

УДК 536.46.662.213

**ФРАКТАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ  
ПЕРЕХОДА МЕДЛЕННОГО ГОРЕНИЯ  
В ДЕТОНАЦИЮ В ГАЗАХ**

*К. О. Сабденов*

*Томский государственный университет,  
634050 Томск*

Предложена теория перехода медленного горения в детонацию, где турбулентное пламя представляется в виде множества с нецелой размерностью — фрактала. Получено выражение для пути переходного участка при распространении пламени с закрытого конца трубы.

Переход медленного горения в детонацию в газах в настоящее время мало изучен. По-видимому, это объясняется тем, что нет ясного представления об основных физических процессах в этом переходном периоде. Известно, что переход к детонации происходит через ускорение пламени. Из различных механизмов процесса ускорения наиболее соответствует экспериментальной картине следующий: чем больше поверхность горения, тем больше образуется продуктов сгорания; течение газа, вызванное его расширением, турбулентное; расширяющиеся продукты еще больше увеличивают поверхность горения и скорость движения фронта пламени. Такое объяснение дано в [1, 2].

Наиболее важные величины — расстояние  $R_D$  от точки возникновения пламени до точки образования детонационной волны и время  $T_D$  этого переходного периода. Попытка теоретически вычислить  $R_D$  и  $T_D$  предпринята Я. Б. Зельдовичем в [3], но при этом ускорение пламени за счет увеличения поверхности горения не рассматривалось. Более того, пламя ускоряется не за счет интенсификации процесса горения. Других теорий, позволяющих определить значения  $R_D$  и  $T_D$ , в литературе нет.

Ниже изложена простая полуэмпирическая теория перехода медленного горения в детонацию в газовых смесях на основе фракталов. (Применению теории фракталов в физике, в том числе и в теории турбулентности, посвящено много работ, опубликованных в журналах различного профиля и трудах симпозиумов [4].) Но вначале отметим два экспериментальных факта: по мере продвижения пламени в ускоряющемся режиме зона химических реакций растет; длина переходного участка зависит от диаметра трубы [2, 5]. Для построения теории перехода медленного горения в детонацию возьмем первый факт. Рассмотрим в качестве примера расширяющуюся сферу радиусом  $R(t)$ , где  $t$  — время. Если  $S$  — гладкая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , то  $S \sim R^2$ . Тогда

$$\frac{S}{V} \sim \frac{1}{R(t)}.$$

Если  $S$  — фрактал, то

$$\frac{S}{V} \sim \left(\frac{1}{R}\right)^{1-k} = \left(\frac{1}{R}\right)^{1-d_f+d_t} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

$d_f$  — фрактальная размерность поверхности  $S$ ;  $d_t$  — ее топологическая размерность.

Из приведенного результата видно, что если фрактал  $S$  есть граница или часть границы некоторого объема  $V$ , то отношение  $S/V$  меняется в зависимости от некоторого параметра длины (в приведенном случае — это  $R$ ) по приведенному выше закону. (Это утверждение нуждается в строгом математическом доказательстве.) Фрактал, конечно, имеется в виду физический. В этом случае существует некоторый минимальный масштаб длины, на котором элемент поверхности имеет размерность, равную топологической, поэтому  $S \neq \infty$ . Этот пример помогает понять дальнейшие рассуждения.

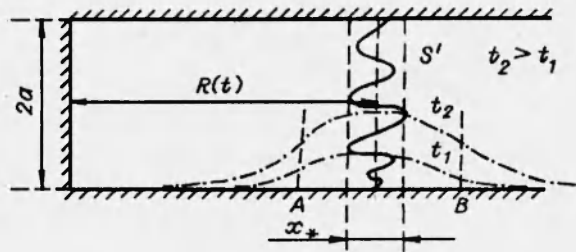


Рис. 1.

Рассмотрим теперь трубу с радиусом  $a$  (рис. 1). Тогда  $V = \pi a^2 R$ ,  $S = \pi a^2 + 2\pi a R + S'$  и

$$\frac{S}{V} = \frac{1}{R} + \frac{2}{a} + \frac{S'}{\pi a^2 R}.$$

При  $R \rightarrow \infty$   $\frac{S}{V} \rightarrow \frac{2}{a}$ , тогда, согласно указанному выше,

$$\frac{S'}{\pi a R^2} \sim \left(\frac{1}{R}\right)^{1-k} \rightarrow 0.$$

Далее, из анализа размерностей следует

$$\frac{S'}{\pi a^2 R} = \frac{\alpha(k)}{a} \left(\frac{a}{R}\right)^{1-k} \quad \text{или} \quad S' = \pi a^2 \alpha(k) \left(\frac{R}{a}\right)^k, \quad (1)$$

где  $\alpha(k)$  — некоторая функция  $k = d_f - d_t$ . Считаем далее  $S'$  поверхностью горения, а параметр  $d_f$  постоянным. Сгоревшая газовая смесь с плотностью  $\rho_2$  находится у закрытой части трубы ( $\rho_1$  — плотность свежей смеси). В общем случае  $d_f$  следует считать зависящим также от кинетики химических реакций и типа шероховатости стенок трубы. Определение площади по формуле (1) задает характерный размер ширины зоны химических реакций

$$x_* = \frac{\alpha}{2} a \left(\frac{R}{a}\right)^k, \quad (2)$$

так как площадь двумерной поверхности равна произведению характерных длин по двум измерениям, а по угловой координате характерная длина равна  $2\pi a$ . Величину  $u_n S' / \pi a^2$ , где  $u_n$  — нормальная скорость горения, можно принять за турбулентную скорость горения.

Таким образом, в фрактальной модели возможность ускорения пламени находит свое отражение в увеличивающейся поверхности горения по мере расширения сгоревшей смеси. Как следствие, растет зона химических реакций, что соответствует указанному экспериментальному факту. Расширение поверхности горения вызвано турбулентностью, а турбулентное

пламя характеризуется двумя параметрами  $\alpha$  и  $d_f$ . Введение фрактала значительно упрощает качественное и количественное рассмотрение переходного периода в детонацию. Но есть, однако, отрицательная сторона такого подхода: не известны значения  $\alpha$  и  $k$ , и это относит фрактальные теории к полуэмпирическим. Для определения этих параметров нужно дополнительно привлекать некоторые гипотезы.

Рассмотрим задачу в гидродинамическом приближении:  $\rho_1 = \text{const}$ ,  $\rho_2 = \text{const}$ . Тогда в окрестности фронта пламени справедливо уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Газ, примыкающий к закрытой части трубы, неподвижен, скорость газа  $v = 0$  на бесконечности впереди фронта пламени. Значит, скорость достигает максимума в некоторой средней области, а точка максимума находится в окрестности фронта пламени. Движение газа турбулентно, поэтому поверхность горения увеличивается, что приводит к еще большему движению газа за счет возросшей скорости горения. Такой обратный механизм не мог бы существовать, если бы точка максимума скорости не была привязана к фронту пламени. Примерный профиль скорости показан на рис. 1 штрихпунктирной линией. В области, заключенной между точками  $A$  и  $B$ , в некотором приближении можно считать  $\partial v / \partial x = 0$  и пренебречь в (3) вкладом от

$$\left( \frac{dR}{dt} - v \right) \frac{\partial v}{\partial t}.$$

В ускоренном движении, даже при скоростях, много меньших скорости звука, может существовать значительный градиент давления. Здесь такой градиент, вызывающий движение газа, создается ускоренным процессом горения. Количество газа, сгорающего в единицу времени, находим по формуле

$$Q_1 = (\rho_1 - \rho_2) u_n S' = (\rho_1 - \rho_2) u_n \pi \alpha^2 a (R/a)^k. \quad (4)$$

Так как движение турбулентно, то массовый расход  $Q_2$  в окрестности фронта пламени связан через градиент давления известным соотношением [6]

$$Q_2 = 2\pi a^2 \left[ \frac{a}{\lambda} \rho_2 \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления трубы. В основном скорость изменяется у массы газа, заключенного в объеме порядка  $\pi a^2 x_*$ . Из (4) и (5) находим

$$-\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda \beta^2}{4} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)^2 \frac{u_n^2}{a} \left( \frac{R}{a} \right)^{2k},$$

$\beta$  — новый коэффициент пропорциональности.

Используя это соотношение и положив  $v \approx dR/dt$ , получим из (3)

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{\lambda \beta^2}{4} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)^2 \frac{u_n^2}{a} \left( \frac{R}{a} \right)^{2k}.$$

Это уравнение при  $k \neq 1/2$  имеет возрастающие степенные решения. При  $k > 1/2$  величина  $R(t)$  стремится к бесконечности за конечный промежуток времени. Экспоненциальное решение существует, очевидно, при

$k = 1/2$ . Такому решению здесь отдается предпочтение. Этот шаг чисто интуитивный и единственное оправдание тому — простота. Не исключено, что переход в детонацию может осуществиться и со степенным ростом  $R(t)$ . При достаточно больших временах

$$k \sim \exp(t/t_*), \quad t_* = \frac{1}{\beta\sqrt{\lambda}} \frac{2a}{(\rho_1/\rho_2 - 1)u_n}.$$

Приближение постоянства плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , конечно, грубое. Но во фронте пламени и в его окрестности отношение  $\rho_1/\rho_2$  можно считать постоянным до достаточно больших значений скоростей и давления. (Это обстоятельство раскрывает сущность используемого здесь гидродинамического приближения.) Если бы это было не так, то трудно объяснить тот факт, что скорость пламени в преддетонационном периоде достигает 1000–1500 м/с. Ведь именно разница в плотностях свежей смеси и продуктов сгорания является основной причиной движения газа. Такие скорости сравнимы со скоростью звука за фронтом пламени и превышают скорость звука в холодной части свежей смеси. Опираясь на эти данные, положим, что горение переходит в детонационный режим на таком расстоянии  $R_D$ , при котором

$$\frac{dR}{dt} \sim c(T_g). \quad (6)$$

Здесь  $T_g$  и  $c(T_g)$  — температура и скорость звука за фронтом пламени. Условие (6), как условие перехода к детонации, физически и математически строго обосновать пока трудно. Вероятное объяснение заключается в том, что при выполнении (6) меняется режим течения, и, как следствие, — режим горения. Считаем, что этот новый режим горения может оказаться детонацией. Другой точки зрения придерживаются авторы [6]. Это — достижение условий адиабатического самовоспламенения в окрестности фронта пламени. Если принять такую концепцию, то длина переходного участка  $R_D$  находится по известной формуле Франк-Каменецкого (объем  $\pi a^2 x_*$  занят как продуктами горения, так и исходной смесью)

$$x_* = \frac{\alpha}{2} a \left(\frac{R_D}{a}\right)^k = \delta \left[ \frac{R_g T_*}{E} \frac{\lambda T_*}{Qk} \exp\left(\frac{E}{R_g T_*}\right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $\delta$  — числовой коэффициент порядка единицы;  $T_*$  — некоторая температура, вблизи которой происходит самовоспламенение;  $R_g$  — газовая постоянная;  $E$  — энергия активации;  $Q$  — тепловой эффект химических реакций;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа;  $k$  — предэкспонент, из которого следует, что

$$R_D \sim \frac{1}{a^{1-k}}.$$

Это противоречит экспериментальным данным, приведенным, например, в [2]. Длина переходного участка растет с увеличением радиуса трубы, поэтому в излагаемой теории предпочтение отдается условию (6). Но полученный результат еще не означает, что условие адиабатического самовоспламенения ошибочно в принципе. Законченной теории переходного периода пока нет.

Структура (7) говорит о том, что переход в детонацию ускоряющегося режима горения вызван, в первую очередь, последовательным наложением волн сжатия и образованием сильной ударной волны по отношению к несгоревшему холодному газу. В принятом здесь гидродинамическом при-

ближении  $T_g = \text{const}$  и равна температуре адиабатического горения, тогда для  $R_D$  переходного участка получим

$$\frac{R_D}{D} = \frac{c(T_g)}{\beta \sqrt{\lambda} (\rho_1/\rho_2 - 1) u_n}, \quad (7)$$

$D = 2a$  — диаметр трубы. Заметим, что учет изменения  $\rho_2$  привел бы к учету нелинейного члена

$$\left(v - \frac{dR}{dt}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

в левой части (3). Но в существенно нестационарном процессе основное изменение скорости определяется старшей производной по времени. Вклад от (8) был бы, в худшем случае, такого же порядка, что и от производной скорости по времени. Поскольку формула (7) содержит произвольную константу  $\beta$ , то подбор значения  $\beta$  по экспериментальным данным будет неявно учитывать и вклад от (8).

Сравним полученный результат с экспериментом. В [4] приведены данные авторов [7] для кислородоводородных смесей:

$$2\text{H}_2 + \text{O}_2: \quad T_g = 3089 \text{ К}, \quad \rho_1/\rho_2 = 8,42, \quad u_n = 11,2 \text{ м/с},$$

$$\mu_g = 14,96 \text{ г/моль};$$

$$\text{H}_2 + 2\text{O}_2: \quad T_g = 2500 \text{ К}, \quad \rho_1/\rho_2 = 7,28, \quad u_n = 3,6 \text{ м/с},$$

$$\mu_g = 25,68 \text{ г/моль}.$$

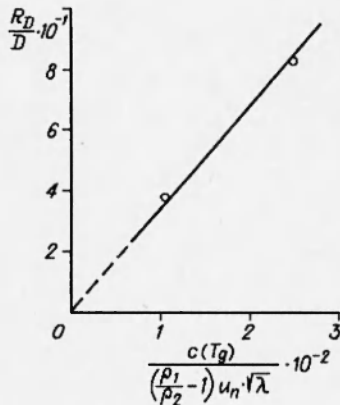


Рис. 2.

При вычислении скорости звука  $c(T_g)$  показатель адиабаты в обоих случаях брался равным 1,4. В [8] приведены экспериментальные данные Зайджека и Оппенгейма по переходным участкам для различных газовых смесей. На рис. 2 прямая линия проведена так, чтобы проходила через начало координат, как того требует формула (7). Коэффициенты  $\beta = 2,94$ ,  $\lambda = 0,03$ . Но хорошим согласием с опытом можно будет считать, если значения

$$\frac{c(T_g)}{\sqrt{\lambda} (\rho_1/\rho_2 - 1) u_n}$$

для смесей  $4\text{H}_2 + \text{O}_2$  и  $\text{H}_2 + \text{O}_2$  окажутся равными 218 и 120 соответственно, так как

для указанных смесей по [8] величина  $R_D/D$  равна соответственно 73,0 и 40,8. Из-за отсутствия у автора экспериментальных данных по этим смесям здесь не было возможности провести такое сравнение. По этой же причине нет возможности провести анализ для углеводородных газов с кислородом. Вполне возможно, что значение коэффициента  $\beta$  для таких составов изменится.

Обратим внимание на очень важное обстоятельство. Уравнение (7) соответствует образованию детонационной волны во фронте пламени. Профиль скорости на рис. 1, служивший ориентиром для приближенных расчетов, слишком упрощенный. Если считать точку  $B$  точкой максимума производной  $\partial v/\partial x$ , то при

$$\frac{dR}{dt} \sim c_0,$$

где  $c_0$  — скорость звука в исходной смеси, перед фронтом пламени образуется скачок уплотнения. Если смесь легко воспламеняема, то в точке  $B$  образуется детонационная волна. Тогда в формуле (7) вместо  $c(T_g)$  должна стоять скорость  $c_0$ . Но такие газовые смеси, по-видимому, большая редкость.

Концепция фракталов связана с понятием неполной автомодельности, что впервые было замечено в [9]. Покажем это на примере изложенной только что теории. Турбулентная скорость горения  $u_\tau$  определена как

$$u_\tau = \frac{S'u_n}{\pi a^2} \sim u_n \left( \frac{R}{a} \right)^{d_f - d_t}. \quad (9)$$

Здесь нет смысла делать упор на слово турбулентная. Поэтому, имея в виду просто скорость горения, обнаруживаем ее неполную автомодельность по параметру  $R/a$ . Появление этого параметра объясняется экспериментальным фактом зависимости длины переходного участка от диаметра трубы. И если диаметр таков, что процесс горения находится далеко от предела Зельдовича (в этом случае толщина зоны прогрева намного меньше радиуса трубы), то единственная соразмерная величина к  $a$  — это некоторое условное расстояние  $R$ , пройденное пламенем.

Как и свойственно фракталам, функциональная зависимость в (9) такова, что

$$u_\tau \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad R/a \rightarrow \infty,$$

причем, с показателем  $d_f - d_t$  [9].

Приведенный пример неудачен в том смысле, что параметром неполной автомодельности служит отношение длин, хотя, конечно, это совершенно необязательно. Таким параметром может оказаться отношение любых размерных величин в зависимости от типа решаемых задач.

Выражение (9) теряет смысл при следующих пределах:

$$\frac{R}{a} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{R}{a} \rightarrow \infty.$$

В первом случае мы попадаем в область автомодельного режима, которое принято называть дефлаграцией. При этом скорость нормального распространения пламени не зависит от диаметра трубы ( $R \rightarrow 0$  или  $a \rightarrow \infty$ ). Во втором пределе ( $R \rightarrow \infty$  или  $a \rightarrow 0$ ) существует другой автомодельный режим — детонация. Зависимость от диаметра трубы, как и в первом случае, пропадает. В промежуточно-асимптотическом режиме радиус трубы является основным параметром. Этот режим горения не есть дефлаграция (как он обычно трактуется). Представляется парадоксальным то обстоятельство, что в конце переходного периода ширина зоны химических реакций становится сравнимой с диаметром трубы, и, казалось бы, есть все условия предела Зельдовича. Горение должно было бы прекратиться. На самом деле ничего парадоксального здесь нет. Теплоприход из турбулентной зоны химических реакций намного превосходит теплопотерю через стенки трубы. Процесс горения достигает критического состояния. Но в отличие от медленного горения происходит не потухание, а переход в детонационный режим.

Изложенную теорию можно построить исходя из соображений неполной автомодельности. Тогда бы мы опирались на указанный в начале статьи экспериментальный факт зависимости длины переходного участка от диаметра трубы, и следовала бы очевидность решения соотношения (9). Но автор стремился к большей наглядности, несмотря на то, что теория фракталов именно с идеей неполной автомодельности Г. И. Баренблатта играет исключительно большую роль в практическом приложении этих удивительных математических объектов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. М.: Наука, 1984.
2. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1962.
3. Детонация конденсированных и газовых систем: Сб. статей. М.: Наука, 1986.
4. Фракталы в физике: Тр. 6 Междунар. симпоз. по фракталам в физике. М.: Мир, 1988.
5. Андреев М. А., Степанов А. М. Режимы ускорения газового пламени в трубах // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 2. С. 31-40.
6. Васильев А. А., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е. Детонационные волны в газах // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 5. С. 109-131.
7. Pawel, Van Tiggelen P. J., Vasatko H. // Combust. Flame. 1973. V. 15. P. 173.
8. Бартльме Ф. Газодинамика горения. М.: Энергоиздат, 1981.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоздат, 1982.

*Поступила в редакцию 5/IV 1994 г.,  
в окончательном варианте — 11/IV 1995 г.*

---