УДК 535

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КРОМКЕ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ

В. А. Сарайкин

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Описывается вывод уравнений для расчета концентрации напряжений вблизи замкнутого контура трещины, лежащей в плоскости. Относительно коэффициента концентрации получена система одномерных интегральных уравнений, в правых частях которой уже содержится начальное приближение — решение задачи о круговой трещине под действием неосесимметричной нагрузки на берегах.

При решении смешанных задач для гармонических функций возникает необходимость вычисления функций на участках границы, где их значения в краевой задаче не заданы. Например, в задаче о стационарной фильтрации жидкости по закону Дарси в глубь однородного пористого полупространства сквозь проницаемое пятно на поверхности известно давление вышележащей жидкости на пятне, а вне его на непроницаемой части границы равна нулю нормальная составляющая вектора скорости. Вычисление скорости жидкости по нормали на проницаемой части границы необходимо для определения расхода жидкости. В смешанной задаче о хрупкой трещине нормального разрыва в плоскости трещины заданы значения перемещения на ее продолжении и переменное напряжение по нормали к трещине. Интересующей величиной в этой задаче является напряжение на продолжении трещины — по коэффициенту интенсивности напряжений можно установить устойчивую форму трещины.

Обычно при определении таких величин применяются граничные уравнения теории потенциала. В задаче о трещине возможны два способа расчета. В первом применяется уравнение Фредгольма первого рода, в котором перемещение w на трещине представляется через напряжение σ следующим образом:

$$w(r,\vartheta,0)=\frac{1}{2\pi A}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho\sigma(\rho,\alpha,0)\,\frac{d\rho\,d\alpha}{R(\rho,r,\vartheta-\alpha)}. \tag{1}$$

Здесь и далее $z=0$, $r<l(\vartheta)$ — положение трещины в цилиндрической системе координат (r,ϑ,z); $R(\rho,r,\vartheta-\alpha)$ — расстояние между точками (r,ϑ) и (ρ,α); $A=\mu/(1-\nu)$; μ,ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Так как по симметрии на продолжении трещины $z=0$, $r>l(\vartheta)$ перемещение равно нулю, отсюда следует уравнение для определения неизвестной функции $\sigma=\sigma_+$ при $z=0$, $r>l(\vartheta)$ (значения $\sigma=\sigma_-$ при $r<l(\vartheta)$ заданы). Неустойчивость расчетных схем для уравнений этого рода, а также неограниченность области, в которой разыскивается решение, затрудняют нахождение сингулярных решений, а именно такой является искомая функция.

Во втором случае уравнение, которое можно составить для определения решения на границе, получается из приведенного выше путем обращения, если интегралы понимать как интегральное преобразование, переводящее функцию σ в w:

$$\sigma(r,\vartheta,0) = \frac{A}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l(\alpha)}\rho w(\rho,\alpha,0)\,\frac{\varepsilon d\rho\,d\alpha}{[\varepsilon^2 + R^2(\rho,r,\vartheta-\alpha)]^{3/2}}. \tag{2}$$

Параметр ε введен с целью понизить сингулярность ядра.

При $r < l(\vartheta)$ данное выражение является интегральным уравнением относительно перемещения (содержит производную по нормали от потенциала двойного слоя). Оно ведет себя устойчиво при расчетах, но высокая степень сингулярности вызывает затруднения при численной реализации. Кроме того, напряжение вычисляется по найденному перемещению, что вносит дополнительную погрешность при расчете коэффициента интенсивности напряжений.

В данной статье для расчета коэффициента интенсивности напряжений выводится модифицированное граничное интегральное уравнение, которое занимает «промежуточное» место между уравнениями (1) и (2).

С помощью представлений Папковича задача определения параметров трещины нормального разрыва сводится к нахождению одной гармонической функции $f(r,\vartheta,z)$. Через эту функцию можно выразить перемещения и напряжения. Например, для нормальных составляющих векторов перемещения и напряжения на площадке с нормалью, параллельной оси z, имеем

$$w = 2\Big(1-\nu-\frac{z}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \sigma = 2\mu\Big(1 - z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

В задаче о трещине нормального разрыва, точки которой $r < l(\vartheta)$ лежат в плоскости $z = 0$, функция f должна удовлетворять следующим заданным условиям:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{2\mu}\sigma_-(r,\vartheta) \quad (r < l(\vartheta)), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (r > l(\vartheta)).$$

Считается, что контур трещины не имеет угловых точек и, хотя это непринципиально, для простоты дальнейших выкладок предполагается звездчатым.

Рассмотрим верхнее полупространство. Разлагая функции f, w, σ в комплексные ряды Фурье по угловой координате и применяя к коэффициентам w_n, σ_n преобразование Ханкеля с ядром $rJ_n(qr)$ (q — параметр преобразования), для каждой гармоники получаем экспоненциально убывающие по z решения. В плоскости трещины изображения Ханкеля коэффициентов Фурье связаны условием (для $z = 0$ зависимость от этого аргумента у всех функций далее опускаем)

$$\sigma_n^H(q) = -Aqw_n^H(q).$$

Перейдем в этом равенстве к оригиналам. Обратим изображения Ханкеля с целыми индексами, применив к ним формулу обращения для преобразования Ханкеля с полуцелыми индексами. Домножим последнее равенство на $\sqrt{q}J_{n+1/2}(qx)$ и проинтегрируем по q с учетом формулы для разрывных интегралов (см. [1, формула 6.575.1]):

$$\int\limits_0^\infty q^{\mu-\nu}J_{\nu+1}(aq)J_\mu(bq)\,dq = \begin{cases} 0, & a < b, \\ \dfrac{(a^2-b^2)^{\nu-\mu}b^\mu}{2^{\nu-\mu}a^{\nu+1}\Gamma(\nu-\mu+1)}, & a > b \end{cases}$$

(Γ — гамма-функция).

Получим уравнения для коэффициентов гармоник

$$\int\limits_0^x \frac{\rho\sigma_n(\rho)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\Big(\frac{\rho}{x}\Big)^n d\rho = Ax\int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[w_n(\rho)\Big(\frac{x}{\rho}\Big)^n\Big]\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}}. \tag{3}$$

После суммирования по n в бесконечных пределах с весом $\exp(in\vartheta)$ с учетом представлений коэффициентов Фурье через разлагаемые в ряд функции, уравнения приводятся к интегральному уравнению относительно неизвестного полураскрытия трещины w и напряжения на ее продолжении $\sigma = \sigma_+$ $(\sigma = \sigma_- + \sigma_+,\quad \sigma_-$ задано)

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^x \frac{\rho\sigma(\rho,\alpha)\sqrt{x^2-\rho^2}\,d\rho\,d\alpha}{R^2(\rho,x,\vartheta-\alpha)} = Ax\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_x^{l(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\frac{w(\rho,\alpha)(\rho^2-x^2)}{R^2(\rho,x,\vartheta-\alpha)}\Big]\frac{d\rho\,d\alpha}{\sqrt{\rho^2-x^2}},\\ R^2(\rho,x,\vartheta-\alpha) = \rho^2 - 2\rho x\cos(\vartheta-\alpha) + x^2.\end{gathered} \tag{4}$$

В частном случае для круговой трещины нормального разрыва $l(\vartheta) = L = \mathrm{const}$, раскрывающейся под действием неосесимметричной нагрузки на берегах, решение этого уравнения известно (см., например, [2]):

$$\begin{gathered}w(r,\vartheta) = -\frac{2}{\pi A}\int\limits_r^L \frac{1}{\sqrt{x^2-r^2}}\int\limits_0^x \frac{\rho Q(\rho,x^2/r,\vartheta)\,d\rho\,dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}} \qquad (0<r<L),\\ \sigma_+(r,\vartheta) = -\frac{2}{\pi\sqrt{r^2-L^2}}\int\limits_0^L \frac{\rho Q(\rho,r,\vartheta)\sqrt{L^2-\rho^2}\,d\rho}{r^2-\rho^2} \qquad (L<r<\infty),\\ Q(\rho,r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sigma_-(\rho,\alpha)(r^2-\rho^2)\,d\alpha}{R^2(\rho,r,\vartheta-\alpha)}.\end{gathered} \tag{5}$$

Когда напряжение на трещине не зависит от угловой координаты, решение упрощается: после вычисления интеграла Пуассона находится функция $Q = \sigma_-(\rho)$ и (5) переходит в решение осесимметричной задачи [3].

Составим интегральные уравнения для определения неизвестных функций в случае, когда расстояние до кромки трещины переменное. Для этого сначала преобразуем уравнения (3), разделив область интегрирования по радиальной координате на две части $(0, L)$ и (L, ∞):

$$\int\limits_L^x \frac{\rho\sigma_n(\rho)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\Big(\frac{\rho}{x}\Big)^n d\rho = Ax\int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[w_n(\rho)\Big(\frac{x}{\rho}\Big)^n\Big]\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}} - \int\limits_0^L \frac{\rho\sigma_n(\rho)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\Big(\frac{\rho}{x}\Big)^n d\rho, \tag{6}$$

где параметр L — произвольная постоянная величина. Заметим, что все функции в (6) не зависят от L, т. е. введение параметра — тождественное преобразование. Единственное требование — правая часть должна рассматриваться при $x > L$.

Следующая выкладка заключается в обращении в интервале (L, x) интегрального оператора Абеля, стоящего слева, после чего при $r > L$ получаем

$$\sigma_n(r) = A\frac{\Phi_n(r,r)}{\sqrt{r^2-L^2}} - A\int\limits_L^r [\Phi_n(r,x) - \Phi_n(r,r)]\,\frac{x\,dx}{(r^2-x^2)^{3/2}} - \frac{F_n(r,\vartheta)}{\sqrt{r^2-L^2}},$$

$$\Phi_n(r,x) = \frac{2x}{\pi}\int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[w_n(\rho)\Big(\frac{x^2}{\rho r}\Big)^n\Big]\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}}, \quad F_n(r,\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^L \rho\sigma_n(\rho)\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n\frac{\sqrt{L^2-\rho^2}\,d\rho}{r^2-\rho^2}.$$

От коэффициентов Фурье перейдем к искомым функциям, домножив равенство на $\exp(in\vartheta)$. Учитывая, что ранее введенный параметр L не препятствует суммированию рядов, для функций в области $r > L$ находим

$$\sigma(r,\vartheta) + \frac{1}{\pi^2\sqrt{r^2 - L^2}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L} \rho\sigma(\rho,\alpha) \frac{\sqrt{L^2-\rho^2}\,d\rho\,d\alpha}{R^2(\rho,r,\vartheta-\alpha)} =$$

$$= A\frac{\Phi(r,r,\vartheta)}{\sqrt{r^2-L^2}} - A\int\limits_L^r [\Phi(r,x,\vartheta) - \Phi(r,r,\vartheta)] \frac{x\,dx}{(r^2-x^2)^{3/2}}, \qquad (7)$$

$$\Phi(r,x,\vartheta) = \frac{x}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_x^{l(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[w(\rho,\alpha)\frac{\rho^2r^2 - x^4}{R^2(x^2,\rho r,\vartheta-\alpha)}\Big]\frac{d\rho\,d\alpha}{\sqrt{\rho^2-x^2}}.$$

Если $l(\vartheta) = L = \text{const}$, то слагаемые в правой части уравнения (7) исчезают, а второе слагаемое в левой части под знаком интеграла содержит известное на трещине напряжение σ_-. Полученное в (7) напряжение $\sigma = \sigma_+$ совпадает с решением (5).

Выполнив аналогичные выкладки при $r < L$, получаем уравнение для точек в дополнительной области

$$w(r,\vartheta) - \frac{1}{\pi^2}\sqrt{L^2-r^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_L^{l(\alpha)} \frac{\rho w(\rho,\alpha)\,d\rho\,d\alpha}{R^2(\rho,r,\vartheta-\alpha)\sqrt{\rho^2-L^2}} = \int\limits_r^L \frac{\Psi(r,x,\vartheta)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}},$$

$$\Psi(r,x,\vartheta) = \frac{1}{\pi^2 A}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{x} \rho\sigma(\rho,\alpha)\frac{(\rho^2r^2-x^4)\,d\rho\,d\alpha}{R^2(x^2,\rho r,\vartheta-\alpha)\sqrt{x^2-\rho^2}}. \qquad (8)$$

Интегрирование перемещения ведется по области $l(\alpha) > L$.

Если контуром трещины является окружность, то уравнение (8) переходит в первое равенство в решении (5).

Разобьем в (7), (8) область интегрирования по координате α на n секторов $(\alpha_k - h_k, \alpha_k + h_k)$. Полагаем внутри каждого сектора значения напряжения и перемещения не зависящими от окружной координаты и равными их значениям на биссектрисах α_k. Переменный шаг $2h_k$ можно подобрать таким, чтобы кривая $\rho = l(\alpha)$ делилась лучами на равные отрезки. В пределах каждого сектора заменим контур трещины дугой окружности $\rho = l(\alpha_k) = l_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Заменив интегралы по переменной α на суммы с учетом того, что в k-м секторе ядро уравнения можно проинтегрировать:

$$\int\limits_{\alpha_k-h_k}^{\alpha_k+h_k} \frac{r^2-\rho^2}{R^2(\rho,r,\vartheta_j-\alpha)}d\alpha = 2\pi\,\mathrm{sign}\,(r-\rho)\delta_{jk} + 2K_{jk}(r,\rho),$$

$$K_{jk}(r,\rho) = \mathrm{arctg}\,\Big(\frac{r-\rho}{r+\rho}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\vartheta_j-\alpha_k-h_k}{2}\Big) - \mathrm{arctg}\,\Big(\frac{r-\rho}{r+\rho}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\vartheta_j-\alpha_k+h_k}{2}\Big),$$

получим систему, состоящую из одномерных интегральных уравнений

$$\sigma_{j+}(r) + \frac{2}{\pi^2\sqrt{r^2-l_j^2}}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k}^{l_j} \rho\sigma_{k+}(\rho)K_{jk}(r,\rho)\frac{\sqrt{l_j^2-\rho^2}\,d\rho}{r^2-\rho^2} =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2\sqrt{r^2-l_j^2}}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{l_k}\rho\sigma_{k-}(\rho)(\pi\delta_{ik}+K_{jk}(r,\rho))\frac{\sqrt{l_j^2-\rho^2}\,d\rho}{r^2-\rho^2}+A\frac{\Phi_j(r,r)}{\sqrt{r^2-l_j^2}}-$$

$$-A\int\limits_{l_j}^{r}[\Phi_j(r,x)-\Phi_j(r,r)]\frac{x\,dx}{(r^2-x^2)^{3/2}}\qquad (r>l_j),$$

$$w_j(r)-\frac{2}{\pi^2}\sqrt{l_j^2-r^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_j}^{l_k}\frac{\rho w_k(\rho)K_{jk}(r,\rho)\,d\rho}{(r^2-\rho^2)\sqrt{\rho^2-l_j^2}}=\int\limits_r^{l_j}\frac{\Psi_j(r,x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\qquad (r<l_j),$$

$$\Psi_j(r,x)=\frac{2x}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_x^{l_k}\frac{\partial}{\partial\rho}[w_k(\rho)K_{jk}(x^2,\rho r)]\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}},$$

$$\Psi_j(r,x)=-\frac{2}{\pi^2 A}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{x}\rho\sigma_k(\rho)(\pi\delta_{jk}-K_{jk}(x^2,\rho r))\frac{d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}},$$

$$w_j(r)=w(r,\vartheta),\qquad \sigma_j(r)=\sigma(r,\vartheta),\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

При переходе от уравнений (7), (8) к дискретным учтено, что искомое решение не должно зависеть от параметра L, поэтому в пределах j-го сектора значения L полагались равными постоянной l_j.

К достоинствам предложенной здесь системы можно отнести следующие.

1. Для того чтобы найти концентрацию напряжений вблизи трещины, достаточно «погрузить» трещину в конечную область $0<r<\max\limits_{\vartheta} l(\vartheta)+\mathrm{const}$.

2. Можно перейти к новой неизвестной функции $X(r,\vartheta)$:

$$w(r,\vartheta)=\sqrt{l^2(\vartheta)-r^2}\,X(r,\vartheta)\quad (0\leqslant r\leqslant l(\vartheta)),\qquad \sigma(r,\vartheta)=\frac{Al(\vartheta)X(r,\vartheta)}{\sqrt{r^2-l^2(\vartheta)}}\quad (l(\vartheta)<r),$$

которая будет уже непрерывной в точках гладкого контура. Для отыскания этой функции по обе стороны контура получается единообразная система уравнений

$$X_j(r)-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_j}^{l_k}\frac{\rho X_k(\rho)K_{jk}(r,\rho)\sqrt{l_k^2-\rho^2}\,d\rho}{(r^2-\rho^2)\sqrt{\rho^2-l_j^2}}=\frac{1}{\sqrt{l_j^2-r^2}}\int\limits_r^{l_j}\frac{\Psi_j(r,x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\qquad (r<l_j),$$

$$l_jX_j(r)+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n}l_k\int\limits_{l_k}^{l_j}\frac{\rho X_k(\rho)K_{jk}(r,\rho)\sqrt{l_j^2-\rho^2}\,d\rho}{(r^2-\rho^2)\sqrt{\rho^2-l_k^2}}=\Phi_j(r,r)-F_j(r)-$$

$$-\sqrt{r^2-l_j^2}\int\limits_{l_j}^{r}[\Phi_j(r,x)-\Phi_j(r,r)]\frac{x\,dx}{(r^2-x^2)^{3/2}}\qquad (r>l_j),\qquad (9)$$

$$\Psi_j(r,x)=-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{x}\left[\sigma_{k-}^{A}(\rho)+\frac{l_kX_k(\rho)}{\sqrt{\rho^2-l_k^2}}\right](\pi\delta_{jk}-K_{jk}(x^2,\rho r))\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}},$$

$$\Phi_j(r,x) = \frac{2x}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n} \int_x^{l_k} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[X_k(\rho)\sqrt{l_k^2-\rho^2}K_{jk}(x^2,\rho r)\Big]\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}},$$

$$F_j(r) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{l_k} \rho\sigma_{k-}^A(\rho)(\pi\delta_{jk}+K_{jk}(r,\rho))\,\frac{\sqrt{l_j^2-\rho^2}\,d\rho}{r^2-\rho^2},$$

где $\sigma_{k-}^A = \sigma_{k-}/A$.

В системе одномерных уравнений (9) искомые величины на трещине и ее продолжении «перевязаны». Например, в правой части первого уравнения на интервале $r < l_j$ содержатся неизвестные из интервала $\rho > l_k$ при $l_k < l_j$. В правых частях уравнений имеются слагаемые, где уже учтены основные черты решения для переменной неосесимметричной нагрузки на дугах окружностей, которыми приближен исходный контур. Поэтому можно надеяться на быструю сходимость к решению при расчете данной системы методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
2. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
3. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

Поступила в редакцию 6/II 1998 г.