры пошаговой дискретизации по времени. Такой подход позволяет свести исходную нелинейную начально-краевую задачу к последовательному решению двух задач: нелинейной задачи Коши на малом временном шаге и линейной краевой задачи для рассматриваемого момента времени. При этом решение задачи на предыдущем шаге по времени предполагается известным; на основе этого решения строится граница течения (вихревые следы) для нового шага по времени и решается соответствующая краевая задача, которая для заданной области течения становится линейной. Многочисленные расчеты показывают, что наиболее эффективным способом решения краевой задачи является сведение ее к решению сингулярного интегрального уравнения.

Получим соответствующие интегральные уравнения. Рассмотрим формулы (3) для предельных значений комплексной скорости $\bar{v}(z, t)$ в точках контура L . При моделировании контура L , внутри которого находится жидкость, вихревым слоем из граничного условия (4) следуют равенства $v_n^+ = v_n^- = U_n$, $v_s^- = U_s$, $\bar{v}^- = \bar{U}$. С учетом этих равенств формулы (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &= v_s^+(s, t) - U_s(s, t), \\ \gamma(s, t)/2 + e^{i\theta(z, t)} [\bar{v}_0(z, t) - \bar{U}(z, t)] &= 0, \quad z \in L. \end{aligned} \tag{16}$$

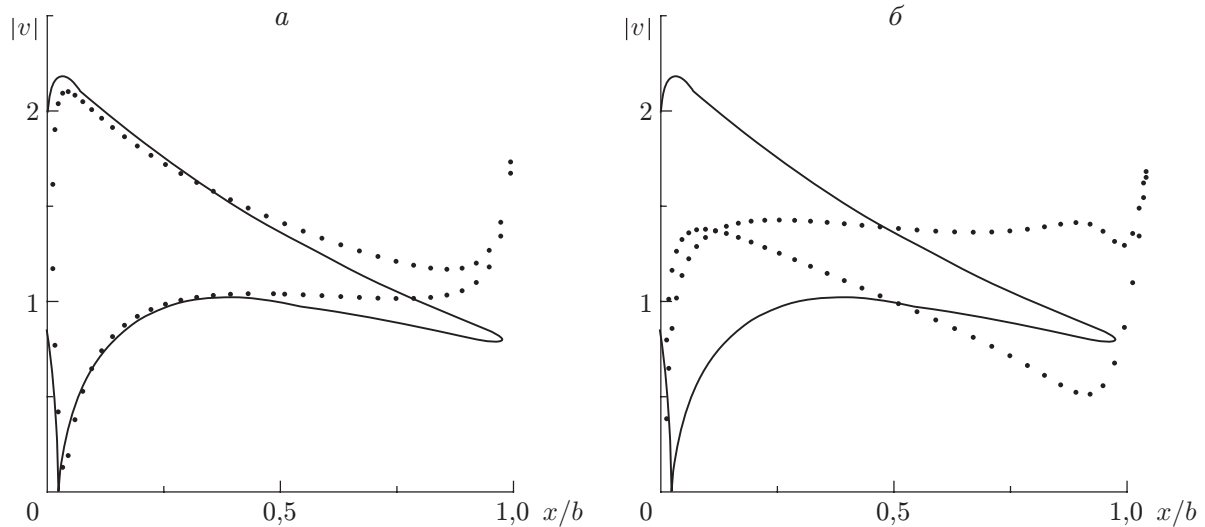


Рис. 3. Распределение скорости, полученной методом дискретных вихрей ($N = 80$), по симметричному 20 %-му профилю Жуковского:
 а — решение СИУ-1, б — решение СИУ-2; точки — результаты расчета, сплошные линии — точное решение

Первое соотношение в (16) имеет тривиальный характер, так как оно основано на определении (2) интенсивности вихревого слоя на контуре L через разрыв касательных составляющих скорости жидкости. Второе соотношение удовлетворяет граничному условию (4) непротекания жидкости через контур L . Разделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получаем два сингулярных интегральных уравнения (СИУ) с ядром Коши относительно функции $\gamma(s, t)$:

$$\frac{1}{2} \gamma(s_0, t) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} e^{i\theta(z_0, t)} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z_0 - \zeta(s, t)} \right) = \operatorname{Re} f(z_0, t), \quad z_0 \in L, \quad \zeta \in L; \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} e^{i\theta(z_0, t)} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z_0 - \zeta(s, t)} \right) = \operatorname{Im} f(z_0, t), \quad z_0 \in L, \quad \zeta \in L. \quad (18)$$

Здесь s_0 — дуговая координата точки z_0 ; функция $f(z_0, t)$ определяется по формуле

$$f(z_0, t) = e^{i\theta(z_0, t)} \left(\bar{U}(z_0, t) - \bar{v}_\infty - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N_w} \int_{L_{wj}(t)} \frac{\gamma_{wj}(\sigma, t) d\sigma}{z_0 - \zeta_{wj}(\sigma, t)} \right).$$

Уравнение (17) представляет собой интегральное уравнение второго рода (СИУ-2), а уравнение (18) — интегральное уравнение первого рода (СИУ-1). Функция $f(z_0, t)$ в рассматриваемый момент времени t предполагается известной и определяется законом движения контура $L(t)$ и полем скоростей, индуцируемым вихревыми следами $L_{wj}(t)$. Уравнения (17), (18) можно решать независимо. Выбор уравнения зависит от характера решаемой задачи и метода решения СИУ.

В настоящее время для решения СИУ обычно применяются метод дискретных вихрей и метод панелей. Каждый из этих методов имеет особенности. Краевая задача обтекания разомкнутого контура сводится к решению СИУ первого рода, тогда как для замкнутого

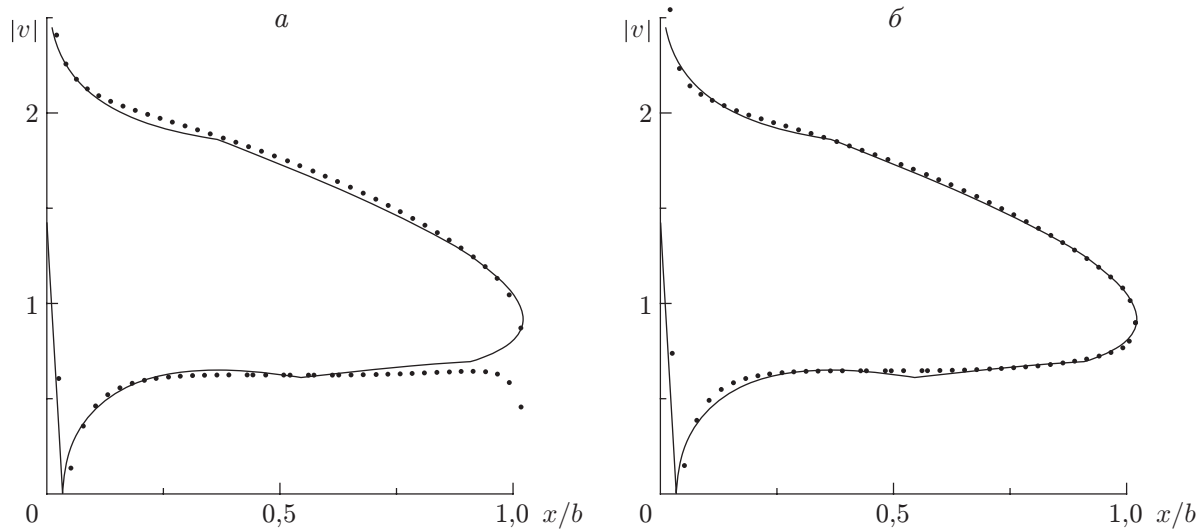


Рис. 4. Распределение скорости, полученной методом панелей с линейной аппроксимацией ($N = 80$), по профилю Жуковского:

a — решение СИУ-1, *б* — решение СИУ-2; точки — результаты расчета, сплошные линии — точное решение

контура имеют место оба СИУ. Для решения СИУ-1 на разомкнутом контуре используется метод дискретных вихрей, позволяющий с высокой точностью решать краевые задачи теории крыла (см., например, [4, 5, 11]). Применение метода дискретных вихрей для замкнутого контура требует осторожности. В качестве примера на рис. 3 приведены результаты тестового расчета распределения скорости по симметричному 20 %-му профилю Жуковского в стационарном потоке [12], для которого методом конформных отображений получено точное решение. Решение СИУ-1 и СИУ-2 проводилось методом дискретных вихрей. Вихри и контрольные точки равномерно распределялись по контуру. Из рис. 3 следует, что удовлетворительные результаты расчетов получаются только при использовании СИУ-1, тогда как погрешность решения СИУ-2 оказывается непредсказуемой. Отметим, что с увеличением относительной толщины профиля погрешность решения СИУ-2 уменьшается, и в случае окружности результаты расчетов с использованием обоих СИУ практически совпадают.

Иная ситуация возникает при решении СИУ методом панелей в случае замкнутого контура. На рис. 4 приведены результаты расчета скорости для изогнутого 12 %-го профиля Жуковского [12]. Расчет проведен методом панелей с равномерным разбиением контура на фрагменты. Вблизи передней кромки решение СИУ-1 имеет удовлетворительную погрешность, а вблизи задней кромки, где профиль сужается, его погрешность существенна. При этом СИУ-2 имеет малую и практически равномерную погрешность на всем контуре.

Сравнение данных, приведенных на рис. 3, 4, позволяет сделать вывод о нецелесообразности решения СИУ методом дискретных вихрей для замкнутых контуров. Что касается метода панелей, то он оказывается более эффективным при решении СИУ-2. Точность решения методом панелей можно улучшить двумя способами: 1) переход от СИУ-1, СИУ-2 к системе интегральных уравнений, не имеющих параметрической особенности, зависящей от толщины профиля [13, 14]; 2) решение СИУ методом криволинейных панелей [15].

Существенное влияние на точность решения СИУ оказывает функция $f(z_0, t)$, определяемая решением нелинейной задачи Коши (6) с условиями (7)–(14) для каждого рассматриваемого момента времени. При моделировании вихревых следов свободными дис-

кретными вихрями основной трудностью является задание положения вихрей, сходящих с кромок обтекаемого контура. Как отмечено выше, при использовании большинства известных алгоритмов расчета положение сходящих вихрей задается априорно без учета соотношений (8)–(14). Оценить возникающую при этом погрешность расчета достаточно трудно. Однако имеются примеры практически точного выполнения условий (8)–(14). В работе [16] с учетом этих условий построено решение задачи о нестационарном обтекании профиля Кармана — Трефтца с угловой кромкой, с которой сходит вихревой след. Краевая задача сведена к системе СИУ, которые решались методом панелей. В [16] также приведены результаты расчета с помощью алгоритма, в котором не требовалось выполнение условия (13). Различия полученных решений оказались существенными, особенно для моментов времени, в которые изменяется знак производной от циркуляции скорости. Для разомкнутого контура, моделируемого системой присоединенных дискретных вихрей, решение аналогичной задачи с учетом условий (8)–(12) построено в [17]. Решения, полученные в работах [16, 17], можно использовать в качестве тестовых.

Результаты численного эксперимента, приведенные в работе [16], показали, что в нестационарном потоке имеет место парадокс угловой кромки [18]: в предельном случае бесконечно малого угла решение нелинейной начально-краевой задачи нестационарного обтекания профиля с угловой задней кромкой не переходит в соответствующее решение задачи для профиля с острой кромкой, вследствие чего возникает ситуация, имеющая место в стационарном потоке (точным решением для профиля Жуковского является скорость на задней кромке, отличная от нуля [12], а в предельном случае профиля Кармана — Трефтца с угловой кромкой — скорость на задней кромке, равная нулю). Этот парадокс следует учитывать при задании условий на задней кромке профиля.

Нелинейная теория крыла в нестационарном потоке широко используется при исследовании различных аэроупругих явлений в авиации включая авиационное моторостроение, в промышленной аэродинамике (нестационарное обтекание воздушным потоком зданий, мостов, автомобилей и других конструкций), а также при решении задач для машущего крыла и лопастей ветроэнергетических установок и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сарпкэйт Т.** Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Соврем. машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
2. **Giesing J. P.** Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift // J. Aircraft. 1968. V. 5, N 2. P. 135–143.
3. **Белоцерковский С. М.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. М.: Наука, 1978.
4. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, Р. М. Федоров. М.: Наука, 1988.
5. **Горелов Д. Н., Куляев Р. Л.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 6. С. 38–48.
6. **Ильичев К. П., Постоловский С. Н.** Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 2. С. 72–82.
7. **Горелов Д. Н.** К постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 48–56.

8. Горелов Д. Н. Критерии отрыва нестационарного потока идеальной жидкости с гладкого контура // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 74–81.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
10. Горелов Д. Н. Расчет давления на контур в режиме нестационарного отрывного обтекания // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 109–113.
11. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. М.: Наука, 1985.
12. Горелов Д. Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
13. Горелов Д. Н. Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. АН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 173–177.
14. Горелов Д. Н., Смолин Ю. С. Применение системы интегральных уравнений к решению плоских задач теории крыла // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 5. С. 24–29.
15. Горелов Д. Н., Редреев Д. Г. Метод криволинейных панелей для решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши по замкнутому контуру // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 1. С. 52–61.
16. Горелов Д. Н., Смолин Ю. С. Нестационарное обтекание профиля с угловой кромкой // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 3. С. 21–28.
17. Горелов Д. Н., Говорова А. И. Моделирование начальной стадии отрывного обтекания разомкнутого контура методом дискретных вихрей // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 5. С. 24–33.
18. Горелов Д. Н. Парадокс угловой кромки профиля в нестационарном потоке // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 45–51.

Поступила в редакцию 26/VIII 2010 г.
