Теплофизика и аэромеханика, 2018, том 25, № 2

УДК 532.51

Влияние радиального магнитного поля на теплообмен в МГД-течениях Куэтта с вязкой и джоулевой диссипацией в кольцевом канале

Б.К. Джа, Х.М. Джибрил, А.О. Эмека

Университет Ахмаду Белло, Зария, Нигерия

E-mail: anyanwu349@gmail.com

Представлено аналитическое исследование устойчивого полностью развитого МГД-течения Куэтта электропроводящей жидкости в присутствии радиального магнитного поля. Точные решения, полученные для уравнений, соответствующих законам сохранения энергии, импульса и массы с учетом влияния вязкой и джоулевой диссипации, изображены графически. Рассмотрено влияние различных определяющих параметров, таких как числа Гартмана и Бринкмана, на профиль температуры и, следовательно, на число Нуссельта. В результате проведенного исследования установлено, что увеличение числа Гартмана приводит к увеличению числа Нуссельта на внешней поверхности внутреннего цилиндра, в то время как влияние числа Гартмана на число Нуссельта на внутренней поверхности наружного цилиндра прямо противоположно. Кроме того, установлено, что число Бринкмана имеет незначительное влияние на числа Нуссельта, в случае, когда обе поверхности имеют одинаковую температуру.

Ключевые слова: МГД-течение, вязкая диссипация, джоулева диссипация, число Гартмана, число Бринкмана, число Нуссельта.

Введение

Изучение течений электропроводящих жидкостей в присутствии внешнего магнитного поля имеет важное значение в силу их широкого применения в различных отраслях промышленности, науки и технологии, таких как пожарная техника, моделирование горения, геофизика, охлаждение ядерных реакторов, работа магнитогидродинамических (МГД) генераторов и при изучении плазмы. Ряд исследований посвящен конвективному МГД-течению в различных физических условиях. Например, в работе [1] изучалась теплоотдача течения Гартмана в области термического входного участка. В работе [2] исследовалось влияние магнитного поля на тепломассоперенос в вертикальном кольцевом канале, а в [3] — теплоперенос в МГД-течении на входе в плоский воздуховод. Авторы [4] рассматривали влияние магнитного поля на профили скорости и температуры нестационарного течения ньютоновской жидкости между двумя бесконечными непроводящими горизонтальными параллельными пористыми пластинами. Влияние постоянного магнитного поля на трехмерное течение, индуцированное плавучестью в цилиндрической полости, исследовалось в работе [5]. В работе [6] была представлена аппроксимация римановых сумм для нестационарных МГД-течений Куэтта в кольцевом канале. Авторы работы [7] изучали влияние аксиального магнитного поля на тепломассоперенос во вращающемся кольцевом канале. Они обнаружили, что увеличение числа Гартмана приводит к уменьшению скорости жидкости. Авторы [8] численно исследовали полностью развитую естественную конвекцию в открытом вертикальном концентрическом кольцевом канале при наличии радиального магнитного поля. Теплообмен в нестационарном МГД-течении через бесконечный кольцевой канал с излучением рассматривался в работе [9]. В работе [10] изучались нестационарные ламинарные МГД-течения и теплообмен в каналах и круглых трубах с учетом влияния колебательных и линейных градиентов давления. Устойчивое естественно-конвективное течение в вертикальных кольцевых каналах в радиальном магнитном поле исследовалось в работе [11].

Теплообмен во внутреннем течении через асимметрично нагретый кольцевой канал имеет место во многих производственных, технических процессах и природных явлениях. Интерес к этой теме обусловлен практическим применением (например, в приемниках солнечного излучения и каталитических реакторах). Известен ряд исследований влияния вязкой диссипации. Среди них работа [12], где рассматривалось влияние вязкой диссипации на течение между параллельными пластинами при неодинаковой температуре стенок, и работа [13], где изучалось влияние вязкой диссипации и осевой теплопроводности жидкости на теплообмен неньютоновских жидкостей в каналах с равномерным распределением температуры стенки. В работе [14] исследовался теплообмен ламинарного течения Гартмана в области термического входного участка с пошаговым изменением температуры стенки. В работе [15] изучалась ламинарная вынужденная конвекция с вязкой диссипацией в асимметрично нагретом кольцевом канале при различных значениях числах Нуссельта. В работе [16] исследовалось влияние вязкой диссипации на предельное значение числа Нуссельта для сдвигового течения через асимметрично нагретый кольцевой канал, а в работе [17] был изучен локальный и средний теплообмен в термически развивающейся области несимметрично нагретого канала.

Целью настоящей работы является аналитическое исследование комбинированного воздействия чисел Гартмана (M) и Бринкмана (Br) на устойчивое полностью развитое течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости через кольцевой канал в присутствии радиального магнитного поля с учетом влияния вязкой и джоулевой диссипации.

1. Математический анализ

Рассмотрим принципиальную схему исследуемой задачи, соответствующую ей математическую модель и ее решение. Течение считается устойчивым сдвиговым полностью развитым потоком вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости через асимметрично нагретый кольцевой канал двух бесконечных концентрических цилиндров с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 (см. рис. 1). Жидкость приходит в движение за счет смещения внутреннего цилиндра в осевом направлении с постоянной скоростью (U_0). На обоих цилиндрах ставятся одинаковые граничные условия прилипания для гидродинамически и термически развитых течений, в то время как тепловые граничные условия для внутренних и наружных поверхностей кольцевого канала различаются, т.к. поверхности поддерживаются при неодинаковых постоянных температурах T_1 и T_2 соответственно. Влияние разности температур поверхностей на характеристики асимметрии поверхности нагрева учитывается с помощью параметра β.

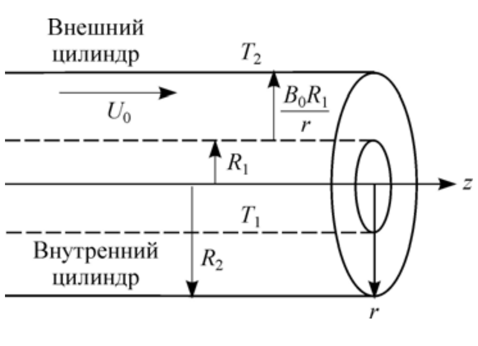

Рис. 1. Физическая геометрия задачи.

Ось z проходит вдоль оси цилиндра, а ось r — в радиальном направлении от его центра. Здесь $\hat{T}$ — средняя температура поверхности, а $T_{\rm f}$ — температура жидкости.

Основные уравнения (сохранения массы, импульса и энергии), описывающие движение жидкости в цилиндрических координатах в размерном виде, записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{v}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{uv}{r^2}\right)=-\frac{1}{r}+\rho g_\theta+\mu\left(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{v}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_\theta+\mu\left(\nabla^2 w\right), \tag{2}$$

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

В настоящем исследовании принят ряд важных положений:

— отсутствие тепловыделения и постоянство теплофизических свойств;

— незначительная осевая теплопроводность в жидкости через поверхности;

— полностью развитое несжимаемое течение;

— небольшое магнитное число Рейнольдса.

Магнитное поле, описываемое выражением $B_0 R_1/r$, направлено радиально наружу так, что магнитное число Рейнольдса очень мало. Это свидетельствует о пренебрежимой малости индуцированного магнитного поля в сравнении с полем, приложенным снаружи. Математическая модель, используемая здесь, представляет собой обобщение работы [16] для учета роли радиального магнитного поля. Поскольку поток является устойчивым и полностью развитым, то, пренебрегая конвективными слагаемыми, уравнения сохранения импульса и энергии можно переписать в размерном виде следующим образом:

$$\frac{v}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)-\frac{\sigma B_0^2 u}{\rho r^2}=0, \tag{4}$$

$$k\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\frac{\sigma B_0^2 u^2}{r^2}=0. \tag{5}$$

Граничные условия запишутся как

$$u=U_0 \ \text{ и } \ T=T_1 \ \text{ при } \ r=R_1; \quad u=0 \ \text{ и } \ T=T_2 \ \text{ при } \ r=R_2. \tag{6}$$

Определим необходимые безразмерные величины:

$$V=\frac{u}{U_0},\ R^*=\frac{R_1}{R_2},\ \theta=\frac{(T-\overline{T})}{(T_{\rm f}-\overline{T})},\ \mathrm{Br}=\frac{\mu U_0^2}{k(T_{\rm f}-\overline{T})},\ \mathrm{M}^2=\frac{\sigma B_0^2(R_2-R_1)^2}{\mu},$$

$$R=\frac{(r-R_1)}{(R_2-R_1)},\ \overline{T}=\frac{(T_1+T_2)}{2}. \tag{7}$$

Используя уравнение (4), получим безразмерные уравнения энергии и импульса:

$$\frac{1}{[R^*+(1-R^*)R]}\cdot\frac{d}{dR}\left[\left[R^*+(1-R^*)R\right]\frac{dV}{dR}\right]-\frac{\mathrm{M}^2V}{\left[R^*+(1-R^*)R\right]^2}=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{[R^*+(1-R^*)R]}\cdot\frac{d}{dR}\left[\left[R^*+(1-R^*)R\right]\frac{dV}{dR}\right]+\mathrm{Br}\left[\left(\frac{dV}{dR}\right)^2+\frac{\mathrm{M}^2V^2}{[R^*+(1-R^*)R]^2}\right]=0 \tag{9}$$

при соответствующих граничных условиях

$$V=1,\quad \theta=-\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}\ \text{ при }\ R=0;\quad V=0,\quad \theta=\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}\ \text{ при }\ R=1, \tag{10}$$

где $\beta=(T_2-T_f)/(T_1-T_f)$.

Проинтегрировав уравнение (8) с учетом граничных условий (10), представим профиль скорости в виде

$$V(R)=a_0\left[[R^*+(1-R^*)R]^{\lambda}-[R^*+(1-R^*)R]^{-\lambda}\right]. \tag{11}$$

Решив уравнение (9) с использованием уравнений (10) и (11), получим безразмерный профиль температуры представим в следующем виде

$$\theta(R)=a_1\log\left([R^*+(1-R^*)R]\right)+a_2-\ \mathrm{Br}a_0^2\left([R^*+(1-R^*)R]^{2\lambda}+[R^*+(1-R^*)]^{-2\lambda}\right)\Big/2. \tag{12}$$

Для получения более полных данных о характеристиках передачи тепла определим безразмерную среднемассовую температуру θ_b:

$$\theta_b=\frac{\int_0^1\left[R^*+(1-R^*)R\right]V\theta dR}{\int_0^1\left[R^*+(1-R^*)R\right]VdR}. \tag{13}$$

Уравнение (13) может быть переписано следующим образом:

$$\theta_b=\frac{a_{12}(\lambda^2-4)}{\left[2\lambda-(\lambda-2)(R^*)^{\lambda+2}-(\lambda+2)(R^*)^{-\lambda+2}\right]}, \tag{14}$$

здесь и далее a_1-a_{12} — константы, описанные в разделе «Приложение».

Числа Нуссельта, рассчитываемые на основании среднемассовой температуры как основной температуры жидкости, имеют вид:

$$\mathrm{Nu}_1=\frac{-1}{\left[\theta(0)-\theta_b\right]}\cdot\left.\frac{d\theta}{dR}\right|_{R=0}, \tag{15}$$

$$\mathrm{Nu}_2=\frac{1}{\left[\theta(1)-\theta_b\right]}\cdot\left.\frac{d\theta}{dR}\right|_{R=1}. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) совместно с (14) определяют явные выражения для числа Нуссельта на обеих поверхностях (на внешней поверхности внутреннего цилиндра и внутренней поверхности внешнего цилиндра) кольцевого канала соответственно как

$$\mathrm{Nu}_1=\frac{2a_3\lambda(1-R^*)\left[(R^*)-(R^*)^{-2\lambda-1}\right]-[(1-R^*)\,a_1/R^*]}{(1-\beta)/(1+\beta)+\left[a_{12}(\lambda^2-4)/a_{13}\right]}, \tag{17}$$

$$\mathrm{Nu}_2=\frac{(1-R^*)\,a_1}{(1-\beta)/(1+\beta)-\left[a_{12}(\lambda^2-4)/a_{13}\right]}. \tag{18}$$

2. Результаты и обсуждение

Для иллюстрации влияния определяющих параметров (чисел Гартмана и Бринкмана) на рис. 2–6 представлены изменения температуры, среднемассовой температуры, а также скорость теплоотдачи на обеих поверхностях кольцевого канала. Настоящее параметрическое исследование выполнено в разумных диапазонах $2{,}0 \le \mathrm{M} \le 3{,}0$ и $-0{,}5 \le \mathrm{Br} \le 0{,}5$. Кроме того, рассматривались три разных степени параметра асимметрии: $\beta = -0{,}5$, 0,5 и 1. Условия $\mathrm{Br} > 0$ соответствует случаю, когда поверхности нагреты, что сходно с ситуацией теплоотдачи жидкости через поверхности. Кривые для числа Бринкмана ($\mathrm{Br} \neq 0$) и Гартмана ($\mathrm{M} \neq 0$) представляют теплововыделение за счет вязкой и джоулевой диссипации.

На рис. 2*a*–2*c* показано изменение температуры в зависимости от *R* при различных значениях числа Гартмана для $\beta = 0{,}5$ (*a*), –0,5 (*b*), 1,0 (*c*) соответственно. Видно, что в случаях, когда $\mathrm{Br} \neq 0$, профиль температуры искажается по сравнению со случаем, когда Br = 0. Это происходит из-за влияния вязкой диссипации вследствие напряжения сдвига, вызванного движением внутреннего цилиндра. Вязкая диссипация увеличивает внутреннюю температуру жидкости за счет распределения от источника тепла, вызванного преобразованием кинетической энергии жидкости в тепловую энергию. Когда

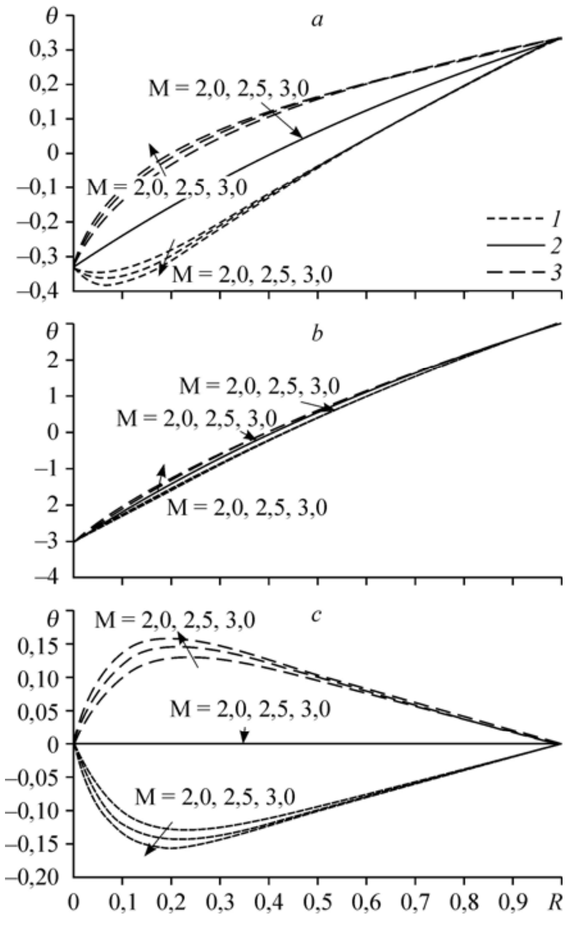

Рис. 2. Изменение температуры при различных значениях числа Гартмана (М) для $\beta = 0{,}5$ (*a*), –0,5 (*b*), 1 (*c*).

Br = –0,5 (*1*), 0 (*2*), 0,5 (*3*).

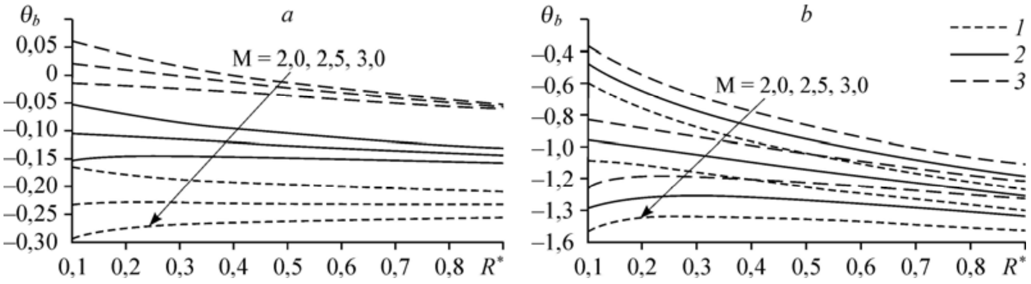

Рис. 3. Профиль среднемассовой температуры для различных значений M для $\beta = 0{,}5$ (*a*), –0,5 (*b*). Br = –0,5 (*1*), 0 (*2*), 0,5 (*3*).

число Бринкмана является положительным (Br > 0), вязкая диссипация поставляет дополнительную энергию в жидкость, что приводит к повышению температуры жидкости в сравнении с температурой жидкости в отсутствие диссипации (Br = 0). Таким образом, $\theta\big|_{\mathrm{Br}>0} > \theta\big|_{\mathrm{Br}=0}$. Подобный анализ показывает, что $\theta\big|_{\mathrm{Br}<0} > \theta\big|_{\mathrm{Br}=0}$. Профиль температуры изменяется линейно для всех случаев нагрева поверхности при числе Бринкмана Br = 0, за исключением случая, когда $\beta = 1$, при таких условиях он становится профилем проводимости. Эта особенность отмечалась также в работах [12, 15] и приписывалась влиянию степени несимметричности при нагреве. Из рисунков видно, что температура уменьшается с ростом числа Гартмана (M) при Br < 0 и возрастает по мере увеличения числа Гартмана для числа Бринкмана. Кроме того, из уравнения (9) очевидно, что в отсутствие диссипации профиль температуры не подвержен воздействию магнитного поля.

Изменение среднемассовой температуры в зависимости от R^* показано на рис. 3*a* и 3*b* при различных значениях числа Гартмана для двух случаев асимметрии при нагреве $\beta = 0{,}5$ и –0,5 соответственно. Видно, что среднемассовая температура уменьшается с увеличением R^* в обоих случаях асимметричного нагрева. Более того, среднемассовая температура, по-видимому, сильно зависит от степени параметра асимметрии β. Это можно объяснить неравенством среднемассовой температуры и средней температуры поверхности кольцевого канала. Также на рисунках видно, что увеличение числа Гартмана приводит к снижению среднемассовой температуры жидкости.

Для того, чтобы проиллюстрировать влияние чисел Гартмана и Бринкмана на характеристики теплообмена, показано изменение числа Нуссельта на внешней поверхности внутреннего цилиндра и на внутренней поверхности внешнего цилиндра для разных случаев асимметричного нагрева. На рис. 4*a* и 4*b* продемонстрировано изменение числа Нуссельта на внешней поверхности внутреннего цилиндра при различных

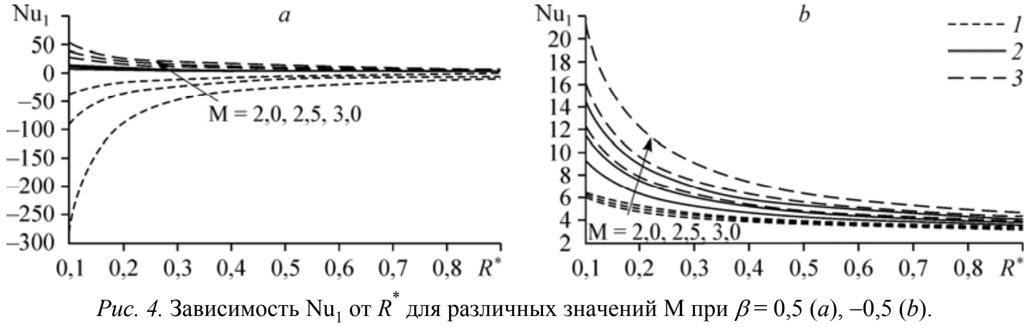

Рис. 4. Зависимость Nu_1 от R^* для различных значений M при $\beta = 0{,}5$ (*a*), –0,5 (*b*). Br = –0,5 (*1*), 0 (*2*), 0,5 (*3*).

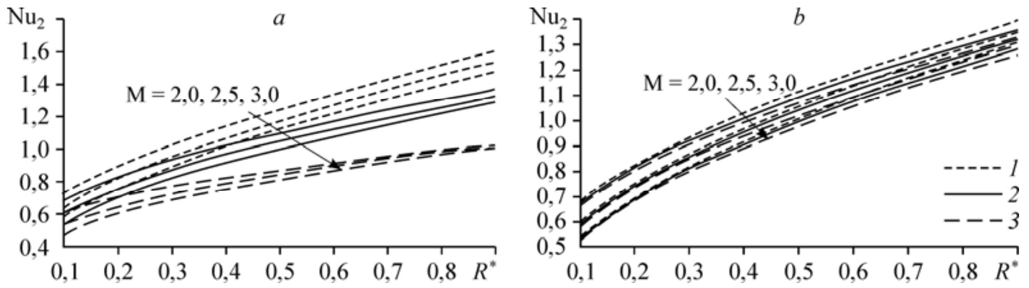

Рис. 5. Зависимость Nu_2 от R^* для различных значений M при $\beta = 0,5$ (*a*), $-0,5$ (*b*).
a — Br = –0,5 (*1*), 0 (*2*), 0,5 (*3*); *b* — Nu_1 (*1*), Nu_2 (*2*).

значениях числа Гартмана для двух случаев несимметричного нагрева — $\beta = 0,5$ и $-0,5$ соответственно. Очевидно, что число Нуссельта на внешней поверхности внутреннего цилиндра увеличивается с ростом M. Это явление отмечалось также в работе [14]. Кроме того, при увеличении числа Бринкмана увеличивается коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности внутреннего цилиндра.

На рис. 5*a* и 5*b* показано изменение коэффициента теплоотдачи на внутренней поверхности внешнего цилиндра при различных значениях числа Гартмана для двух различных степеней асимметричного нагрева — $\beta = 0,5$ и $-0,5$ соответственно. Число Нуссельта на внутренней поверхности внешнего цилиндра уменьшается при увеличении числа Бринкмана. Это связано с эффектами вязкой диссипации, которая обнаруживает тенденцию к снижению градиента температуры вблизи внешнего цилиндра. Причем, из обоих рисунков видно, что число Нуссельта на внутренней поверхности внешнего цилиндра уменьшается при увеличении M.

Рисунок 6 иллюстрирует изменение числа Нуссельта на обеих поверхностях кольцевого канала (Nu_c) в зависимости от радиуса R^* для различных значений числа Гартмана для случая симметричного нагрева поверхности ($\beta = 1$). Следует отметить, что число Бринкмана имеет незначительное влияние на изменение числа Нуссельта. Это хорошо согласуется с результатом, полученным в работе [16]. Кроме того, поведение числа Нуссельта на обеих поверхностях при равной температуре показывает сходство с тем случаем, когда обе поверхности находятся при неравных температурах. Также заметим, что увеличение числа Гартмана приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи на наружной поверхности внутреннего цилиндра, а на внутренней поверхности внешнего цилиндра отмечается обратный эффект.

Заключение

Исследовано течение Куэтта вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в горизонтальном кольцевом канале в присутствии радиального магнитного поля с вязкой и джоулевой диссипацией. Обнаружено значительное влияние чисел Гартмана M и Бринкмана (Br) на температуру жидкости, среднемассовую температуру и скорость теплоотдачи на обеих поверхностях (наружной поверхности внутреннего цилиндра и внутренней поверхности внешнего цилиндра) кольцевого канала. Некоторые важные выводы этого исследования таковы:

— числа Гартмана и Бринкмана имеют заметное влияние на профиль температуры;

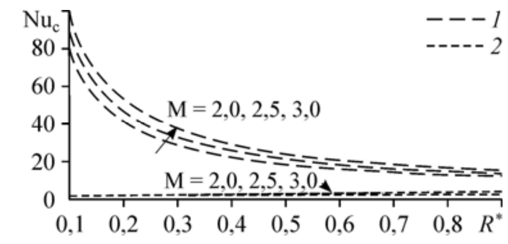

Рис. 6. Зависимость Nu_c от R^* для различных значений M при $\beta = 1$.
1 — Nu_1, *2* — Nu_2.

— число Бринкмана имеет незначительное влияние на числа Нуссельта на обеих поверхностях кольцевого канала в случае симметричного нагрева поверхности;

— увеличение числа Гартмана приводит к увеличению числа Нуссельта на наружной поверхности внутреннего цилиндра, в то время как влияние магнитного поля на числа Нуссельта на внутренней поверхности наружного цилиндра прямо противоположно.

Приложение

Константы, используемые в настоящей работе:

$$a_0 = \frac{1}{\left[(R^*)^{\lambda} - (R^*)^{-\lambda}\right]}, \quad a_1 = \frac{1}{\log(R^*)}\left[\frac{-\mathrm{Br}a_0^2}{2}\left((R^*)^{2\lambda} + (R^*)^{-2\lambda} - 2\right) - 2\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}\right],$$

$$a_2 = \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)} + \mathrm{Br}a_0^2, \quad a_3 = \frac{-\mathrm{Br}a_0^3}{2}, \quad a_4 = \frac{a_3}{3\lambda+2}\left[1-(R^*)^{3\lambda+2}\right], \quad a_5 = \frac{a_3}{\lambda-2}\left[(R^*)^{-\lambda+2} - 1\right],$$

$$a_6 = a_1\left[\frac{(R^*)^{\lambda+2}}{(\lambda+2)^2} - \frac{(R^*)^{\lambda+2}\log(R^*)}{\lambda+2} - \frac{1}{(\lambda+2)^2}\right], \quad a_7 = \frac{a_2}{\lambda+2}\left[1-(R^*)^{\lambda+2}\right],$$

$$a_8 = \frac{a_3}{\lambda+2}\left[(R^*)^{\lambda+2} - 1\right], \quad a_9 = \frac{a_3}{3\lambda-2}\left[1-(R^*)^{-3\lambda+2}\right],$$

$$a_{10} = a_1\left[\frac{1}{(\lambda-2)^2} - \frac{(R^*)^{-\lambda+2}}{(\pi-2)^2} - \frac{(R^*)^{-\lambda+2}\log(R^*)}{\lambda-2}\right], \quad a_{11} = \frac{a_2}{\lambda-2}\left[1-(R^*)^{-\lambda+2}\right],$$

$$a_{12} = \left(a_4 + a_{56} + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}\right),$$

$$a_{13} = \left[2\lambda - (\lambda-2)(R^*)^{\lambda+2} - (\lambda+2)(R^*)^{-\lambda+2}\right], \quad \lambda = \frac{\mathrm{M}}{(1-R^*)}.$$

Список обозначений

Br — число Бринкмана,
k — теплопроводность,
M — число Гартмана,
B_0 — постоянная плотность магнитного потока,
$\mathrm{Nu_c}$ — число Нуссельта на обеих поверхностях кольцевого канала,
$\mathrm{Nu_1}$ — число Нуссельта на внешней поверхности внутреннего цилиндра,
$\mathrm{Nu_2}$ — число Нуссельта на внутренней поверхности внешнего цилиндра,
r — размерная радиальная координата,
R — безразмерная радиальная координата,
R^* — соотношение радиусов R_1/R_2,
R_1 — радиус внутреннего цилиндра,
R_2 — радиус наружного цилиндра,
T — размерная температура,
T_f — исходная температура отсчета,
$\bar{T}$ — средняя температура,
T_1 — температура внутреннего цилиндра,
T_2 — температура наружного цилиндра,
u — осевая скорость,
U_0 — постоянная скорость подвижного внутреннего цилиндра,
V — безразмерная скорость,
z — аксиальная координата,

Греческие символы

β — степень асимметрии,
θ — безразмерная температура,
θ_b — безразмерная среднемассовая температура,
μ — динамическая вязкость,
ρ — плотность,
σ — электропроводность жидкости,
ν — кинематическая вязкость.

Список литературы

1. **Michiyoshi I., Matsumato R.** Heat transfer by Hartmann flow's flow in thermal entrance region // Int. J. Heat Mass Transfer. 1964. Vol. 17. P. 101–111.
2. **Venkatachalappa M., Youngae D., Sankar M.** Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus // Int. J. Engng. Sci. 2011. Vol. 49. P. 262–278.
3. **Hwang C.L., Knieper P.J.** Heat transfer to MHD flow in the entrance of a flat duct // Int. J. Heat Mass Transfer. 1966. Vol. 9. P. 773–789.
4. **Attia H.A., Kotb N.A.** MHD flow between two parallel plates with heat transfer // ACTA Mechanica. 1996. Vol. 117. P. 215–223.
5. **Hadid B.H., Henry D.** Numerical simulation of convective three dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of constant magnetic field // J. Cryst Growth. 1996. Vol. 166. P. 463–473.
6. **Jha B.K., Apere C.A.** Unsteady MHD Couette flow in an annuli, the Riemann-sum approximation approach // J. Phys. Soc. Japan. 2007. Vol. 79. P. 124403-1–124403-5.
7. **Aberkane S., Mouderes M., Malika I., Ghezal A.** Effect of an axial magnetic field on heat and mass transfer in a rotating annulus // Int. J. Phys. Sci. 2014. Vol. 23. P. 368–379.
8. **Mozayyeni H.R., Rahimi A.B.** Mixed convection in cylindrical annulus with rotating outer cylinder and constant magnetic field with an effect in the radial direction // Scientia Iranica. 2012. Vol. 19. P. 91–105.
9. **Nazibuddin A., Manas D.** Heat transfer in an unsteady MHD flow through an inifinte annulus with radiation // Boundary value problem. 2015. DOI 10.1186/s13661-014-0279-z.
10. **Chamkha A.J.** Unsteady laminar hydrodynamic fluid particle flow and heat transfer in channels and circular pipes // Int. J. Heat Fluid Flow. 2000. Vol. 21. P. 740–746.
11. **Singh S.K., Jha B.K., Singh A.K.** Natural convection in vertical concentric annuli under a radial magnetic field // Int. J. Heat Mass Trans. 1997. Vol. 32. P. 399–408.
12. **Ramjee R., Satyamurty V.V.** Limiting Nusselt numbers for viscous dissipation flow between parallel plates kept at unequal wall temperatures // Int. Commun. Heat Mass Trans. 2010. Vol. 37. P. 1251–1254.
13. **Jambal O., Shigechi T., Davaa G., Momoki S.** Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature. Part II. Annular ductr. // Int. Commun. Heat. Mass Trans. 2005. Vol. 32, Iss. 9. P. 1174–1183.
14. **Lahjomri J., Oubarra A., Alemany A.** Heat transfer by laminar Hartmann flow in thermal entrance region with a step change in wall temperatures: the Graetz problem extended // Int. J. Heat Mass Transfer. 2002. Vol. 45. P. 1127–1148.
15. **Kumar M.M.J., Satyamurty V.V.** Limiting Nusselt numbers for laminar forced convection in asymmetrically heated annuli with viscous dissipation // Int. Commun. Heat and Mass Trans. 2011. Vol. 38. P. 923–927.
16. **Mondal P.K., Mukherjee S.** Viscous dissipation effects on the limiting value of Nusselt number for a shear driven floe through an asymmetrically heated annulus // J. Mech. Engng. Sci. 2012. Vol. 226, No. 12. P. 2941–2949.
17. **Ramjee R., Satyamurty V.V.** Local and average heat transfer in the thermally developing region of an asymmetrically heated channel // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. Vol. 53. P. 1654–1665.

Статья поступила в редакцию 3 октября 2016 г.,
после переработки — 29 декабря 2016 г.