

Ф. В. Булыгин

(Москва)

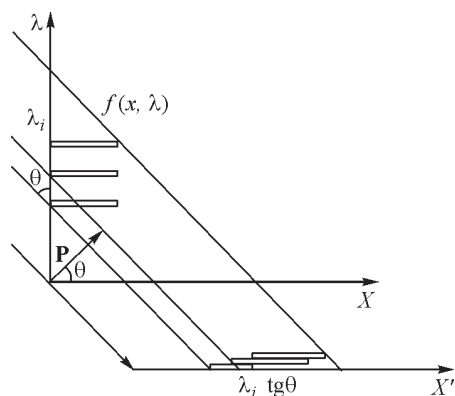
ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРОТОМОГРАФИИ  
В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрены методы получения томографических проекций и реконструкции пространственно-спектральной структуры полихроматических объектов различной размерности. Показано, что при получении проекций в многомерном фазовом пространстве возможно применение нетрадиционных алгоритмов томографической реконструкции.

Введение. Методы томографии традиционно используются для анализа пространственной структуры различных объектов. В работе [1] была высказана идея осуществления томографического зондирования в фазовом пространстве, где одна из координат имеет размерность, отличную от длины. Было предложено использовать методы томографии для исследования структуры пространственно-временных (хронотомография) и пространственно-спектральных объектов (спектротомография). Пространственно-спектральным объектом является, например, двумерное цветное изображение, которое описывается функцией яркости  $f(x, y, \lambda)$  в фазовом пространстве  $(X, Y, \lambda)$ , где  $\lambda$  – длина волны оптического излучения, а  $x, y$  – пространственные координаты. Если такое изображение «пропустить» через призму или дифракционную решетку, то на регистраторе образуется ряд наложенных друг на друга смещенных, «смазанных» изображений, соответствующих разным длинам волн. Смещение определяется дисперсией спектрально-го прибора  $D$ , величине которой может быть сопоставлен угол зондирования в пространственно-спектральной плоскости:  $D \sim \tan \theta$ . Меняя величину дисперсии, можно менять углы зондирования и таким образом получить набор проекций пространственно-спектрального объекта, и затем восстановить его структуру с помощью методов вычислительной томографии. Реконструированная структура визуализируется в виде сечений  $\text{const}$  или  $x = \text{const}$ .

Спектротомография – новое направление оптической томографии, которое позволяет исследовать внутреннюю пространственно-спектральную структуру полихроматических объектов. Принцип спектротомографии (СТ) состоит в записи набора спектротомографических проекций, содержащих интегральную информацию о спектральных и пространственных свойствах объекта исследования и последующей томографической реконструкции его внутренней структуры [2]. Особенности зондирования в фазовом простран-

Рис. 1. Схема получения проекции в пространственно-спектральной плоскости



стве, где переменные имеют различную физическую природу, позволяют получить томографические проекции, обладающие свойствами, которых нет у проекций, получаемых в обычном пространстве. Поэтому целью данной работы является изучение методов получения спектротомографических проекций и их особенностей, а также теоретическое и

экспериментальное исследование возможности осуществления спектротомографии в четырехмерном пространстве  $(X, Y, Z, \lambda)$  с использованием локальных алгоритмов томографической реконструкции.

Основы спектротомографии. Для получения набора СТ-проекций полихроматического объекта необходимо осуществить зондирование исследуемого объекта лучами, лежащими не только в пространственной плоскости  $(X, Y)$ , но и в пространственно-спектральной плоскости  $(X, \lambda)$  или  $(Y, \lambda)$ . Рассмотрим оптически прозрачный самосветящийся пространственно-спектральный объект  $f(x, \lambda)$ , изображенный на рис. 1. Пусть плоскость регистратора совпадает с плоскостью  $(X, Y)$  и перпендикулярна оси  $Z$ , а его чувствительность равномерно сенсibilизирована в спектральном диапазоне объекта. Спроецируем объект на плоскость регистратора с помощью лучей, параллельных оси  $Z$ . В результате получим «черно-белую фотографию» объекта, которой соответствует проекция с углом  $\theta$  между направлением зондирования и осью  $X$ , равным 0. Запишем уравнение проекции  $F(p)$ , получаемой в результате зондирования вдоль лучей, задаваемых нормированным уравнением прямой  $p = x \cos \theta + \lambda \sin \theta$  [3]:

$$F(p) = \int f(x, \lambda) (p - x \cos \theta - \lambda \sin \theta) dx d\lambda, \quad (1)$$

где  $p$  – длина вектора  $\mathbf{P}$ , задающего пучок зондирующих лучей. Введем ось регистратора  $X'$ , параллельную оси  $X$ , и произведем замену переменных  $p = x \cos \theta + \lambda \sin \theta$ . В результате получим

$$F(x \cos \theta + \lambda \sin \theta) = \int f(x, \lambda) (x - x \cos \theta + \lambda \sin \theta) dx d\lambda. \quad (2)$$

Выполнив интегрирование по  $x$ , будем иметь

$$F(x \cos \theta + \lambda \sin \theta) = \int f(x \cos \theta + \lambda \sin \theta, \lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Данная процедура может быть интерпретирована как переход от нормальной проекции к планарной. Из формулы (3) видно, что такая проекция представляет собой сумму смещенных вдоль оси  $X$  элементов исследуемого объекта  $f_i(x, \lambda_i)$ .

Физическим процессом, который может быть описан данной процедурой, является «пропускание» изображения полихроматического объекта  $f(x, \lambda)$  через диспергирующий элемент. В результате изображение, получаемое на регистраторе, представляет собой совокупность наложенных друг на друга слоев исследуемого объекта, соответствующих разным длинам волн. Из рис. 1 видно, что величина смещения слоев определяется линейной дисперсией  $D(\lambda) = dx/d\lambda$ . Если дисперсия постоянна и не зависит от длины волны, то получаемое на регистраторе смазанное изображение описывается выражением

$$I(x) = \int f(x - D(\lambda), \lambda) U(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

где  $I(x)$  – интенсивность излучения на регистраторе, а  $U(\lambda)$  – спектральная чувствительность регистратора. Если  $U(\lambda) = \text{const}$  во всем спектральном интервале объекта, то выражение (4) совпадает с выражением для проекции (3). При этом величине угла зондирования может быть сопоставлена линейная дисперсия  $D \sim \tan \theta$ . Меняя величину дисперсии, можно изменить углы зондирования и таким образом получить набор проекций пространственно-спектрального объекта  $f(x, \lambda)$  (рис. 2, а), и затем восстановить его структуру с помощью методов вычислительной томографии. Реконструированная структура визуализируется в виде сечений  $\lambda = \text{const}$  или  $x = \text{const}$  [2].

Недостатком представленной схемы зондирования СТ является необходимость механической смены диспергирующего элемента. В [4] предложена система сбора данных, в которой диспергирующий элемент не заменяется, а поворачивается относительно оптической оси системы (рис. 2, б). Через определенные интервалы углов поворота осуществляется регистрация про-

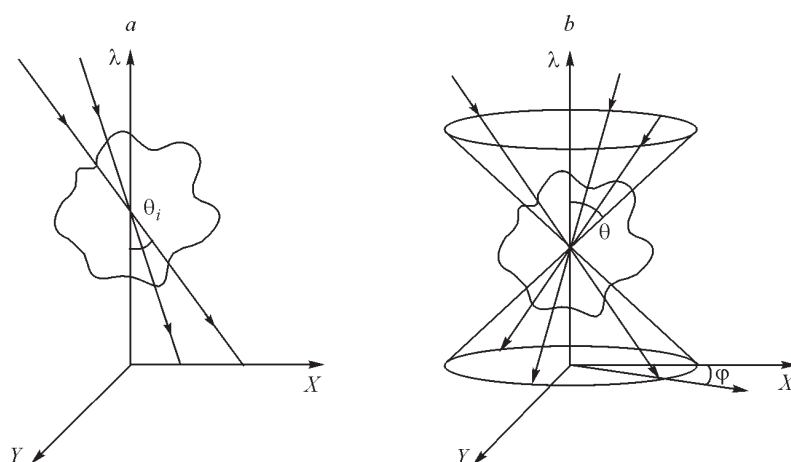


Рис. 2. Схемы зондирования в пространственно-спектральных плоскостях: схема с перемен-

екции. При этом зондирующие лучи описывают в пространстве  $(X, Y, Z)$  конус, ось которого совпадает с осью  $Z$ . Для увеличения числа проекций применяют комбинированную схему, в которой осуществляется поворот различных диспергирующих элементов. В этом случае зондирующие лучи формируют несколько конусов с различными углами наклона образующей.

Спектротомография в четырехмерном пространстве. Рассмотрим возможность использования СТ-методов для анализа внутренней пространственной и спектральной структур трехмерных светящихся полихроматических объектов, например различных плазменных образований. Анализ внутренней пространственной структуры плазменных объектов традиционно осуществлялся с помощью методов трехмерной оптической малоракурсной томографии [5]. Такие объекты определяются функцией  $f(x, y, z, \lambda)$  и являются четырехмерными. Применение принципов СТ позволяет создать принципиально новую схему получения проекций четырехмерного объекта, в которой осуществляется одновременное зондирование по спектральным и пространственным координатам. Покажем, что в этом случае строка получаемой двумерной спектротомографической проекции такого четырехмерного объекта будет являться интегралом Радона по плоскости в трехмерном пространстве  $(X, Y, Z)$ .

Рассмотрим эмиссионный полихроматический объект, поглощением внутри которого можно пренебречь. Интенсивность излучения такого объекта можно описать функцией четырех переменных  $f(x, y, z, \lambda)$ . Пусть оптическая система спектротомографа строит изображение объекта в плоскости  $(P, Z)$ , где вектор  $P$  задает пучок проецирующих лучей. Такое изображение представляет собой двумерную томографическую проекцию исследуемого объекта [3], причем каждая строка этой проекции является одномерной проекцией сечения  $z = \text{const}$  четырехмерного объекта  $f(x, y, z, \lambda)$ .

Запишем уравнение проекции объекта  $f(x, y, z = \text{const}, \lambda)$  в виде

$$H(p, \alpha) = \int f(x, y, z) (p - x \sin \alpha - y \cos \alpha) dx dy. \quad (5)$$

Здесь  $p$  – длина вектора  $P$ ;  $\alpha$  – угол между оптической осью системы и осью  $X$ , определяющий пространственный ракурс наблюдения объекта.

Далее излучение проходит через призму или дифракционную решетку, образуя которой (штрихи) параллельна оси  $Z$ . В результате воздействия диспергирующего элемента с полихроматическим излучением происходит преобразование, соответствующее проецированию в пространственно-спектральной плоскости  $(P, \lambda)$  [2], которое может быть представлено в виде

$$F(p, \lambda) = \int H(p, \alpha) (s - p \cos \alpha - \lambda \sin \alpha) dp d\alpha. \quad (6)$$

Здесь  $s$  – координата в плоскости регистратора;  $\lambda$  – угол, связанный с дисперсией оптической системы выражением

$$D \sim \text{tg } \lambda. \quad (7)$$

Поясним эти преобразования с помощью рис. 3. Пусть область определения функции  $f$  лежит в пределах от  $x_1$  до  $x_2$  по всем координатам. Для не-

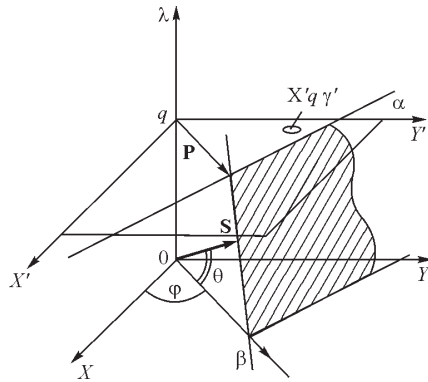


Рис. 3. Схема получения проекции в результате интегрирования по плоскости

которого значения  $q$  может быть выделена плоскость  $(X, q, Y)$ . Вектор  $\mathbf{P}$  задает набор прямых, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} q; \\ p \cos \alpha - y \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование вдоль всех прямых даст двумерную проекцию  $H(p, q)$ , определяемую уравнением (5).

Теперь проведем интегрирование в плоскости  $(X, q, Y)$  вдоль прямых, задаваемых уравнением

$$s - p \cos \alpha - y \sin \alpha = 0. \quad (9)$$

В результате получим одномерную проекцию  $F_1(s)$  согласно уравнению (6). Если подставить (5) в (6), то, опустив выкладки, получим

$$F_1(s) = \int \int f(x, y, z) (s - x \cos \alpha - y \sin \alpha - z) dx dy dz. \quad (10)$$

Выражение, стоящее под знаком  $\int$ -функции, является уравнением плоскости, определяемой вектором  $\mathbf{S}$ . На рис. 3 эта плоскость задается прямыми  $X'$  и  $Y'$ . Значение каждой точки проекции  $F_1(s)$  есть интеграл Радона от  $f(x, y, z)$  по плоскости в трехмерном пространстве.

Таким образом, предложенная схема сбора данных позволяет получить в каждой точке регистратора информацию об объекте, которая определяется его пространственно-спектральными характеристиками, распределенными в плоскости интегрирования. В этом состоит принципиальное отличие данного метода от традиционной томографии, где каждая точка на регистраторе несет информацию о характеристиках объекта вдоль прямой зондирования.

Локальный алгоритм восстановления томограмм. Одномерные проекции являются преобразованиями Радона по плоскостям от восстанавливаемого трехмерного  $(2D, z)$  объекта. В случае когда реконструкция структуры объекта производится в нечетномерном пространстве [6], формула обращения имеет вид

$$f(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^2} \int \int \frac{d^2 F_1(s)}{ds^2} \Big|_{s=s(x,y,z)}, \quad (11)$$

где  $f(x, y, z)$  – функция, описывающая восстанавливаемый трехмерный объект;  $\alpha$  и  $\beta$  – азимутальный и полярный углы зондирования;  $F_1(s)$  – одно-

мерная проекция, полученная для углов  $\alpha_i$  и  $\beta_k$ , которые определяют направление вектора  $S$ , задающего плоскость зондирования.

В каждой проекции есть точка  $s_0$ , значение проекции  $F_{ik}(s_0)$  в которой является интегралом Радона по плоскости, задаваемой вектором  $S$  с углами  $\alpha_i$  и  $\beta_k$  и проходящей через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Из формулы (11) следует, что значение реконструируемой функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  определяется интегралом по углам зондирования от второй производной проекций  $F_{ik}$  в точке  $s_0$ . Для того чтобы получить значение производной, надо оперировать значениями проекции  $F_{ik}$  лишь в небольшой окрестности точки  $s_0$ , тогда как в традиционной томографии при реконструкции, например, методом фурье-синтеза для получения значения функции объекта в одной точке необходимо проводить операции со всей проекцией. Поэтому формула обращения (11) обладает локальными свойствами и на ее основе может быть разработан алгоритм реконструкции, требующий значительно меньших вычислительных ресурсов и обладающий высоким быстродействием.

Из свойства локальности вытекает возможность увеличивать разрешение в какой-либо небольшой реконструируемой области исследуемого объекта, представляющей наибольший интерес, т. е. на основе одной и той же системы регистрации и восстанавливающего процессора можно создать томографическую систему с переменным пространственным разрешением. Для этого нет необходимости увеличивать число точек в проекции и размеры сетки восстановления, как это потребовалось бы в традиционной томографии. Достаточно поднять увеличение в оптической системе получения проекционных данных так, чтобы на регистраторе получалась проекция не всего объекта, а только области, представляющей наибольший интерес.

Для разработки алгоритма реконструкции на основе формулы (11) надо найти точки  $s_0$  в каждой проекции  $F_{ik}$ , определить значения второй производной от проекций в этих точках и просуммировать полученные значения по всем проекциям.

Значения  $s_0$ , соответствующие проекции точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , могут быть определены из уравнения плоскости

$$s_{ik} = x_0 \cos \alpha_i \cos \beta_k + y_0 \cos \alpha_i \sin \beta_k + z_0 \sin \alpha_i. \quad (12)$$

Величины  $\alpha_i$  и  $\beta_k$  являются номерами углов зондирования в азимутальной ( $\alpha_k$ ) и пространственно-спектральной ( $\beta_i$ ) плоскостях соответственно. Перейдем от интегрального вида обратного преобразования (11) к дискретному:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{8^2} \sum_k \sum_i F_{ik}(s_{ik}) \cdot \quad (13)$$

Переход от интеграла к сумме осуществлен на основании формулы прямоугольников – наиболее простой формулы аппроксимации.

Как правило, схема зондирования позволяет обеспечить равномерный угловой интервал в азимутальной плоскости, поэтому  $\Delta\alpha$  может быть вынесено за знак суммы:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{8^2} \sum_k \sum_i F_{ik}(s_{ik}) \cdot \Delta\alpha. \quad (14)$$

Полученная формула вместе с уравнением (12) является основой локального алгоритма томографического восстановления.

Первым этапом в реализации алгоритма восстановления является процедура двойного дифференцирования. Как было показано в [7], оператор двойного дифференцирования является фильтром, подавляющим низкие пространственные частоты. Это приводит к увеличению амплитуды резких неоднородностей. Такими неоднородностями являются, в частности, шумы, вносимые регистрирующим устройством. Чтобы избежать увеличения амплитуды этих шумов в процессе двойного дифференцирования, необходимо проводить предварительное сглаживание проекций. При выполнении вычислительной процедуры сглаживание может быть объединено в одну операцию с двукратным дифференцированием, что позволяет сократить время вычислений. Вместе с тем представляется перспективным создание аналогового дифференцирующего фильтра с изменяемым параметром усреднения, что позволит получать двукратно дифференцированные проекции в реальном масштабе времени на этапе оцифровки данных при вводе в ЭВМ.

Результаты численного эксперимента по восстановлению объекта на основе смоделированных проекций трехмерной гауссианы на сетке  $128 \times 128$  продемонстрировали работоспособность алгоритма и хорошие точностные характеристики [8]. Погрешность восстановления параметров гауссианы и ее центра тяжести не превышала 2 %.

Результаты экспериментальных исследований. Для проведения эксперимента по проверке метода спектротомографии четырехмерных сред был создан тест-объект, имитирующий струи аргоновой плазмы. Излучение многомодового аргонового лазера, выходящее из световодов, рассеивалось на микрочастицах жидкости в кювете и создавало два светящихся конуса, имитировавших струи аргоновой плазмы [8].

Проекция формировалась с помощью конфокальной оптической системы, состоящей из двух объективов. Первый объектив формировал квазипараллельный пучок, который проходил через диспергирующий элемент. Диспергирующий элемент представлял собой набор призм, установленных таким образом, чтобы отклонять луч на минимальный угол. Заменяя призмы, можно изменять величину дисперсии. Второй объектив конфокальной системы строил изображение тест-объекта, прошедшее через диспергирующий элемент, на регистраторе, в качестве которого использовалась ПЗС-камера. Устройство оцифровки обеспечивало ввод изображений в ЭВМ с дискретностью  $512 \times 512$  отсчетов.

Поворот тест-объекта был равносителен изменению азимутального угла  $\theta$ , который в процессе регистрации проекций изменялся от 0 до 180° с шагом 20°. Угол  $\theta$ , обусловленный величиной линейной дисперсии, изменялся с помощью замены диспергирующих элементов, в качестве которых использовались четыре набора призм.

На изображении объекта произвольно выбиралось сечение, подлежащее восстановлению. В этом эксперименте было выбрано сечение, соответствующее 180 строке изображения. Данная строка выделялась на каждом изображении и запоминалась. Для четырех значений дисперсии и при отсутствии диспергирующего элемента ( $\theta = 0$ ) было получено 50 проекций, по которым производилось восстановление объекта.

В разработанном алгоритме реконструкции амплитуда каждой точки восстанавливаемого сечения пропорциональна сумме амплитуд соответствующих точек двукратно дифференцированных проекций. Поэтому погреш-



ности проекции непосредственно влияют на погрешности реконструированных сечений объекта. Погрешности проекционных данных связаны с конечным разрешением устройства ввода, масштабными искажениями, создаваемыми призмой, погрешностью определения центра тяжести проекции, погрешностями, возникающими в процессе операций сжатия и нормировки, погрешностями определения углов зондирования. Оценка погрешности координат в восстановленном изображении, полученная в результате анализа этих факторов, составила около 10 %.

Результаты восстановления приводятся в виде изображений наиболее характерных сечений трехмерного объекта. Сечение объекта плоскостью  $(X, Y)$  дает изображение объекта на какой-либо длине волны, а сечения плоскостями  $(X, \lambda)$  и  $(Y, \lambda)$  дают распределение спектральных компонент объекта вдоль оси  $X$  или оси  $Y$ .

На рис. 4 приведена топограмма сечения плоскостью  $(X, \lambda)$ . По топограмме можно определить спектр объекта и распределение яркости излучения по оси  $X$  на каждой длине волны. Зная границы окна восстановления (455–531 нм), можно определить длины волн трех спектральных компонент в восстановленном спектре. Они составляют 469, 490, 509 нм. Крестиками отмечено местоположение истинных спектральных пиков излучения аргонового лазера 476, 488 и 514 нм. Смещение восстановленных спектральных пиков относительно истинных не превышает 10 % от спектрального окна восстановления. Погрешность определения относительной амплитуды составляет около 5 %, а уровень шумов восстановления – около 20 % от максимальной амплитуды.

Анализ результатов восстановления показывает, что погрешности восстановления пространственных и спектральных координат близки к оценкам погрешностей, полученных из анализа схемы сбора и предобработки проекционных данных. Однако отсутствие возможности введения априорной информации в данном алгоритме приводит к возникновению шумов, составляющих около 20 % от максимальной амплитуды.

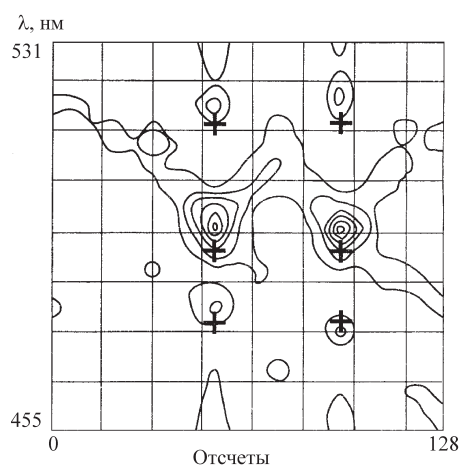


Рис. 4. Топограмма сечения трехмерной структуры реконструированного объекта плоскостью



Разработанная оптическая схема и программный комплекс на основе локального алгоритма томографической реконструкции использовались для исследования пространственного распределения спектра флуоресценции алмаза [9]. Кристалл для исследований был предоставлен ГНИИ Алмаззолото Гохрана РФ.

Флуоресценция алмаза возникает под воздействием УФ-излучения, а ее цвет характеризует тип дефектов кристаллической решетки. Пространственное распределение цветов флуоресценции внутри алмаза позволяет оптимальным образом осуществить его разметку для последующей огранки [10].

Оптическая схема, использовавшаяся для получения СТ-проекций светящегося алмаза, аналогична схеме в работе [8]. Алмаз закреплялся на вращающемся столике. Флуоресценция алмаза возбуждалась УФ-излучением с длиной волны 365 нм. Первая линза оптической системы диафрагмировалась для того, чтобы снизить количество рассеянного излучения. Использовались две различные комбинации призм, а также регистрировались проекции без диспергирующего элемента. Для каждого значения угла было получено по 10 проекций с различным значением  $\theta$ . Шаг изменения  $\theta$  составлял 20°. Общее число проекций, таким образом, составило 30.

Восстановление проводилось последовательно по сечениям  $z = \text{const}$  на сетке 128 × 128. Анализ результатов показал, что максимум спектральной кривой флуоресценции лежит в сине-зеленой области спектра и что это соответствует азотным дефектам типа N4 кристаллической решетки исследуемого образца алмаза [10].

Анализ сечений реконструированной трехмерной структуры алмаза плоскостью  $(X, Y)$  показал, что на длине волны 540 нм интенсивность флуоресценции примерно одинакова в центре и на краях кристалла. Яркость свечения синего цвета (490 нм) у краев кристалла выше, чем в центре. Данное явление может быть объяснено в рамках нескольких физических моделей, поэтому для конкретизации его физических механизмов требуются дополнительные исследования.

**Заключение.** Схема сбора проекционных данных, реализуемая в фазовом пространстве, где одна из переменных является длиной волны оптического излучения, дает возможность использовать для реконструкции структуры исследуемого объекта локальные алгоритмы. Применение локальных алгоритмов томографической реконструкции позволяет существенно сократить время вычислений и повысить эффективность работы восстанавливающего процессора.

Применение таких алгоритмов дает возможность создавать томографические системы, в которых большая часть вычислительной нагрузки ложится на быстродействующие аналоговые числительные модули, без потери точности восстановления.

Метод четырехмерной спектротомографии может служить основой для создания принципиально нового класса приборов для проведения исследований пространственно-спектральных характеристик трехмерных полихроматических объектов. К таким объектам относятся различные виды плазмы, светящиеся атмосферные и астрофизические образования, а также различные флуоресцирующие объекты: кристаллы и биологические препараты.

Автор выражает благодарность проф. Г. Г. Левину за помощь при выполнении данной работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin G. G., Vishnyakov G. N. On the possibility of chronotomography of high speed processes // Opt. Commun. 1985. 56, N 4. P. 231.
2. Булыгин Ф. В., Вишняков Г. Н., Левин Г. Г., Крапухин Д. В. Спектротомография – новый метод получения спектрограмм двумерных объектов // Оптика и спектроскопия. 1991. 71, вып. 6. С. 974.
3. Левин Г. Г., Вишняков Г. Н. Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1986.
4. Levin G. G., Bulygin F. V. Spectrotomography of two and three dimensional objects // Proc. SPIE. 1995. 2840. P. 113.
5. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
6. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
7. Вайнберг Э. И., Казак И. А., Курозаев В. П. Реконструкция внутренней пространственной структуры объектов по интегральным проекциям в реальном масштабе времени // ДАН СССР. 1981. 257, № 1. С. 89.
8. Булыгин Ф. В., Левин Г. Г. Спектротомография трехмерных объектов // Оптика и спектроскопия. 1995. 79, № 6. С. 973.
9. Булыгин Ф. В., Левин Г. Г. Спектротомография флуоресцирующих объектов // Оптика и спектроскопия. 1998. 84, № 6. С. 894.
10. Природные и синтетические алмазы /Под ред. Г. Б. Бокия. М.: Наука, 1982.

Всероссийский научно-исследовательский  
институт оптико-физических измерений РАН,  
E-mail: bulygin@vniiofi.ru

Поступила в редакцию  
28 января 2005 г.