

**РАЗВИТИЕ ВТОРИЧНЫХ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ТОКОВ
ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ
В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБАХ**

А. Ф. Поляков

(Москва)

Аналитически решена задача о развитии вторичных свободноконвективных токов в вынужденном турбулентном потоке в горизонтальных трубах при относительно слабом влиянии термогравитации. Результаты решения сопоставлены с экспериментальными данными.

Экспериментальные данные по местной теплоотдаче [1] и по профилям скорости и температуры [2, 3] показывают, что термогравитационные силы оказывают существенное влияние на турбулентное течение и теплообмен в горизонтальных трубах. Термогравитационные силы могут воздействовать на структуру турбулентности, что приведет к изменению величины переноса количества движения и тепла, и непосредственно на осредненное течение, что приведет к образованию вторичных свободноконвективных токов (как это имеет место в случае вязкостно-гравитационного течения). Вторичное свободноконвективное течение в случае турбулентного потока в силу большой анизотропии и неоднородности переноса импульса и тепла может существенно отличаться от картины вторичных токов при вязкостно-гравитационном течении в горизонтальных трубах.

В [4] рассмотрены границы и характер начала влияния термогравитационных сил на турбулентный перенос импульса и тепла в предположении, что их влияние непосредственно на осредненное течение отсутствует. Выявлены границы начала влияния термогравитационных сил на поля скорости, температуры, сопротивление трения и теплоотдачу. Вопрос о формировании вторичных течений в [4] не обсуждался.

В данной работе рассматривается развитие вторичных свободноконвективных течений при вынужденном турбулентном движении несжимаемой жидкости в горизонтальных трубах. Задача решена в предположении, что термогравитационные силы не влияют на турбулентный перенос. Рассматриваются условия слабого влияния термогравитационных сил, т. е. при относительно малых значениях числа Грасгофа $Gr = g\beta q_w d^4/\lambda\nu^2$.

Такая постановка задачи позволяет выявить вклад массовых сил в осредненное движение и приближенно описывает течение при относительно небольших значениях Gr .

Запишем уравнение движения для компоненты вихря

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial r \overline{v' \omega_x'}}{r \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{w' \omega_x'}}{\partial \varphi} = \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \\
 & + \omega_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\omega_\varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial r \overline{u' \omega_r'}}{r \partial r} + \frac{\partial \overline{u' \omega'_\varphi}}{r \partial \varphi} + \nu \Delta \omega_x + \\
 & + \frac{g\beta}{r} \left[\frac{\partial (rt)}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \cos \varphi \right] \\
 \omega_x = & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rw) - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\omega_r = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} (rw) \right], \quad \omega_\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}$$

где r — текущий радиус, x — аксиальная координата, отсчитываемая от начала обогрева; φ — угол, отсчитываемый от верхней образующей; t — температура; u, v, w — аксиальная, радиальная и тангенциальная компоненты скорости соответственно; ν — коэффициент кинематической вязкости; β — коэффициент термического расширения.

Задача решается при следующих предположениях. 1. Процесс стационарный. 2. Физические свойства жидкости постоянны за исключением изменения плотности, учитываемого в члене массовых сил. 3. Течение стабилизировано, т. е. изменение всех гидродинамических величин по продольной координате пренебрежимо мало. 4. Молекулярный перенос пренебрежимо мал по сравнению с турбулентным. 5. Тангенциальный перенос завихренности мал по сравнению с радиальным. 6. Турбулентный перенос завихренности представляется в градиентном виде, т. е. $\overline{v' \omega_x'} = -\varepsilon \partial \omega_x / \partial r$. 7. Коэффициент турбулентного переноса количества движения и описывается зависимостью Прандтля $\varepsilon/\nu = 0.4\eta$. 8. Турбулентное число Прандтля $Pr_T = 1.9$. Плотность теплового потока на стенке постоянна, и рассматривается область течения вдали от начала обогреваемого участка, где $\partial t / \partial x = \text{const}$.

С учетом принятых предположений уравнение (1) в линеаризованной безразмерной форме имеет вид

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial R} \left(RY \frac{\partial \Omega_x}{\partial R} \right) = \Gamma \frac{\partial (RT_0^+)}{\partial R} \sin \varphi$$

где $\Gamma = 1.25 Gr / Re Re_*^2 Pr$ — параметр, имеющий малую величину

$$(3) \quad \Omega_x = \frac{\omega_x d}{2\bar{u}} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RW) - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right]$$

$T_0^+ = (t_w - t)_0 \rho c_p v_* / q_w$ — начальное распределение температуры, характерное для вынужденного течения без влияния термогравитации; $R = 2r/d = 1 - Y$ — текущий безразмерный радиус; d — диаметр трубы; $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ — скорость трения; $V = v/\bar{u}$, $W = w/\bar{u}$; \bar{u} — средняя скорость течения; q_w — плотность теплового потока на стенке; $Re = \bar{u}d/\nu$, $Re_* = v_*d/\nu$ — число Рейнольдса; Pr — число Прандтля; ρ — плотность; c_p — удельная теплоемкость.

Пусть профиль температуры T_0^+

$$(4) \quad T_0^+ = 2.2 \ln \eta \times B(Pr)$$

где $B(Pr)$ — функция числа Pr , описываемая по данным [5] выражением

$$B = 5 \ln ((5 Pr + 1) / 30) + 8.55 + 5Pr$$

$\eta = v_* y / \nu$ — безразмерная координата, отсчитываемая от стенки.

Решая уравнения (2), (4), найдем выражение, описывающее распределение компоненты вихря

$$(5) \quad \Omega_x = -\Gamma \{ 1.1 (\ln Y)^2 + D \ln Y + C_1 \} \sin \varphi$$

$$D = 2.2 \ln \eta_a + B(Pr) = 4.5 \lg Re + B(Pr) - 5, \quad \eta_a = v_* d / 2 \nu$$

Граничное условие имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega_x}{dR} = 0, \quad R \rightarrow 0 \\ \varphi = \pi / 2 \end{aligned} \right\}$$

Используя определение Ω_x (4) и уравнение неразрывности

$$(6) \quad \partial(RV) / \partial R + \partial W / \partial \varphi = 0$$

запишем уравнение для определения тангенциальной компоненты скорости W

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} (RW) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega_x)$$

Представив искомую функцию W в виде произведения двух функций

$$(8) \quad W = F(R) \sin \varphi$$

уравнение в частных производных (7) преобразуем в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(9) \quad \frac{d^2(RF)}{dR^2} + \frac{d(RF)}{R dR} - \frac{(RF)}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R^2 A)$$

где $A = \Omega_x / \sin \varphi$.

Согласно [6] общее решение уравнения (9) можно представить в виде

$$(10) \quad F = \frac{1}{2} \left\{ \int A dR + \frac{1}{R^2} \int R^2 A dR + C_2 + C_3 \frac{1}{R^2} \right\}$$

Подставив в (10) выражение для $A = \Omega_x / \sin \varphi$ из (5) и произведя интегрирование, найдем выражение для компоненты скорости W

$$W = F \sin \varphi = \Gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2(n+1)R + (n+2)R^{n+1}}{n(n+1)(n+3)} \left[D - 2.2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right] \sin \varphi$$

(11)

где при интегрировании использовано разложение

$$\ln(1-R) = - \sum_{n=1}^{\infty} R^n / n$$

Для нахождения постоянных C_1 , C_2 и C_3 использованы следующие условия: 1) $\int_0^1 F dR = 0$; 2) $F|_{R=1} = 0$; 3) при $R = 0$ функция F конечна.

Используя (11), уравнение неразрывности (6) граничное условие $V|_{R=1} = 0$, найдем выражение для радиальной компоненты скорости

$$(12) \quad V = - \Gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-(n+1)R + R^{n+1}}{n(n+1)(n+3)} \left[D - 2.2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right] \cos \varphi$$

На фиг. 1 показаны распределения тангенциальной компоненты скорости W в горизонтальной диаметральной плоскости и радиальной компоненты скорости V в вертикальной диаметральной плоскости, рассчитанные для чисел $Pr = 0.7$ (кривые 1) и 3.5 (кривые 2), чисел $Re = 10^4$ и $5 \cdot 10^4$ при $\Gamma = 10^{-2}$. Различие кривых для значений $Re = 10^4$ и $5 \cdot 10^4$ незначительно, поэтому на графике приведены линии, построенные по средним значениям для данного интервала чисел Re . При $R = 0$ производные $\partial V / \partial R$, $\partial W / \partial R$ имеют конечные значения. Это связано с использованием при расчете выражения (3), которое не удовлетворяет условию $\partial t / \partial r|_{r=0} = 0$.

Распределение аксиальной компоненты скорости u и температуры будем искать из уравнений

$$(13) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} = v \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$(14) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varepsilon \frac{\partial t}{\partial r} = v \frac{\partial t_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial t_0}{\partial x}$$

в которых конвективные члены (первые члены в правых частях уравнений) записаны в предположении, что $u = u_0$, $t = t_0$, т. е. соответствуют распределениям без влияния термogrавитации.

Решая уравнения (13) и (14), получим выражения для безразмерной скорости и температуры

$$(15) \quad U^+ = U_0^+ - \int_0^\eta \left[\int_0^\eta (\eta_a - \eta) V^+ (\partial U_0^+ / \partial \eta) d\eta \right] ((\eta_a - \eta) \varepsilon / v)^{-1} d\eta$$

$$(16) \quad T^+ = T_0^+ - \int_0^\eta \left[\int_0^\eta (\eta_a - \eta) V^+ (\partial T_0^+ / \partial \eta) d\eta \right] [(\eta_a - \eta) \varepsilon / v]^{-1} d\eta$$

$$U^+ = u / v_*, \quad V^+ = v / v_*, \quad T^+ = (t_w - t) \rho c_p v_* / q_w$$

Выражение (12) для радиальной компоненты скорости громоздко для использования при решении уравнений (15), (16). В связи с этим рассчитанные по зависимости (12) и представленные на фиг. 1 кривые аппроксимировались выражением

$$(17) \quad V = -7.8 \Gamma \sqrt{\text{Pr}} Y^2 \cos \varphi$$

Используя выражения (4), (17), получим зависимости, описывающие профили аксиальной компоненты скорости и температуры

$$(18) \quad U^+ = U_0^+ + 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^{4.37} \sqrt{\text{Pr}}} \eta^2 \cos \varphi$$

$$(19) \quad T^+ = T_0^+ + 1.8 \cdot 10^5 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^{4.37} \sqrt{\text{Pr}}} \eta^2 \cos \varphi$$

Для скорости и сопротивления трения в случае отсутствия термogrавитации приняты зависимости

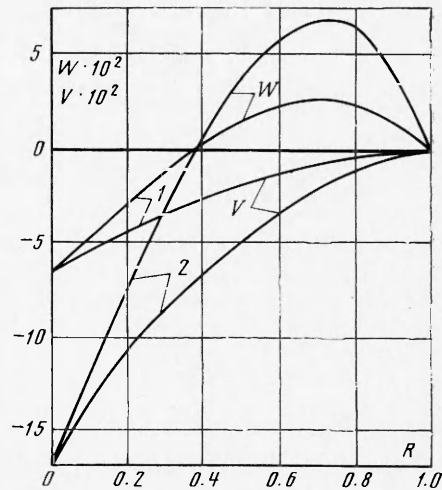
$$U_0^+ = 2.5 \ln \eta + 5.5, \quad \xi = 0.316 / \text{Re}^{0.25}$$

Уравнения (18) и (19) показывают, что деформация профиля скорости u и профиля температуры проявляется в первую очередь в вертикальной диаметральной плоскости.

Учет влияния термogrавитационных сил только на турбулентный перенос импульса [4] дает следующие выражения для распределения скорости и температуры вблизи верхней и нижней образующих:

$$(20) \quad U^+ = U_0^+ \pm 3.8 \cdot 10^3 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^{3.5} \text{Pr}} \eta$$

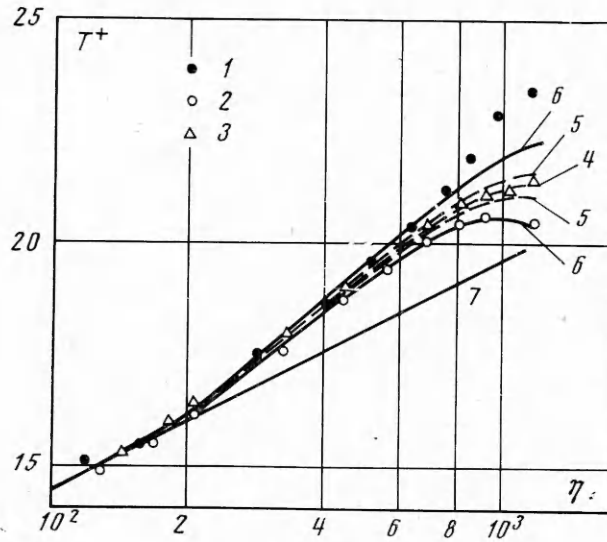
$$(21) \quad T^+ = T_0^+ \pm 3.8 \cdot 10^3 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^{3.5} \text{Pr}} \eta$$



Фиг. 1

где знак плюс относится к случаю распределения вблизи верхней образующей, минус — вблизи нижней.

Из выражений (18)—(21) видно, что влияние термогравитационных сил на профили скорости и температуры для двух предельных случаев (влияние на турбулентный перенос или на осредненное течение) оказывается неодинаковым. В обоих случаях деформация профилей происходит в одном направлении и начинается приблизительно при одних и тех же значениях параметров

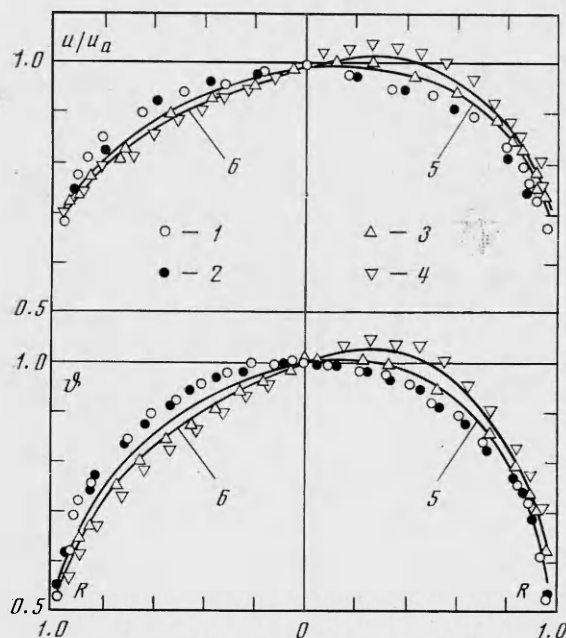


Фиг. 2

На фиг. 2 сопоставлено распределение температуры в потоке воздуха при $Re = 5.2 \cdot 10^4$ и $Gr = 10^9$, рассчитанное по уравнениям (19) (кривые 6) и (21) (кривые 5), с найденным экспериментально (точки 1, 2). Кривая 4 для распределения температуры при отсутствии влияния термогравитации T_0^+ построена по экспериментальным данным (точки 3), относимся к горизонтальной диаметральной плоскости. Как видно из графика, влияние термогравитационных сил в обоих случаях начинает проявляться практически одновременно. Расчет по уравнению (19) лучше соответствует экспериментальному профилю температуры. Существенное отклонение экспериментальных точек от расчетной кривой при $\varphi = 0$ связано с одновременным влиянием термогравитационных сил на турбулентный перенос и непосредственно на осредненное течение. Влияние на турбулентный перенос в данном случае существенно.

На фиг. 3 дано сопоставление рассчитанных распределений скорости u/u_a и температуры $v = (t_w - t)/(t_w - t_a)$, где u_a, t_a — значения на оси, (кривые 5, 6) с экспериментальными данными (точки 3, 4) в вертикальной диаметральной плоскости в потоке воздуха. В качестве распределений скорости $(u/u_a)_0$ и температуры v_0 при отсутствии влияния термогравитации приняты найденные экспериментально распределения в горизонтальной диаметральной плоскости (точки 1, 2). Опытные точки 1, 3 и расчетные кривые 5 относятся к значениям $Re = 5.2 \cdot 10^4$ и $Gr = 10^9$, а опытные точки 2, 4 и расчетные кривые 6 — к значениям $Re = 5.1 \cdot 10^4$ и $Gr = 1.55 \cdot 10^9$. Изменение числа Gr в рассматриваемых режимах приводит к существенной деформации профилей в вертикальной диаметральной плоскости, в горизонтальной диаметральной плоскости профили не изменяются.

При меньших значениях Gr и том же значении Re распределения u/u_a и ϑ в горизонтальной диаметральной плоскости полностью совпадают с показанными на фиг. 3. Это соответствует результатам теоретического решения (18), (19), показывающим, что в начальной стадии влияния термогравитационных сил профили аксиальной компоненты скорости u и температуры в горизонтальной диаметральной плоскости не деформируются. Расхождения между расчетными и экспериментальными данными в верхней части потока (левая часть графика) больше, чем в нижней (правая часть



Фиг. 3

графика). Это связано с пренебрежением влиянием термогравитационных сил на турбулентный перенос, которое вблизи верхней образующей более существенно, чем вблизи нижней.

Изменение местного числа Nu вблизи верхней и нижней образующих определим из соотношения

$$(22) \quad \bar{T}^+ = \text{Re}_* / \text{Nu} = T_a^+ - T_{a0}^+ + T_0^+$$

Воспользовавшись зависимостью (19), определим Nu в начальной стадии развития вторичного свободноконвективного течения

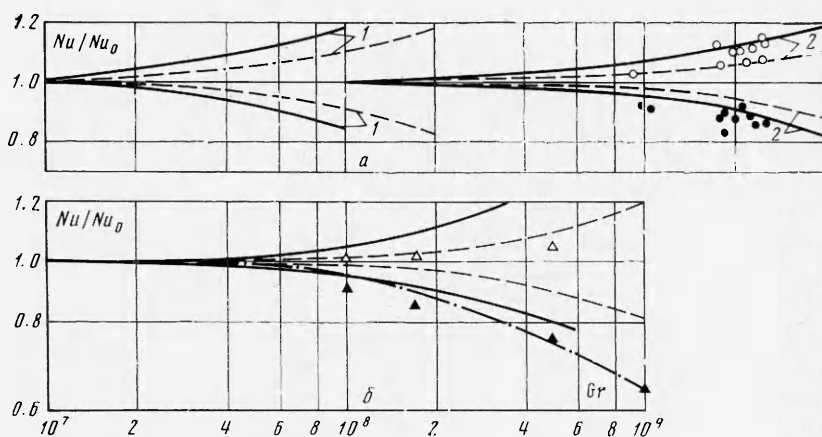
$$(23) \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_0} = 1 - \frac{340 \text{Gr} \cos \varphi}{\sqrt{\text{Pr}} \text{Re}^{2.75}} \left(1 + 2.4 \frac{\text{Pr}^{2/3} - 1}{\text{Re}^{1/3}} \right)^{-1}$$

$$\text{Nu}_0 = \frac{\text{Re Pr} \xi / 8}{1.07 + 12.7 \sqrt{\xi / 8} (\text{Pr}^{1/3} - 1)}$$

На фиг. 4 показано изменение относительного числа Нуссельта Nu / Nu_0 на верхней и нижней образующих при $x/d > 40$ в зависимости от числа Gr для различных значений Re и Pr. На графике приведены опытные данные, полученные в [1] при течении воды ($\text{Pr} = 3.5$, $\text{Re} = 1.2 \cdot 10^4$, график б), и опытные данные при течении воздуха ($\text{Pr} = 0.7$, $\text{Re} = 5.1 \cdot 10^4$, график а). На этом графике также нанесены кривые, рассчитанные для соответствующих опытным данным параметров по уравнению (23) (сплошные линии) и по зависимостям, полученным в [4], где рассматривалось

влияние термогравитации только на турбулентный перенос (пунктирные линии). Согласование результатов расчета для воздуха с опытными данными можно считать удовлетворительным. В случае течения воды результаты одного из расчетов лучше согласуются с опытными данными вблизи верхней образующей, а результаты другого — с опытными данными вблизи нижней образующей.

Такое различие в характере изменения теплоотдачи может быть связано с тем, что соотношения, полученные для начальной стадии процесса, неполно учитывают влияние числа Gr , которое может по-другому прояв-



Фиг. 4

ляться при больших значениях Gr . Кривые 1 на графике а соответствуют тому же значению $Re = 1.2 \cdot 10^4$, что и на графике б. Штрихпунктирная линия на графике б построена по эмпирическому уравнению, полученному в [4].

Из уравнения (23) можно получить соотношение, определяющее границу «однопроцентного» изменения Nu на верхней (нижней) образующей в результате влияния термогравитационных сил. Это соотношение имеет вид

$$(24) \quad Gr = 3 \cdot 10^{-5} \sqrt{Pr} Re_{2.75} [1 + 2.4 (Pr^{2/3} - 1) / Re^{1/3}]$$

Сравнение с опытными данными, полученными при течении воды и воздуха, показывает, что зависимость (24) четко разграничивает область заметного влияния термогравитации на местную теплоотдачу в горизонтальных трубах и область режимов без влияния термогравитации.

Поступила 28 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Petukhov B. S., Polyakov A. F. Flow and heat transfer in horizontal tubes under combined effect of forced and free convection. Heat Transfer, 1970, vol. 6, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1970.
2. Kirschbaum E., Winckelsesser G., Wetjen A. K. Neues uber den Wärmeaustausch. Chem. Ingr Techn., 1951, Bd 23, Nr 15, 16.
3. Polyakov A. F. The effect of free convection heat transfer and flow resistance in turbulent flow horizontal tubes. Heat and Mass Transfer in Turbulent Boundary. Radisa Tumotic, Beograd, 1970.
4. Поляков А. Ф. Границы влияния архимедовых сил на течение и теплообмен в горизонтальных пристенных турбулентных потоках. В сб. «Теплообмен и физическая газодинамика». М., «Наука», 1974.
5. Gowen R. A., Smith J. W. The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pipe flow. Chem. Engng Sci., 1967, vol. 22, No. 12.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.