РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2013 № 3

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 624.1+534.1

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УДАРНОГО ПОГРУЖЕНИЯ ТРУБЫ В ГРУНТ С СУХИМ ТРЕНИЕМ. Ч. II. ВНЕШНЯЯ СРЕДА ДЕФОРМИРУЕМА

Н. И. Александрова

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: alex@math.nsc.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Исследуется распространение продольных волн в упругой трубе, частично погруженной в среду с сухим трением. Математическая постановка задачи ударного погружения трубы в грунт опирается на модель продольных колебаний упругого стержня с учетом бокового сопротивления. Боковое действие грунта описывается законом контактного сухого трения. Решен ряд задач о продольном нагружении трубы, взаимодействующей с внешней упругой средой, проведено сопоставление численных и аналитических результатов. Сравниваются расчеты, полученные с учетом и без учета деформируемости среды, окружающей трубу.

Продольные волны, упругий стержень, сухое трение, импульсное нагружение, численное моделирование

Проблемы “поведения” труб в грунте возникают во многих технологических процессах: забивка и ударное извлечение свай, бестраншейная прокладка подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт, поведение подземных трубопроводов при землетрясениях. Движение разного рода стержневых элементов в механических системах также сопровождается трением. Одной из важнейших задач при этом является изучение влияния на волновой процесс трения внешней среды и боковой поверхности трубы или стержня. Исследованию вопросов взаимодействия тел с учетом трения посвящена обширная литература [1 – 40]. В [1 – 10] можно найти обзоры и исторические очерки по данной тематике.

Впервые волновые процессы в стержнях, окруженных средой, были рассмотрены Н. М. Герсевановым [11] в 1930 г. на основе теории Сен-Венана в связи с проблемой забивки свай в грунт. В дальнейшем задача о распространении продольных волн в стержне, на поверхности которого действует постоянная по амплитуде, но разная по направлению сила сухого трения, исследовалась в [7 – 25]. В этих работах внешняя среда, окружающая стержень, предполагается недеформируемой. Используется общий метод решения таких задач, который состоит в сведении рассматриваемой нелинейной задачи к ряду решаемых последовательно линейных задач. Основная проблема связана с определением границ областей по времени и продольной координате, внутри которых величина и направление силы трения постоянны. Направление действия сил трения зависит от знака скорости в этих волнах. Решение в каждой из областей строится учетом предварительно определенного знака скорости. Использование описанного подхода позволило получить решения для целого ряда задач при достаточно простых законах нагружения стержня.

В [8, 13, 15] рассмотрены нестационарные и стационарные одномерные задачи о движении трубопровода, взаимодействующего с вмещающей породой по закону внешнего сухого трения в рамках модели звукового и сверхзвукового обтекания конечного и бесконечного стержня, в [19] задача о погружении сваи в грунт решается численно в двумерной постановке.

Большое количество работ посвящено проблеме забивания свай в грунт [26 – 35]. В [26] экспериментальные данные записи ускорения молота используются при расчете распределения сопротивления грунта вдоль сваи. В [27] предложена простая динамическая модель для определения коэффициента сопротивления грунта, возникающего в процессе забивания сваи, расчеты сравнены с базой данных динамических тестов и обсуждается, как эта модель сопротивления грунта может быть использована в волновом уравнении, которое описывает движение сваи. В [28] динамический анализ нагруженной по боковой поверхности сваи осуществляется с помощью гранично-элементной формулировки для грунта. В [29, 30] используется метод конечных элементов для осесимметричной двумерной задачи погружения сваи в глину, на поверхности сваи и грунта применяется алгоритм скользящего фрикционного контакта. В [31] экспериментально исследуется влияние грунтовой пробки, которая формируется внутри забиваемой с открытым концом сваи, на статическую и динамическую реакцию сваи. В [32] на основе анализа волнового уравнения, предложенного в работе [22], оценивается несущая способность сваи и результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными. В [33, 34] численно решается задача о забивании сваи, при этом фрикционный контакт свая – грунт моделируется с использованием теории упрочнения/разупрочнения пластичности. В [35] проводится конечно-элементный анализ на основе кулоновского закона контактного трения на поверхности свая – грунт, результаты сравниваются с экспериментальными данными. Большое количество экспериментальных работ, посвященных проблеме погружения трубы в грунт, представлены в [36 – 40]. Заметим, что в работах [26 – 40] не рассматриваются нестационарные проблемы взаимодействия упругого грунта с погружаемой сваей.

Динамическая задача о распространении возмущений в композите, состоящем из волокна и связующего, на поверхности контакта которых задано сухое трение, приведена в [41]. Движение волокна и связующего элемента описывается одномерными волновыми уравнениями, для которых получено аналитическое решение и проведены численные расчеты методом конечных элементов. Нагрузка предполагалась растущей линейно со временем. Основное внимание уделено исследованию эффекта запаздывания возмущений по сравнению со скоростью распространения волны в стержне.

Данная работа является продолжением [21], но здесь учтено деформирование окружающей среды и выполнено сравнение расчетов, проведенных по двум моделям, определены пределы применимости более простой модели. Использован способ сквозного численного расчета волновых процессов в системах с сухим трением, позволяющий рассматривать нагрузку любого типа. Получены приближенные аналитические решения одномерной задачи о распространении возмущений в радиальном направлении в упругой среде, взаимодействующей с трубой без проскальзывания, при продольном воздействии, приложенном к торцу трубы. Эти решения являются тестовыми для конечно-разностных решений двумерных задач, в которых на поверхности контакта трубы и среды задается либо упругое взаимодействие, либо сухое трение.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи ударного погружения трубы в грунт опирается на модель продольных колебаний упругого стержня с учетом бокового сопротивления. Исследуется следующая смешанная динамическая осесимметричная задача о взаимодействии упругой цилиндрической трубы с упругим слоем грунта. По торцу трубы наносится продольный удар массивным телом. Движение трубы описывается одномерным волновым уравнением, боковое действие грунта при малых деформациях — упрощенными моделями упругой среды, а в состоянии текучести — законом сухого трения.

Рассматривается упругий трубчатый стержень (R — радиус; h — толщина стенки) длиной L, заглубленный в грунт на величину L_1. К его торцу прикладывается продольный полусинусоидальный импульс с амплитудой P_0 и длительностью t_0:

$$Q(t) = P_0 \sin(\omega_* t) H_0(t_0 - t) H_0(t), \quad \omega_* = \pi / t_0, \tag{1}$$

где $H_0(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с ударяемым концом стержня, а ось Z была направлена параллельно оси стержня в глубь среды. Движение стержня описывается одномерным волновым уравнением относительно перемещений $U(t,z)$:

$$\ddot{U} = c^2 U''_{,zz} + \tau(z, \varepsilon_{rz}). \tag{2}$$

Здесь $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость продольной волны в стержне; E — модуль Юнга; ρ — плотность материала трубы; τ — реакция среды.

Начальные условия нулевые:

$$U\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{U}\big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

На торце стержня $z = 0$ задается напряжение, торец $z = L$ свободен от напряжений:

$$ES_t U'_{,z}\Big|_{z=0} = -Q(t), \quad ES_t U'_{,z}\Big|_{z=L} = 0, \tag{4}$$

где $S_t = \pi h(2R - h)$ — площадь поперечного сечения трубы.

Зависимость $\tau(z, \varepsilon_{rz})$ соответствует упругопластической диаграмме с учетом зуба текучести (рис. 1). Интерпретация диаграммы такова: упругий участок от 0 до τ_0 соответствует сцеплению трубы и среды; при достижении предельного сдвигового напряжения τ_0 начинается страгивание; τ_1 — напряжение, при котором происходит проскальзывание (обычно оно пропорционально прижимающей силе). При остановке текущего сечения трубы $z > L - L_1$ вновь происходит сцепление с грунтом, которое в дальнейшем опять может быть нарушено приходом волн напряжений, отраженных от торцов. Направление действия сил трения определяется в зависимости от знака скорости в этих волнах. В данной работе предполагается, что $\tau_0 = \tau_1$.

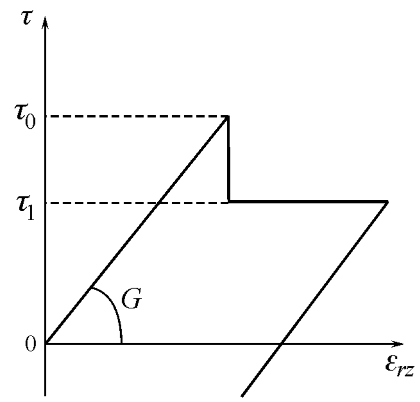

Рис. 1. Зависимость реакции среды от сдвиговой деформации

На упругой стадии процесса взаимодействия, когда $\mathrm{abs}(\tau) < \tau_0$, для определения сдвигового напряжения грунта, действующего на трубу, используем двумерную модель среды с одним перемещением V в направлении z:

$$\ddot{V} = a^2 V''_{,zz} + b^2\left(V''_{rr} + \frac{1}{r}V'_{,r}\right), \quad a^2 = \frac{\lambda + 2G}{\gamma}, \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}. \tag{5}$$

Здесь G — модуль сдвига; λ — коэффициент Ламе; γ — плотность грунта; r — радиальная координата. Уравнение (5) представляет модель среды, учитывающую сжимаемость грунта вдоль оси трубы (коэффициент a^2), сопротивляемость материала сдвигу (коэффициент b^2) и инерционность грунта при движении его частиц вдоль оси трубы.

В монографии [42] эта модель последовательно применялась для широкого круга статических и динамических задач и было показано, что амплитуды деформаций и их частных производных в осевом направлении существенно превышают соответствующие величины в радиальном направлении. Это позволяет перейти от точной модели теории упругости к физически адекватной и математически более простой модели деформируемой среды с одним перемещением (5).

Граничное условие для уравнения (5) на поверхности трубы при отсутствии проскальзывания следующее:

$$V(z,r)\big|_{r=R} = U(z), \quad L - L_1 \le z \le L. \tag{6}$$

Оно определяет равенство перемещений трубы и грунта на поверхности трубы. Остальные граничные условия соответствуют отсутствию перемещений на внешней границе грунта $r = R_2$ и напряжений на свободных поверхностях грунта:

$$V(z,r)\big|_{r=R_2} = 0 \quad (L - L_1 \le z \le L), \quad V'_{,z}(z,r)\big|_{z=L-L_1} = 0, \quad V'_{,z}(z,r)\big|_{z=L} = 0. \tag{7}$$

При этом реакция среды τ выражается так:

$$\tau(z,t) = \frac{P_t}{S_t\rho}\begin{cases} GV'_{,r}\big|_{r=R}, & z > L - L_1, \\ 0, & z \le L - L_1. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $P_t = 2\pi R$ — периметр трубы.

На этапе проскальзывания грунта, когда $\mathrm{abs}(\tau) > \tau_0$, труба взаимодействует с ним по закону сухого трения:

$$\tau(z,t) = \frac{P_t}{S_t\rho}\begin{cases} -k\tau_0, & z > L - L_1, \\ 0, & z \le L - L_1, \end{cases} \tag{9}$$

$$k = \mathrm{sign}[\dot{U}(z) - \dot{V}(z,R)] \quad \text{при} \quad \dot{U} - \dot{V} \ne 0 .$$

Поскольку при проскальзывании силы трения, действующие на стержень и среду, совпадают по величине и различны по направлению, для среды имеем следующие граничные условия:

$$GV'_{,r}\Big|_{r=R} = k\tau_0. \tag{10}$$

Ниже предлагается способ сквозного численного расчета волновых процессов в системах с сухим трением, позволяющий рассматривать нагрузку любого типа, поскольку направление и величина силы трения в каждой точке стержня и в каждый момент времени выбирается в процессе решения из физических соображений, а также приведены аналитические оценки для некоторых задач.

Особенности численных алгоритмов. Система уравнений $(1)-(10)$ решалась численно для одиночного удара. Использовалась явная конечно-разностная схема типа “крест” и способ минимизации численной дисперсии. Аппроксимация уравнения (5) имеет вид

$$V_{ji}^{n+1} - 2V_{ji}^{n} + V_{ji}^{n-1} = \left[a^2\Lambda_{jj}V_{ji}^{n} + b^2\left(\Lambda_{ii}V_{ji}^{n} + \frac{1}{r}\Lambda_i^0 V_{ji}^{n}\right)\right]h_t^2 . \tag{11}$$

Здесь Λ_{jj}, Λ_{ii} — центрально-разностные операторы второго порядка по координатам *z*, *r*; Λ_i^0 — центрально-разностный оператор первой производной по *r*; $V_{ji}^n = V(h_t n, h_z j, r_i)$ — сеточные значения перемещений среды в момент времени $t = h_t n$ в точке с координатами $z = h_z j$; $r_i = R + h_r(i-1)$, $i = 1,2,\ldots$; h_t, h_z, h_r — шаги разностной сетки по координатам *t*, *z*, *r*.

Аппроксимация уравнения (2) имеет вид

$$U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = (c^2\Lambda_{jj}U_j^n + \tau_j^n)h_t^2 , \tag{12}$$

где $U_j^n = U(h_t n, h_z j)$, $\tau_j^n = \tau(h_t n, h_z j)$ — сеточные значения перемещений трубы и сдвиговых напряжений на поверхности трубы.

Условия устойчивости разностных уравнений (11) и (12) запишутся так:

$$h_t \le \left(\frac{a^2}{h_z^2} + \frac{b^2}{h_r^2}\right)^{-1/2}, \quad h_t \le \frac{h_z}{c} .$$

Оптимальными параметрами разностной сетки, обеспечивающими минимум численной дисперсии уравнений (11), (12), являются в осевом направлении $h_z = ch_t$, в радиальном — $h_r = h_t cb/\sqrt{c^2 - a^2}$.

Остановимся более подробно на аппроксимации граничных условий. Используем правую разность для первых производных на торце стержня $z = 0$: $ES_t(U_1^n - U_0^n)/h_z = -Q(t)$, и центрально-разностную аппроксимацию в граничном условии при $z = L$. Аналогично аппроксимируем граничные условия для среды на границах $z = L - L_1$ и $z = L$. Для граничного условия (6) использовалась трехточечная аппроксимация [43].

Алгоритм расчета с учетом трения аналогичен [19, 21] и состоит в следующем. Поскольку ни направление, ни величина силы трения заранее неизвестны, в процессе решения вычисляются относительные скорости перемещений точек среды и трубы для двух возможных знаков k ($k>0$ и $k<0$):

а) в первом случае ($k>0$) введем фиктивную скорость $U_j^+ - V_{j,1}^+$, где

$$V_{j,1}^+ = \frac{V_{j,1}^{n+1} - V_{j,1}^n + h_t^2\tau_0}{h_t}, \quad U_j^+ = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n + h_t^2\tau_0}{h_t};$$

б) во втором случае ($k<0$) введем фиктивную скорость $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$, где

$$V_{j,1}^- = \frac{V_{j,1}^{n+1} - V_{j,1}^n - h_t^2\tau_0}{h_t}, \quad U_j^- = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n - h_t^2\tau_0}{h_t}.$$

В этих двух случаях $V_{j,1}^{n+1}$ и U_j^{n+1} вычисляются из разностных уравнений (11), (12) без учета трения.

При этом возможны две ситуации:

1. Если скорости $\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+$ и $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$ одного знака, то в качестве истинных значений смещений $V_{j,1}^{n+1}$, U_j^{n+1} из $V_{j,1}^+$, U_j^+ и $V_{j,1}^-$, U_j^- выбирается пара $V_{j,1}^k$, U_j^k, для которой достигается минимум

$$\mathrm{abs}(\dot{U}_j^k - \dot{V}_{j,1}^k) = \min[\mathrm{abs}(\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-), \mathrm{abs}(\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+)].$$

2. Если скорости $\dot{U}_j^+ - \dot{V}_{j,1}^+$ и $\dot{U}_j^- - \dot{V}_{j,1}^-$ разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о пассивности трения, следует вывод о том, что реальная относительная скорость среды и трубы равна нулю. Точки среды и трубы склеиваются и движутся вместе, следовательно, сила трения отсутствует и снова начинается упругое взаимодействие трубы и среды.

Таким образом, проблема определения границы, разделяющей области относительного движения и относительного покоя, представляющая основную трудность в аналитических решениях, сводится к выявлению точек, где $\dot{V}_{j,1}^+ - \dot{U}_j^+$ и $\dot{V}_{j,1}^- - \dot{U}_j^-$ разных знаков или одна из них обращается в нуль.

Поскольку в процессе расчета однозначно определяется величина и направление действия силы трения, на каждом временном слое решается линейная задача, в которой сила трения теперь определена и входит как нагрузка в правую часть уравнения. Остановимся далее на следующей особенности трения в задачах о взаимодействии трубы и грунта. В ряде случаев трение может играть как пассивную, так и активную роль. Например, если частицы среды и сечения стержня движутся в одном направлении и $|\dot{V}| > |\dot{U}|$, то трение ускоряет стержень, в противном случае тормозит. Если же $\dot{V}$ и $\dot{U}$ разного знака, то всегда реализуется торможение.

Аналитические оценки. С целью тестирования конечно-разностных алгоритмов получим аналитические оценки более простых постановок данной задачи.

Рассмотрим одномерную задачу. Имеется тонкий (в направлении оси z) слой среды радиусом R_2, и в нее упруго заделана труба радиусом R. Движение среды описывается одномерным волновым уравнением по радиальной координате r, которое получено из (5) в предположении, что производными по оси z можно пренебречь:

$$\ddot{V} = b^2\left(V''_{,rr} + \frac{1}{r}V'_{,r}\right), \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}. \tag{13}$$

Граничные условия:

$$V(r)\big|_{r=R} = U, \quad V(r)\big|_{r=R_2} = 0. \tag{14}$$

Уравнение движения трубы получаем из (2), также предполагая, что зависимостью перемещения от переменной z можно пренебречь:

$$\ddot{U} = \frac{P_t G}{S_t \rho} V'_{,r}\bigg|_{r=R} + \frac{Q(t)}{S_t \rho}. \tag{15}$$

Начальные условия нулевые.

Применим преобразование Лапласа по времени с параметром p. Уравнения движения и граничные условия (13) – (15) в изображениях имеют вид:

$$p^2 V^L = b^2\left[(V''_{,rr})^L + \frac{1}{r}(V'_{,r})^L\right], \quad p^2 V^L\big|_{r=R} = \frac{P_t G}{S_t \rho}(V'_{,r})^L\bigg|_{r=R} + \frac{Q^L}{S_t \rho}, \quad V^L\big|_{r=R_2} = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим сначала случай безграничной среды ($R_2 \to \infty$). Предположим, что к трубе приложена ступенчатая нагрузка $Q(t) = P_0 H_0(t)$. Решение системы уравнений (16) в изображениях по Лапласу запишется так:

$$U^L = \frac{P_0 K_0(\eta)}{L S_t \rho p^2 (p K_0(\eta) + K_1(\eta) P_t \gamma b / S_t \rho)},$$

где K_0, K_1 — цилиндрические функции мнимого аргумента, $\eta = Rp/b$.

Асимптотика решения в изображениях при $p \to 0$, что соответствует $t \to \infty$ в пространстве оригиналов, имеет вид

$$U^L = \frac{P_0}{2\pi G p} \ln\left(\frac{pCR}{2b}\right).$$

Обращая преобразование Лапласа [44], получим следующую асимптотическую зависимость перемещения трубы от времени при $t \to \infty$ в случае безграничной среды:

$$U(t) = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{2bt}{R}\right), \quad (t \to \infty). \tag{17}$$

С учетом отражений волн от внешней границы $r = R_2$ решение в изображениях уравнений (16) примет вид

$$U^L = \frac{P_0}{S_t \rho p^2}\left(p + \frac{[K_0(\eta) I_0(\eta_2) - I_0(\eta) K_0(\eta_2)]}{[K_1(\eta) I_0(\eta_2) - I_1(\eta) K_0(\eta_2)]} \frac{P_t \gamma b}{S_t \rho}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Здесь I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя, $\eta = Rp/b$, $\eta_2 = R_2 p/b$.

Если $t \to \infty$ ($p \to 0$), то из (18) следует, что решение осциллирует относительно статического положения равновесия, определяемого формулой

$$U_{stat} = \frac{P_0}{2\pi G} \ln\left(\frac{R_2}{R}\right). \tag{19}$$

На рис. 2 представлены результаты конечно-разностного решения системы уравнений (13)–(15) (сплошные линии), асимптотическое решение (17) (штриховая линия) и статическое значение (19) (штрихпунктирные линии). Толстые кривые соответствуют значению $R_2 = 20$ м, тонкие — $R_2 = 2$ м. Параметры разностной сетки: $h_r = 0.01$ м, $h_t = h_r / b$. Остальные параметры: $P_0 = 88$ кН, $E = 2.1 \times 10^5$ МПа, $h = 0.003$ м, $R = 0.045$ м, $\rho = 7530$ кг/м^3, $\gamma = 2000$ кг/м^3, $a = 0.611$ м/мс, $b = 0.357$ м/мс — в дальнейшем взяты в качестве базового набора. Здесь и далее использованы среднестатистические параметры грунтов, соответствующие суглинку.

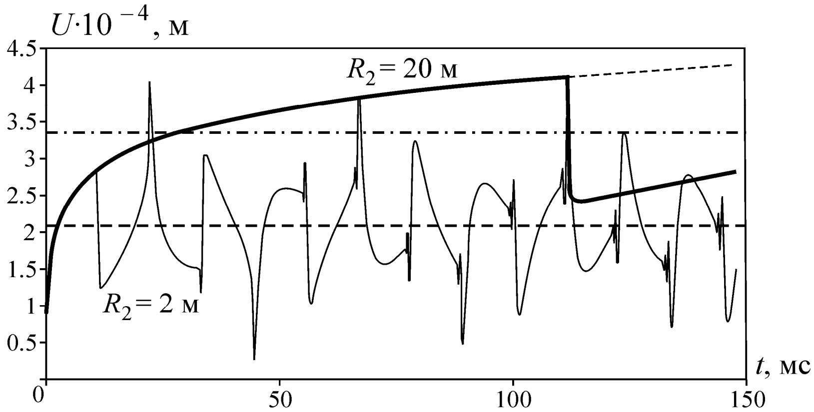

Рис. 2. Осциллограммы перемещений при ступенчатом воздействии

Анализ рис. 2 показывает, что асимптотическое решение (17) с большой точностью описывает конечно-разностное решение от начала воздействия до прихода первой отраженной от внешней границы волны. Наличие отражений от границ $r = R$, $r = R_2$ приводит к колебаниям перемещения относительно статического значения (19).

Рассмотрим теперь импульсное воздействие (1) на трубу со средой конечного радиуса R_2. Асимптотическое решение в изображениях системы уравнений (16) имеет следующий вид:

$$U^L = \frac{P_0 \omega_* (1 + e^{-p\pi / \omega_*})}{S_t \rho (p^2 + \omega_*^2)(p^2 + \beta^2)}, \quad \beta^2 = \frac{2\pi G}{S_t \rho \ln(R_2 / R)}.$$

Обращая данное выражение [44], получим зависимость от времени для перемещения оболочки:

$$U = \frac{P_0}{S_t \rho \beta (\omega_*^2 - \beta^2)} \begin{cases} \omega_* \sin \beta t - \beta \sin \omega_* t, & t \le t_0, \\ \omega_* (\sin \beta t + \sin \beta (t - t_0)), & t > t_0. \end{cases}$$

Если $\omega_* << \beta$, то эту формулу можно упростить:

$$U = U_0 \begin{cases} \sin \omega_* t, & t \le t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases} \quad U_0 = \frac{P_0}{S_t \rho \beta^2}. \tag{20}$$

На рис. 3 приведены примеры расчета импульсного воздействия на трубу, впаянную в среду ограниченного радиуса $R_2 = 2$ м. Длительность импульса равна $t_0 = 2(R_2 - R)/b$ для кривой *1*, $t_0 = 4(R_2 - R)/b$ — для кривой *2* и $t_0 = 12(R_2 - R)/b$ — для кривой *3*, остальные параметры из базового набора. Сплошные линии соответствуют конечно-разностному решению, штриховые — приближенному решению (20), штрихпунктирные — значению U_0. Сравнение решения (20) и численных расчетов показывает, что если длительность импульса кратна времени четырех пробегов волны по среде от одной границы до другой: $t_0 = 4n(R_2 - R)/b \;\; (n = 1, 2, ...)$, то отраженные от внешней границы волны гасят импульс. Как видно на рис. 3, перемещение трубы и качественно и количественно верно описывается приближенным аналитическим решением (20).

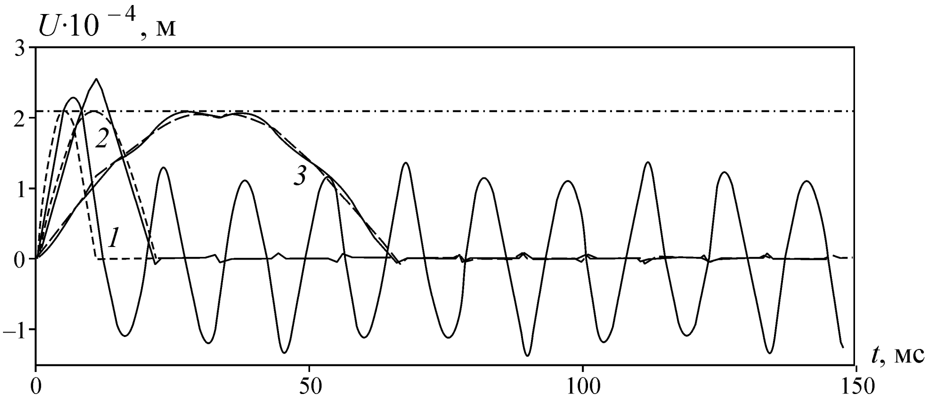

Рис. 3. Осциллограммы перемещений при импульсном воздействии

Результаты численных расчетов двумерной задачи упругого взаимодействия на границе трубы и среды. Проводились конечно-разностные расчеты системы уравнений (2) – (8) для слоя среды толщиной $L = L_1 = 0.2$ м $= 2h_z$ и радиусами $R_2 = 2$ м и $R_2 = 20$ м при ступенчатом воздействии. Анализ решений показал, что для двумерной задачи также характерна логарифмическая зависимость решения от времени, как и для одномерной. Качественное поведение решений одномерной (см. рис. 2) и двумерной задачи совпадает.

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов перемещения оболочки в зависимости от времени при ступенчатом воздействии для различных значений длины трубы и среды ($L = L_1$). Параметры задачи: $R_2 = 20$ м, $h_z = 0.1$ м, остальные — из базового набора. Анализ расчетов показал, что с ростом длины трубы величина перемещений в сечении $z = 0$ в момент времени $t = 100$ мс уменьшается пропорционально логарифмической функции: $F(L) = (898 \ln(L) + 2061)^{-1}$. Для маленьких значений L (толщина слоя в направлении оси z равна двум шагам разностной сетки $L = 2h_z$) конечно-разностное решение дает большую погрешность по сравнению с функцией $F(L)$.

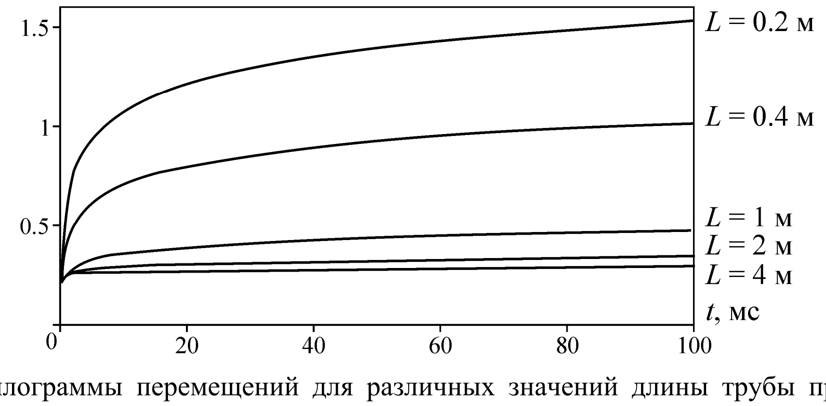

Рис. 4. Осциллограммы перемещений для различных значений длины трубы при ступенчатом воздействии

На рис. 5 показаны кривые перемещения трубы при действии полусинусоидального импульса (1), длительность которого равна $t_0 = 4(R_2 - R)/b$, для двух значений длины трубы и среды ($L = L_1$). Параметры задачи: $R_2 = 2$ м, $h_z = 0.1$ м, остальные — из базового набора. Качественное поведение решений двумерной и одномерной задач совпадает (см. рис. 3, 5).

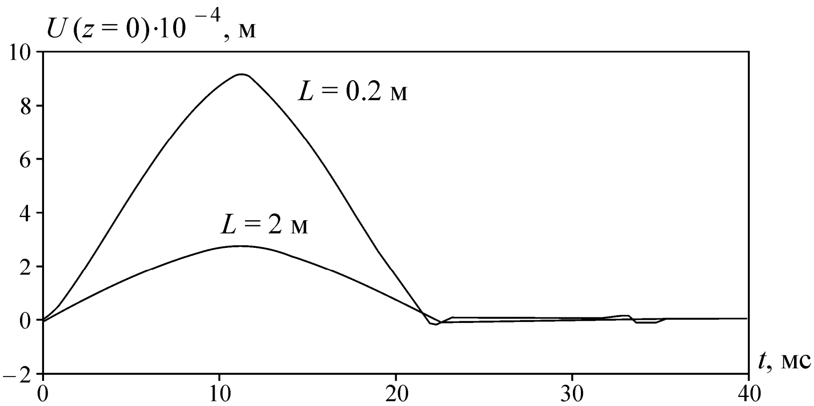

Рис. 5. Осциллограммы перемещений при импульсном воздействии

На рис. 6 приведены эпюры сдвиговых напряжений среды на поверхности трубы в различные моменты времени. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.25$ мс, остальные — из базового набора. На рис. 6*б* вертикальные штриховые линии соответствуют зоне квазифронтов: $z = at$. Анализ рис.6а показывает, что в окрестности квазифронта продольной волны, бегущей со скоростью волн в стержне c, амплитуда максимальных сдвиговых напряжений со временем падает по экспоненте, как $\sim e^{-0.85ct}$. В окрестности квазифронта продольных волн в среде ($z = at$) максимальная амплитуда сдвиговых напряжений падает примерно, как $t^{-4/3}$ (рис. 6*б*). На рис. 6 видно, что со временем преобладают возмущения, движущиеся со скоростью продольных волн в среде. Анализ рис. 6*б* позволяет оценить величину силы трения, при которой начнется проскальзывание трубы в среде в зависимости от длины трубы и от амплитуды действующего импульса.

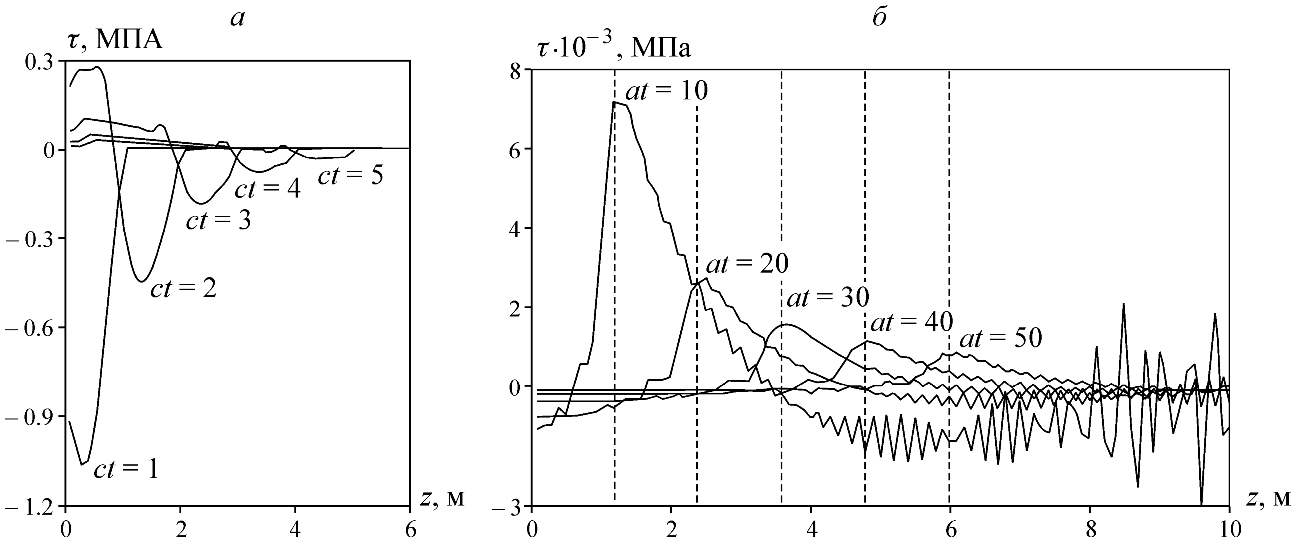

Рис. 6. Эпюры сдвиговых напряжений среды на поверхности трубы в различные моменты времени

Результаты численных экспериментов для двумерной задачи с учетом проскальзывания на границе трубы и грунта. На рис. 7 представлены зависимости перемещений трубы в точке $z = 0$ от времени при действии полусинусоидального импульса для различных значений предельного сдвигового напряжения: рис. 7*а* — $\tau_0 = 0.1$, 0.05, 0.03, 0.02, 0.015, 0.01 МПа, рис. 7*б* — $\tau_0 = 10$, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.08 МПа. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.22$ мс, остальные — из базового набора. Значение $\tau_0 = 10$ МПа соответствует упругому процессу взаимодействия, при этом торец трубы $z = 0$ совершает осцилляции относительно нуля. С уменьшением предельной амплитуды напряжений сдвига амплитуда осцилляций уменьшается (см. кривые $\tau_0 = 0.3$ и $\tau_0 = 0.2$ МПа на рис. 7*б*), а затем появляется остаточное смещение (см. кривые $\tau_0 = 0.15$ и $\tau_0 = 0.1$ МПа на рис. 7*б* и все кривые на рис. 7*а*), которое растет с уменьшением τ_0. Как видно на рис. 7*б*, если $\tau_0 \le 2P_0 / LP_t$, то происходит проскальзывание трубы относительно среды. Анализ зависимости перемещений в момент времени $t = 100$ мс от коэффициента τ_0 показал, что эта зависимость близка к обратной функции: $\max U(\tau_0) \approx 28\tau_0^{-1}$.

Анализ расчетов перемещений, проведенных для различных значений длины трубы, показал, что зависимость среднего перемещения $2U_{\text{ср}} = (\max_z U + \min_z U)\Big|_{t=100\text{ мс}}$ обратно пропорциональна длине трубы. Этот результат качественно отличается от поведения трубы упруго заделанной в грунт (см. рис. 4), для которого эта зависимость имеет логарифмический характер.

Таким образом, можно сделать вывод, что при действии внешнего сухого трения перемещение трубы обратно пропорционально силе трения $F_{\text{тр}} = P_t L \tau_0$.

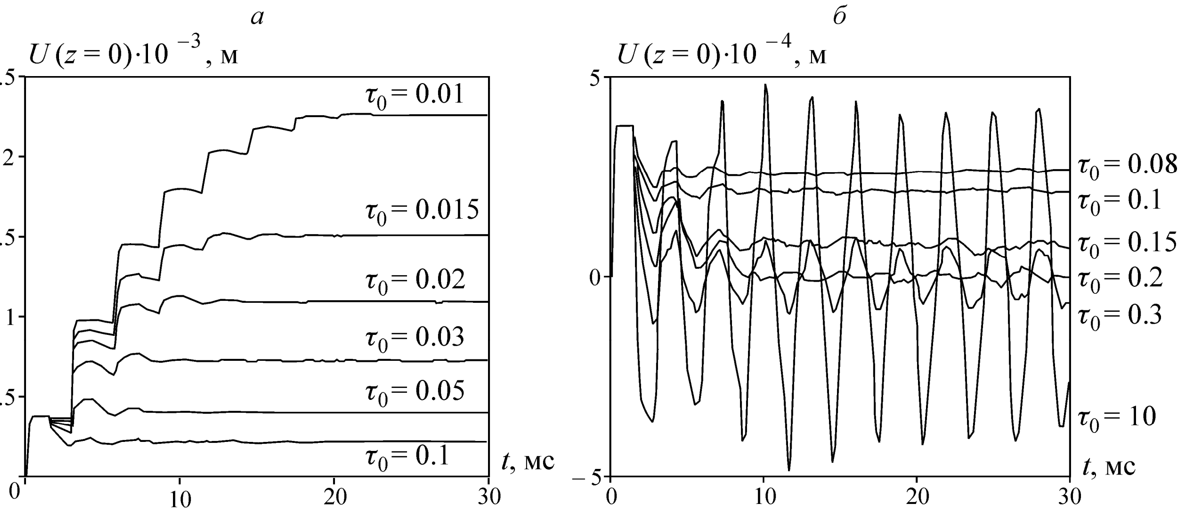

Рис. 7. Осциллограммы перемещений трубы в точке $z = 0$

На рис. 8 приведены расчеты, выполненные по двум моделям, при импульсном воздействии для различных значений предельного сдвигового напряжения. Тонкая кривая соответствует модели (2)–(10), толстая — модели (2)–(4), (9), использованной в [21], в которой движение внешней среды не учитывается. Параметры задачи: $L = 7.5$ м, $L_1 = 4$ м, $R_2 = 0.8$ м, $t_0 = 0.22$ мс, остальные — из базового набора. Видно, что соответствие двух моделей достигается, если $\tau_0 < 0.02$ МПа, т. е. если $\tau_0 < P_0 /(4LP_t)$. Из этого неравенства следует, что если длина трубы не превосходит некоторой величины, зависящей от амплитуды импульса, предельного напряжения сдвига и периметра трубы — $L < L_* = P_0 /(4\tau_0 P_t)$, то можно не учитывать движение внешней среды и пользоваться более простой моделью.

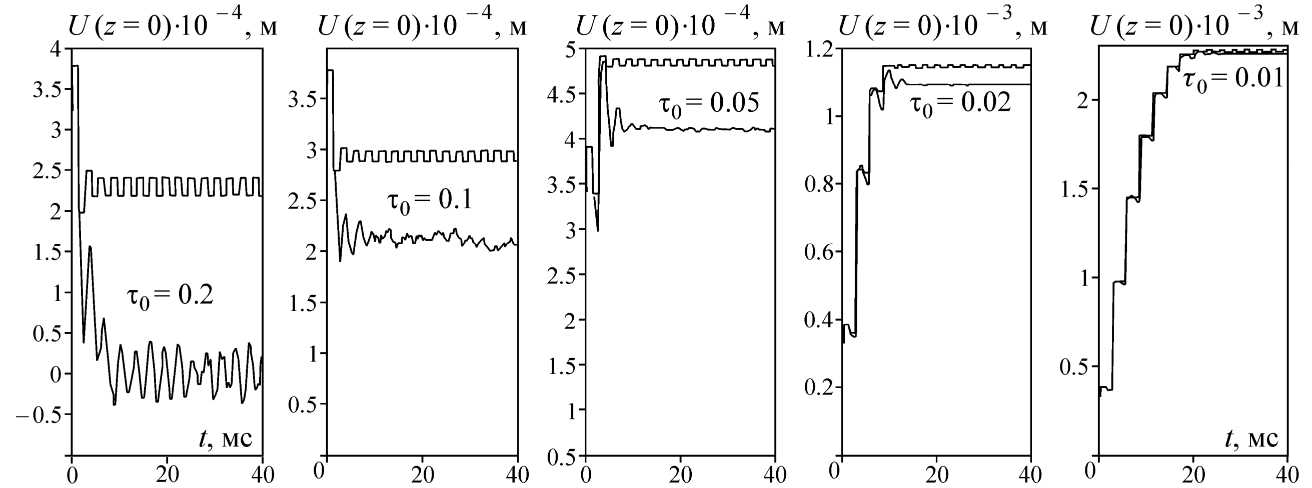

Рис. 8. Осциллограммы перемещений трубы в точке $z = 0$

На рис. 9*а* приведены осциллограммы перемещений в сечении $z = 0$ для различных значений амплитуды импульса. Параметры задачи: $L = L_1 = 4$ м, $t_0 = 1$ мс, $E = 2.03\times 10^5$ МПа, $h = 0.01$ м, $R = 0.1625$ м, $\rho = 7805$ кг/м^3, $h_z = 0.1$ м, $\tau_0 = 0.02$ МПа. На рис. 9*а* тонкие кривые соответствуют $R_2 = 0.2$ м, толстые — $R_2 = 4$ м. Как видно из сравнения кривых, при малых значениях амплитуды импульса ($P_0 / S_t < 10$ кН) или, что то же самое, при малых отношениях $P_0 / F_{\text{тр}}$ влияние внешнего радиуса среды на остаточное перемещение заметно. Таким образом, когда начинается проскальзывание, величина внешнего радиуса среды практически не оказывает влияние на волновой процесс в трубе. На рис. 9*б* показана зависимость перемещений в сечении $z = 0$ в момент времени $t = 100$ мс от амплитуды импульса. Конечно-разностное решение — тонкая кривая, его приближенная аппроксимация, которая описывается функцией $U(P_0 / S_t) = 0.0014 P_0^2 / S_t^2 - 0.0059 P_0 / S_t - 0.008$, — толстая кривая. Этот результат качественно подтверждает вывод, сделанный в [21], о том, что перемещение пропорционально квадрату амплитуды импульсного воздействия.

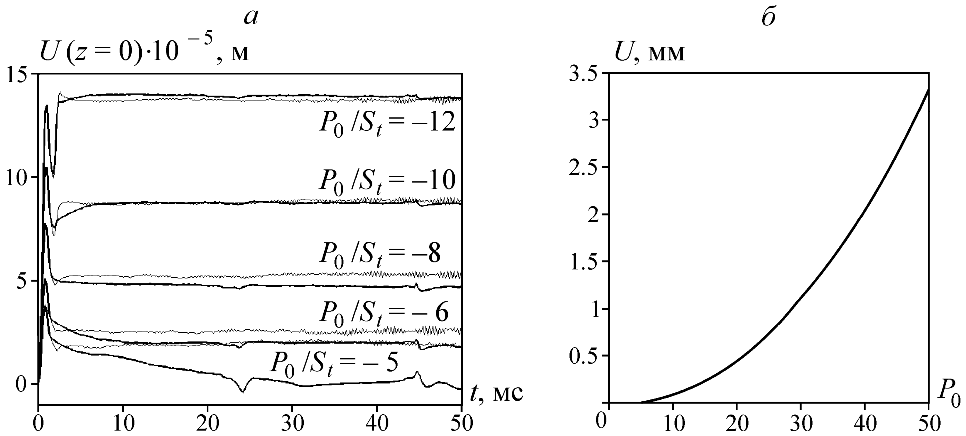

Рис. 9. Осциллограммы перемещений для различных значений амплитуды импульса (*а*) и зависимость перемещений от амплитуды импульса (*б*)

На рис. 10*а* представлены результаты расчетов осциллограмм перемещений для различных значений длины трубы ($L = L_1 = 4$, 10, 20, 30 м) и различных значений амплитуды импульса, $R_2 = 4$ м, остальные параметры задачи те же, что и на рис. 9. Цель данного численного эксперимента – определить значение амплитуды импульса, при котором средние остаточные перемещения начинают отличаться от нулевого значения, т. е. труба начинает проскальзывать. На рис. 10*б* приведена зависимость амплитуды импульса от длины трубы (сплошная линия), построенная на основе анализа результатов, представленных на рис. 10*а*. Приближенная аппроксимация этой зависимости линейна: $P_0 / S_t \approx 0.729L + 1.86$ (штриховая линия на рис. 10*б*). В [21] на модели, в которой не учитывается деформируемость окружающего трубу грунта, показано, что при данных параметрах, для того чтобы импульс дошел до конца трубы, должно выполняться равенство $P_0 / S_t = \tau_0 P_t L / (2S_t) \approx L$ (штрихпунктирная линия на рис. 10*б*). Расчеты, проведенные с учетом движения среды, показывают, что при $L > 6$ м амплитуда импульса может быть меньше, чем следует из этой оценки.

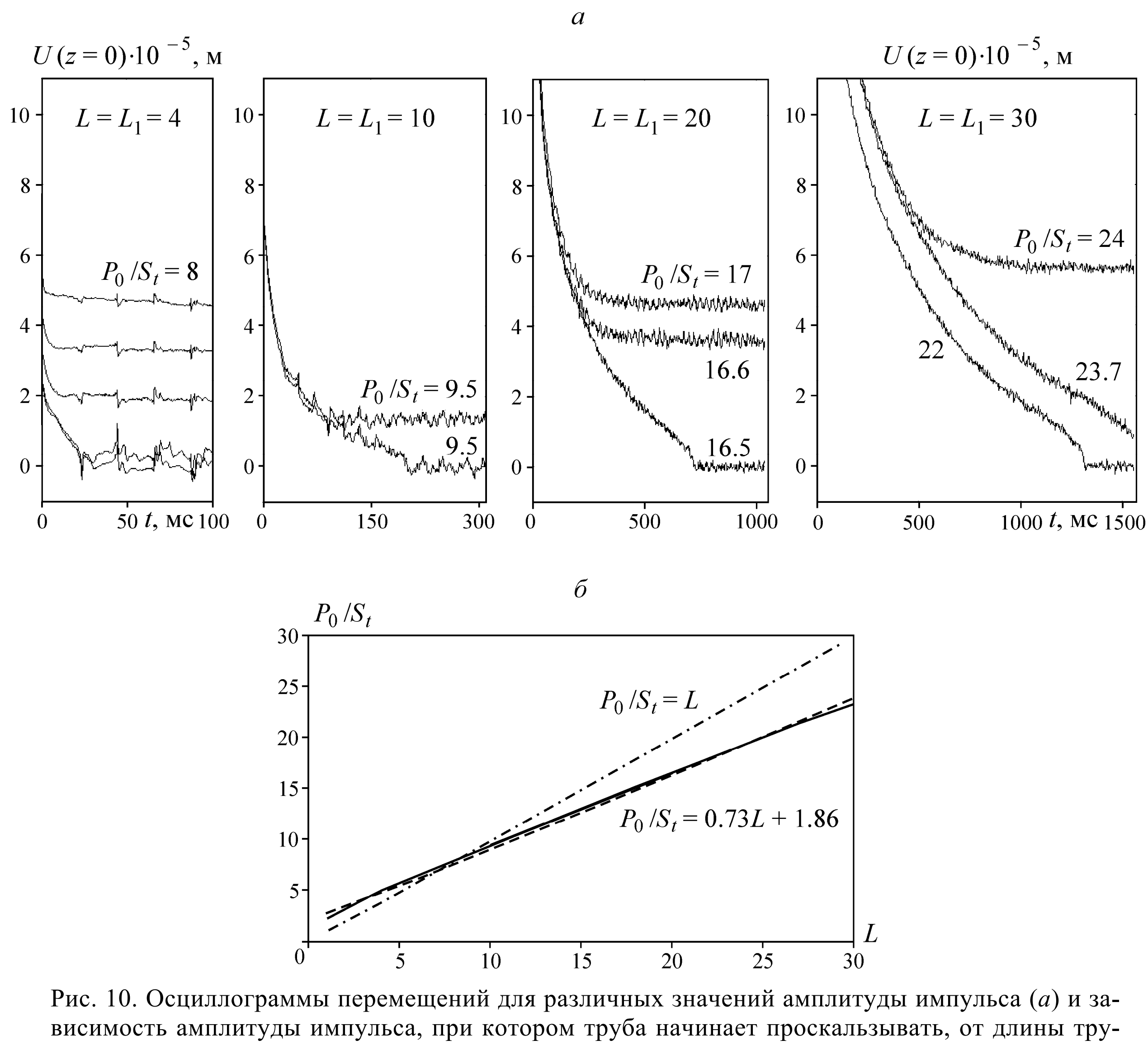

Рис. 10. Осциллограммы перемещений для различных значений амплитуды импульса (*а*) и зависимость амплитуды импульса, при котором труба начинает проскальзывать, от длины трубы (*б*)

ВЫВОДЫ

Получены явные аналитические решения одномерной в радиальном направлении задачи, описывающие поведение перемещений трубы, взаимодействующей упруго с внешней средой, при продольном воздействии. Показано, что численные и аналитические решения одномерной задачи совпадают с большой точностью. Кроме того, аналитические решения качественно верно описывают решение двумерной задачи при упругом взаимодействии трубы и среды.

В широком диапазоне изменения параметров задачи проведены конечно-разностные расчеты двумерной задачи при упругом взаимодействии с внешней средой и при сухом трении на поверхности контакта трубы и грунта. Установлено, что:

— если длина оболочки больше, чем $L_*/4$, где $L_* = P_0/(\tau_0 P_t)$, то необходимо учитывать движение грунта;

— если длина оболочки меньше, чем $L_*/4$, то учет движения внешней среды, взаимодействующей с трубой по закону сухого трения Кулона, мало влияет на результаты и расчеты могут проводиться по упрощенной модели, в которой не учитывается движение грунта;

— если длина оболочки меньше, чем $2L_*$, то происходит проскальзывание трубы относительно среды, т. е. оболочка упруго колеблется в грунте;

— величина амплитуды импульса, при котором труба начинает проскальзывать, линейно зависит от длины оболочки;

— величина проскальзывания трубы зависит от силы трения $F_{\text{тр}} = P_t L \tau_0$ обратно пропорционально;

Автор благодарит д-ра физ.-мат. наук Е.Н. Шера за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крагельский И. В., Щедров В. С.** Развитие науки о трении. Сухое трение. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. **Михин Н. М.** Внешнее трение твердых тел. — М.: Наука, 1977.
3. **Маркеев А. П.** Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992.
4. **Розенблат Г. М.** Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. — М.: URSS, 2010.
5. **Андронов В. В., Журавлев В. Ф.** Сухое трение в задачах механики. — М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010.
6. **Иванов А. П.** Основы теории систем с сухим трением. — М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
7. **Веклич Н. А., Малышев Б. М.** Распространение волн в упругих стержнях, находящихся в среде с сухим трением // Задачи механики твердого деформируемого тела. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
8. **Ормонбеков Т.** Механика взаимодействия деформируемых тел. — Фрунзе: Илим, 1989.
9. **Никитин Л. В.** Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. — М.: Московский Лицей, 1998.
10. **Юнин Е. К.** Загадки и парадоксы сухого трения. — М.: Изд-во “Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008.

11. **Герсеванов Н. М.** Свайные основания и расчет фундаментов сооружений. Т. 1. — М.: Стройвоенмориздат, 1948.
12. **Никитин Л. В.** Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. — 1988. — Т. 11. — Вып. 4.
13. **Никитин Л. В., Тюреходжаев А. Н.** Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт // Проблемы механики горных пород. — Алма-Ата: Наука, 1966.
14. **Никитин Л. В.** Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Инж. журн. МТТ. — 1967. — № 2.
15. **Никитин Л. В., Тюреходжаев А. Н.** Поведение трубопровода под воздействием ударной волны в грунте // Трение, износ и смазочные материалы: тр. Междунар. науч. конф. Т. 3. Ч. 2. — Ташкент, 1985.
16. **Никитин Л. В., Тюреходжаев А. Н.** Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // Механика композитных материалов. — 1986. — № 1.
17. **Жаркова Н. В., Никитин Л. В.** Прикладные задачи динамики упругих стержней // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 6.
18. **Mogilevsky R. I., Onnonbekov T. O., Nikitin L. V.** Dynamics of Rods with Interfacial Dry Friction, Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 1993, Vol. 5, Issue 1.
19. **Смирнов А. Л.** Динамика составных конструкций в среде при нестационарных воздействиях: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1990.
20. **Султанов К. С**. Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением // Изв. АН СССР. МТТ. — 1991. — № 6.
21. **Александрова Н. И.** Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I. Внешняя среда не деформируема // ФТПРПИ. — 2012. — № 5.
22. **Smith E. A. L.** Pile driving analysis by the wave equation. ASCE, 1960, Vol. 86, No. SM4.
23. **Cornelius C. S., Kubitza W. K.** Experimental investigation of longitudinal wave propagation in an elastic rod with coulomb friction, Exp. Mech. 1970. Vol. 10, No. 4.
24. **Wilms E. V, Wempner G. A.** Motion of an elastic rod with external coulomb friction, Trans. ASME, 1968, Ser. B, Vol. 90.
25. **Wilms E. V.** Damping of a rectangular stress pulse in a thin elastic rod by external coulomb friction, J. Acoust. Soc. Am., 1969, Vol. 45, Issue 4.
26. **Rausche F., Moses F., Goble G.** Soil resistance predictions from pile dynamics. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, ASCE, Vol. 98, No. SM9.
27. **Rausche F., Likins G., Goble G.** A Rational and Usable Wave Equation Soil Model Based on Field Test Correlation, In Proc. Int. Conf. On Design and Construction of Deep Foundations, Orlando. Florida. Dec. 1994.
28. **Sen R., Davies T. G., Banerjee P. K.** Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1985, Vol. 13, No. 1.
29. **Mabsout M., Tassoulas J.** A finite element model for the simulation of pile driving, Int. J. Numer. Methods in Engineering, 1994, Vol. 37, Issue 2.
30. **Mabsout M., Reese L. and Tassoulas J.** Study of Pile Driving by Finite-Element Method, J. Geotech. Engrg., 1995, Vol. 121, No. 7.
31. **Paik K. H., Salgado R., Lee J. H., Kim B. J.** The behavior of open- and closed-ended piles driven into sands, ASCE, 2003, Vol. 129, No. 4.

32. **Widjaja B.** Wave equation analysis and pile driving analyzer for driven piles: 18th floor office building Jacarta case, Int. Civil Engineering Conf. “Towards Sustainable Civil Engineering Practice”, Sarabaya, August 25-26, 2006.
33. **Sheng D., Wriggers P., Sloan S. W.** Improved numerical algorithms for frictional contact in pile penetration analysis, Computers and Geotechnics, 2006, Vol. 33.
34. **Sheng D., Wriggers P. and Sloan S. W.** Application of Frictional Contact in Geotechnical Engineering, International Journal of Geomechanics, 2007, Vol.7, No. 3.
35. **Khelifi Z., Berga A., Terfaya N.** Modeling the Behavior of Axially and Laterally Loaded Pile with a Contact Model, EJGE, 2011, Vol. 16, Bund. N.
36. **Петреев А. М., Смоленцев А. С.** Передача энергии от ударного привода трубе через адаптер конструкций // ФТПРПИ. — 2011. — № 6.
37. **Исаков А. Л., Шмелев В. В.** Об эффективности передачи ударного импульса при забивании металлических труб в грунт // ФТПРПИ. — 1998. — № 1.
38. **Исаков А. Л., Шмелев В. В.** Анализ волновых процессов при забивании металлических труб в грунт с использованием генераторов ударных импульсов // ФТПРПИ. — 1998. — № 2.
39. **Белобородов В. Н., Исаков А. Л., Плавских В. Д., Шмелев В. В.** Моделирование процесса генерации ударного импульса при забивании металлических труб в грунт // ФТПРПИ. — 1997. — № 6.
40. **Белобородов В. Н., Глотова Т. Г.** Метод оценки упругих свойств грунта // ФТПРПИ. — 1998. — № 6.
41. **Sridhar N., Yang Q. D., Cox B. N.** Slip, stick, and reverse slip characteristics during dynamic fibre pullout, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51.
42. **Ормонбеков Т.** Взаимодействие конструкций со средой. — Фрунзе: Илим, 1963.
43. **Абдукадыров С. А., Степаненко М. В., Пинчукова Н. И.** Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций // ФТПРПИ. — 1984. — № 6.
44. **Деч Г.** Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 16/III 2013