

4. Varnam M. P., Payne D. N., Barlow A. J., Birch R. D. Analytic solution for the birefringence produced by thermal stress in polarization-maintaining optical fibres // J. Lightwave Technol.— 1983.— V. LT — 1, N 2.
5. Chu P. K., Sammut R. A. Analytical method for calculation of stresses and material birefringence in polarization-maintaining optical fiber // J. Lightwave Technol.— 1984.— V. LT — 2, N 5.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
7. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979.
9. Stolen R. H. Calculation of stress birefringence in fibers by an infinitesimal element method // J. Lightwave Technol.— 1983.— V. LT — 1, N 2.

г. Москва

Поступила 6/VI 1988 г.

УДК 533.6.011.8

В. В. Боголепов, И. И. Липатов, Л. А. Соколов

СТРУКТУРА ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ И КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ

Задача о химически неравновесных течениях в окрестности точки скачкообразного изменения температуры или каталитических свойств поверхности тела обладает несомненной теоретической и практической значимостью. Так, в [1—4] исследовалось влияние разрыва каталитических свойств поверхности на обтекание тела в рамках теорий ламинарного пограничного слоя или гиперзвукового вязкого ударного слоя. В [5—7] эта задача рассматривалась в такой же постановке, только сразу за точкой разрыва дополнительно вводился фиктивный внутренний пограничный слой; при использовании упрощающих допущений удалось получить аналитические решения для функций течения в окрестности за точкой разрыва каталитических свойств поверхности.

Для описания распространения возмущений от точки разрыва вверх по потоку, которое отсутствует для краевых задач параболического типа [1—7], в некоторой окрестности точки учитывалась продольная диффузия [8—10]; обоснование такой модели течения для слабого разрыва представлено в [11], где использовался известный метод сращиваемых асимптотических разложений [12], с помощью которого уже решены многие задачи особых возмущений механики жидкости и газа (см., например, [13, 14] и библиографию к ним).

При анализе окрестности точки разрыва каталитических свойств поверхности нужно учитывать, что при переходе с некаталитической поверхности на идеально каталитическую, например, плотность газа вблизи поверхности тела увеличивается на свою характерную величину, т. е. линии тока смещаются к поверхности тела и фактически обтекает фиктивная вмятина. Для таких течений может нарушаться основное допущение классической теории пограничного слоя Прандтля о малости продольных градиентов функций течения по сравнению с поперечными и становится необходимым использование полных уравнений Навье — Стокса. Систематический анализ режимов течений около малых двумерных неровностей на поверхности тела выполнен в [15]. Решение задачи о разрыве температуры поверхности, которая тоже сводится к анализу обтекания фиктивной неровности, получено в [16], однако там представлены весьма ограниченные результаты.

В настоящей работе исследована окрестность точки разрыва каталитических свойств и температуры поверхности при обтекании холодной пластины ламинарным сверхзвуковым химически неравновесным потоком бинарной смеси при стремлении числа Рейнольдса Re_0 к бесконечности. Получено, что в окрестности точки разрыва химические реакции могут происходить только на каталитической поверхности. Определены основные параметры подобия, представлены распределения индуцированного возмущения давления, напряжения трения, нормальных градиентов энтальпии и массовой концентрации атомов по пластине, выведены асимптотические закономерности изменения этих характеристик.

1. Рассматривается обтекание плоской полубесконечной пластины равномерным сверхзвуковым химически неравновесным потоком вязкого газа при большом, но докритическом Re_0 . Предполагается, что газ представляет собой бинарную смесь атомов и двухатомных молекул, состоящих из тех же атомов, а температура поверхности пластины не превышает уровня, при котором начинается диссоциация молекул при локальном

давлении. Исследуется влияние скачкообразного изменения температуры и каталитических свойств поверхности пластины на некотором расстоянии l от ее передней кромки на обтекание и нагревание пластины. Строится решение уравнений Навье — Стокса совместно с уравнением сохранения массовой концентрации атомов при $Re_0 = \rho_0 u_0 l / \mu_0 = \varepsilon^{-2} \rightarrow \infty$ (индекс 0 относится к функциям течения в равномерном набегающем потоке). В дальнейшем используются только безразмерные переменные, для этого все линейные размеры относятся к длине l , давление и напряжение трения — к удвоенному скоростному напору в набегающем потоке $\rho_0 u_0^2$, энтальпия — к u_0^2 , температура — к mu_0^2/R (m — молекулярный вес молекулярного компонента газа, R — универсальная газовая постоянная), тепловой поток — к $\rho_0 u_0^3$, коэффициент каталитичности поверхности — к u_0 , удельные теплоемкости — к R/m , остальные функции течения — к своим значениям в набегающем потоке.

Пусть при скачкообразном изменении температуры и каталитических свойств поверхности пластины $\Delta T \sim T \sim O(1)$ и $\Delta c \sim c \sim O(1)$, т. е. температура T и массовая концентрация атомов c на поверхности пластины изменяются в своих основных порядках. Следуя методу сращиваемых асимптотических разложений [12], сначала рассматривается область с характерными продольным и поперечным размерами $x \sim y \sim O(1)$. Хорошо известно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ течение в этой области описывается уравнениями без диссипативных и диффузионных членов, и в случае пластины их решением будет невозмущенный набегающий поток. Для удовлетворения краевых условий на поверхности пластины вводится затем область с размерами $x \sim O(1)$ и $y \sim O(\varepsilon)$ — пограничный слой Прандтля. Решения для этой области течения при разрыве каталитических свойств поверхности получены в [1—4], которые, однако, не описывают малой окрестности точки разрыва.

Скачкообразное изменение температуры и каталитических свойств поверхности пластины может вызвать изменение плотности газа $\Delta \rho \sim \rho \sim O(1)$ в пристеночном слое. Полагая, что при этом числа Прандтля и Шмидта $Pr \sim Sc \sim O(1)$, примем, что в наиболее общем случае толщина такого пристеночного слоя и толщины вязкого, теплопроводного и диффузионного слоев одинаковы по порядку величины. Тогда, используя оценку для продольной скорости $u \sim O(y/\varepsilon)$ (в пристеночном слое функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности) и приравнивая порядки величин конвективных и диссипативных членов уравнения сохранения продольного импульса, находим оценку для толщины возмущенного пристеночного слоя Δy в зависимости от его протяженности $\Delta x \leq 1$:

$$(1.1) \quad \Delta y \sim O(\varepsilon \Delta x^{1/3}) \leq \varepsilon.$$

Изменение толщины пристеночного слоя (1.1) приводит к пропорциональному смещению внешней границы пограничного слоя [13] и индуцирует (за счет взаимодействия с набегающим равномерным сверхзвуковым потоком) возмущение давления $\Delta p \sim O(\Delta y / \Delta x)$. Принимая, что в общем случае возмущение давления вызывает нелинейные возмущения скорости u в пристеночном слое (1.1) — $u \sim \Delta u \sim \Delta p^{1/2}$, получим, что Δp согласуется с (1.1) только при

$$(1.2) \quad \Delta x \sim O(\varepsilon^{3/4}), \quad \Delta y \sim O(\varepsilon^{5/4}), \quad \Delta p \sim O(\varepsilon^{1/2}).$$

Эти оценки определяют протяженность возмущенной окрестности точки разрыва температуры и каталитических свойств поверхности, где уже несправедливы теории ламинарного пограничного слоя или гиперзвукового вязкого ударного слоя и следует учитывать индуцированное возмущение давления. Необходимо еще отметить, что возмущенный пристеночный слой (1.1) находится по обе стороны от точки разрыва краевых условий, а не только вниз по потоку, как это предполагалось в [5—7].

Если обтекание пластины химически равновесное, то при температуре ее поверхности ниже значения, при котором идут реакции диссоциа-

ции при локальном давлении, в пристеночном слое (1.1) не будет атомарной составляющей и $c \approx \partial c / \partial y \approx 0$; тогда можно изучать только химически не реагирующие течения. В случае неравновесного обтекания в уравнениях сохранения массовых концентраций для каждого компонента газовой смеси все члены, в том числе член, описывающий скорость образования отдельного компонента, должны иметь одинаковый порядок величины $\sim O(1)$ [17]. Оценки (1.2) показывают, что в исследуемой окрестности точки разрыва индуцируются большие градиенты функций течения (например, $\partial p / \partial x \sim O(\varepsilon^{-1/4}) \gg 1$). Поэтому здесь член, описывающий скорость образования отдельного компонента газовой смеси, несуществен и течение можно рассматривать как химически «замороженное» с реакциями рекомбинации на поверхности пластины [18]. Так как в исследуемой области $\Delta p \sim O(\varepsilon^{1/2})$ по порядку величины меньше возмущения температуры или массовой концентрации атомов $T \sim \Delta T \sim c \sim \Delta c \sim O(1)$, то влияние бародиффузии асимптотически мало. Член, описывающий термодиффузию, по порядку величины равен конвективным членам уравнения сохранения массовой концентрации атомов, но в настоящей работе им, как обычно, пренебрегается по причине его малости [17].

2. Согласно изложенной в [13] методике изучения течений с взаимодействием, необходимо сначала рассмотреть возмущенную область 1 равномерного сверхзвукового набегающего потока с характерными размерами $\delta \ll x \sim y \sim O(\varepsilon^{3/4}) \ll 1$ ($\delta \sim O(\varepsilon)$ — толщина пограничного слоя), в которой справедливы независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= \varepsilon^{3/4} x_1, \quad y = \varepsilon^{3/4} y_1, \\ u &= 1 + \varepsilon^{1/2} u_1 + \dots, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_1 + \dots, \quad \rho = 1 + \varepsilon^{1/2} \rho_1 + \dots, \\ p &= p_0 + \varepsilon^{1/2} p_1 + \dots, \quad h = h_0 + \varepsilon^{1/2} h_1 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (2.1) в уравнения Навье — Стокса и совершенное предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что в первом приближении течение в области 1 описывается линейризованными уравнениями Эйлера

$$(2.2) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0.$$

Система уравнений (2.2) дополняется формулой для определения числа Маха для «замороженной» скорости звука и соотношением для приращенной энтальпии при «замороженном» химическом составе смеси

$$(2.3) \quad M^2 = \frac{1 - \partial h / \partial p}{\partial h / \partial p}, \quad h_1 = \frac{\partial h}{\partial p} p_1 + \frac{\partial h}{\partial \rho} \rho_1.$$

Уравнения (2.2) и (2.3) легко сводятся к волновому, решение которого (решение Даламбера для уравнений гиперболического типа) хорошо известно, и при $y_1 \rightarrow 0$

$$(2.4) \quad \sqrt{M^2 - 1} p_1(x_1, 0) = v_1(x_1, 0).$$

Так как в исследуемой окрестности точки разрыва свойств поверхности течение химически «замороженное», то в области 1 массовые концентрации компонентов смеси сохраняются вдоль линий тока.

Далее рассматривается возмущенная область 2 основной части пограничного слоя на пластине с характерными размерами $\delta \ll x \sim O(\varepsilon^{3/4}) \ll 1$, $y \sim O(\varepsilon) \sim \delta$, в которой вводятся новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x &= \varepsilon^{3/4} x_2, \quad y = \varepsilon y_2, \\ u &= u_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} u_{21} + \dots, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_{21} + \dots, \quad \rho = \rho_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} \rho_{21} + \dots, \\ p &= p_0 + \varepsilon^{1/2} p_2 + \dots, \quad T = T_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} T_{21} + \dots, \\ c &= c_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} c_{21} + \dots, \end{aligned}$$

где $u_{20}(y_2)$, $\rho_{20}(y_2)$, $T_{20}(y_2)$ и $c_{20}(y_2)$ — профили продольной скорости, плотности, температуры и массовой концентрации атомов в невозмущенном пограничном слое на пластине перед окрестностью точки разрыва крайних условий. Подстановка разложений (2.5) в уравнения Навье — Стокса и уравнение сохранения массовой концентрации атомов (см., например, [17]) и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что в первом приближении течение в области 2 описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + u_{20} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + \rho_{20} \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} + v_{21} \frac{d\rho_{20}}{dy_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{du_{20}}{dy_2} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dT_{20}}{dy_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial c_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dc_{20}}{dy_2} = 0, \end{aligned}$$

которая допускает частичное интегрирование

$$(2.6) \quad u_{21} = Ddu_{20}/dy_2, \quad v_{21} = -u_{20}dD/dx_2, \quad \rho_{21} = Dd\rho_{20}/dy_2, \\ T_{21} = DdT_{20}/dy_2, \quad c_{21} = Ddc_{20}/dy_2, \quad p_2 = p_2(x_2)$$

($D = D(x_2)$ — произвольная функция).

В вязком теплопроводном и диффузионном пристеночном слое 3 с характерными размерами $\delta \ll x \sim O(\varepsilon^{3/4}) \ll 1$ и $y \sim O(\varepsilon^{5/4}) \ll \delta$ вводятся независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида

$$(2.7) \quad x = \varepsilon^{3/4}x_3, \quad y = \varepsilon^{5/4}y_3, \quad u = \varepsilon^{1/4}u_3 + \dots, \quad v = \varepsilon^{3/4}v_3 + \dots, \\ \rho = \rho_3 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon^{1/2}p_3 + \dots, \quad T = T_{30} + \varepsilon^{1/4}T_{31} + \dots, \\ c = c_{30} + \varepsilon^{1/4}c_{31} + \dots$$

Подстановка разложений (2.7) в уравнения Навье — Стокса и уравнение сохранения массовой концентрации атомов и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что в первом приближении течение в пристеночном слое 3 описывается уравнениями сжимаемого пограничного слоя

$$(2.8) \quad \frac{\partial(\rho_3 u_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial(\rho_3 v_3)}{\partial y_3} = 0, \quad \rho_3 \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) + \frac{dp_3}{dx_3} = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right), \\ \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \rho_3 \left(u_3 \frac{\partial c_{30}}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial c_{30}}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial c_{30}}{\partial y_3} \right), \quad p_0 = \rho_3 T_{30} (1 + c_{30}), \\ \rho_3 c_p \left(u_3 \frac{\partial T_{30}}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial T_{30}}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T_{30}}{\partial y_3} \right) + \frac{\mu}{Sc} (c_{p1} - c_{p2}) \frac{\partial T_{30}}{\partial y_3} \frac{\partial c_{30}}{\partial y_3}$$

(c_{p1} , c_{p2} и c_p — удельные теплоемкости при постоянном давлении атомарного, молекулярного компонентов и их смеси соответственно). Из (2.7) видно, что в (2.8) не должны присутствовать члены, описывающие бародиффузию $\sim \varepsilon^2 \partial^2 p / \partial x^2 \sim \varepsilon \ll \rho u \partial c / \partial x \sim \varepsilon^{-1/2}$ и продольную диффузию $\sim \varepsilon^2 \partial^2 c / \partial x^2 \sim \varepsilon^{1/2} \ll \varepsilon^2 \partial^2 c / \partial y^2 \sim \varepsilon^{-1/2}$.

Внешние крайние условия получаются из сращивания асимптотических разложений функций течения (2.5) и (2.7) в областях 2 и 3 (при использовании соотношений (2.6))

$$(2.9) \quad u_3 \rightarrow A(y_3 + D), \quad T_{30} \rightarrow T_{20}(0), \quad c_{30} \rightarrow c_{20}(0) \quad (y_3 \rightarrow \infty)$$

($A = du_{20}/dy_2$ при $y_2 = 0$), а условие для определения давления — из сращивания асимптотических разложений для давления (2.1), (2.5) и (2.7) в областях 1, 2 и 3 (при применении (2.4) и (2.6))

$$(2.10) \quad p_3(x_3) = p_2(x_2) = p_1(x_1, 0) = \frac{v_1(x_1, 0)}{\sqrt{M^2 - 1}} - \frac{v_{21}(x_2, \infty)}{\sqrt{M^2 - 1}} = - \frac{dD/dx_2}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

Начальные крайние условия выводятся из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя на пластине:

$$(2.11) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad T_{30} \rightarrow T_{20}(0), \quad c_{30} \rightarrow c_{20}(0), \quad p_3, D \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty).$$

На поверхности пластины для компонент скорости должны выполняться условия прилипания и непротекания

$$(2.12) \quad u_3 = v_3 = 0 \quad (y_3 = 0).$$

Если начало координат области 3 поместить в точку скачкообразного изменения температуры и каталитических свойств поверхности пластины, то условия для температуры на поверхности пластины запишутся как

$$(2.13) \quad T_{30} = T_{20}(0) \quad (x_3 < 0), \quad T_{30} = (1 + \alpha)T_{20}(0) \quad (x_3 \geq 0, y_3 = 0).$$

Здесь параметр $\alpha > -1$ характеризует величину скачка температуры.

Для исследуемого случая обтекания пластины условие для массовой концентрации атомов на каталитической поверхности [17]

$$(2.14) \quad \partial c / \partial y = Sc \, k \rho c / \varepsilon^2 \mu,$$

где коэффициент каталитичности $k = \varepsilon^\beta K$, $K \sim O(1)$. Так как течение в рассматриваемой области химически «замороженное», то имеет смысл остановиться только на таких случаях, когда поверхность пластины перед точкой разрыва краевых условий не является идеально каталитической (т. е. $c_{20}(0) > 0$ и $\beta = 1$). Иначе в области 3 атомарный компонент будет отсутствовать. Тогда в переменных области 3 краевое условие (2.14) при $x_3 < 0$ примет вид

$$(2.15) \quad \partial c_{30} / \partial y_3 = 0 \quad (x_3 < 0, y_3 = 0).$$

Из уравнений (2.8) и краевых условий (2.9), (2.11), (2.13) и (2.15) сразу вытекает

$$(2.16) \quad T_{30}(x_3, y_3) \equiv T_{20}(0), \quad c_{30}(x_3, y_3) \equiv c_{20}(0) \quad (x_3 < 0).$$

Очевидно, нетривиальное решение для массовой концентрации атомов при $x_3 > 0$ можно найти только при значениях параметра $\beta \leq 3/4$. Тогда в переменных области 3 краевое условие (2.14) представится в форме

$$(2.17) \quad \partial c_{30} / \partial y_3 = Sc \, K \rho_3 c_{30} / \mu \quad \text{или} \quad c_{30} = 0 \quad (x_3 \geq 0, y_3 = 0).$$

При $x_3 < 0$ и выполнении (2.16) целесообразно рассмотреть следующие члены разложений (2.7) для температуры и массовой концентрации атомов, для которых получаются уравнения вида

$$(2.18) \quad \rho_3 \left(u_3 \frac{\partial c_{31}}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial c_{31}}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial c_{31}}{\partial y_3} \right), \quad \rho_3 c_p \left(u_3 \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial T_{31}}{\partial y_3} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T_{31}}{\partial y_3} \right).$$

Очевидно, что и в этом приближении несущественны бародиффузия и продольная диффузия.

Внешние краевые условия для функций c_{31} и T_{31} выводятся из сращивания асимптотических разложений функций течения (2.5) и (2.7) в областях 2 и 3 (при использовании соотношений (2.6)):

$$(2.19) \quad T_{31} \rightarrow B(y_3 + D), \quad c_{31} \rightarrow C(y_3 + D) \quad (y_3 \rightarrow \infty),$$

где $B = dT_{20}/dy_2$ и $C = dc_{20}/dy_2$ при $y_2 = 0$. Начальные краевые условия находим из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя на пластине:

$$(2.20) \quad T_{31} \rightarrow B y_3, \quad c_{31} \rightarrow C y_3 \quad (x_3 \rightarrow -\infty).$$

На поверхности пластины функции c_{31} и T_{31} должны удовлетворять условиям

$$(2.21) \quad \partial c_{31} / \partial y_3 = C, \quad T_{31} = 0 \quad (x_3 < 0, y_3 = 0).$$

В переменных (2.7) напряжение трения τ и тепловой поток q выражаются формулами

$$(2.22) \quad \tau = \varepsilon \mu \partial u_3 / \partial y_3 + \dots, \quad -q = \varepsilon^{3/4} q_1 + \varepsilon q_2 + \dots,$$

$$q_1 = \frac{\mu}{Pr} \left[c_p \frac{\partial T_{30}}{\partial y_3} + Le \frac{\partial c_{30}}{\partial y_3} \left(\int_0^{T_{30}} (c_{p_1} - c_{p_2}) dT + h^0 \right) \right],$$

$$q_2 = \frac{\mu}{Pr} \left[c_p \frac{\partial T_{31}}{\partial y_3} + Le \frac{\partial c_{31}}{\partial y_3} \left(\int_0^{T_{30}} (c_{p_1} - c_{p_2}) dT + h^0 \right) \right].$$

Здесь Le — число Льюиса — Семенова; h^0 — безразмерная теплота образования атомов. Формулы (2.22) показывают, что распределение теплового потока q при $x_3 < 0$ описывается вторым слагаемым (см. (2.16)), которое по порядку величины равно тепловому потоку в невозмущенном пограничном слое на пластине. Скачкообразное изменение температуры и каталитических свойств поверхности приводит к изменению теплового потока по порядку величины, и при $x_3 \geq 0$ его распределение будет определяться в основном первым слагаемым.

Для приведения краевой задачи (2.8)–(2.13), (2.15), (2.17)–(2.24) к виду, удобному для численного интегрирования, делается замена переменных

$$(2.23) \quad x = \frac{x_2}{x^*}, \quad \eta = \frac{1}{\eta^*} \int_0^{y_3} \rho_3 dy_3, \quad \psi = \frac{\Psi_3}{\Psi^*}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y_3} = \rho_3 u_3, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} = -\rho_3 v_3,$$

$$p = \frac{p_3}{p^*}, \quad c_1 = c_{30}, \quad T_1 = \frac{T_{30}}{T_{20}(0) [1 + c_{20}(0)]}, \quad c_2 = \frac{c_{31} \rho^*}{C \eta^*}, \quad T_2 = \frac{T_{31} \rho^*}{B \eta^*},$$

$$d = \frac{D \rho^*}{\eta^*}, \quad \rho^* = \frac{p_0}{T_{20}(0) [1 + c_{20}(0)]}, \quad x^* = \rho^{*-1/4} (M^2 - 1)^{-3/8} A^{-5/4},$$

$$\eta^* = \rho^{*1/4} (M^2 - 1)^{-1/8} A^{-3/4}, \quad \psi^* = \rho^{*-1/2} (M^2 - 1)^{-1/4} A^{-1/2}, \quad p^* = A^{1/2} \rho^{*-1/2} (M^2 - 1)^{-1/4}$$

и принимаются упрощающие допущения [17]

$$(2.24) \quad \rho_3 \mu = 1, \quad Pr, Sc, c_p = \text{const}, \quad \int_0^{T_{30}} (c_{p_1} - c_{p_2}) dT \ll h^0.$$

Тогда в переменных (2.23) при допущениях (2.24) эта краевая задача записывается стандартным образом:

$$(2.25) \quad \psi'''' = -d \cdot (1 + c_1) T_1 + \psi' \psi' - \psi \psi'',$$

$$c_i'' / Sc = \psi' c_i' - \psi c_i', \quad T_i'' / Pr = \psi' T_i' - \psi T_i', \quad i = 1, 2,$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi'(x, 0) = 0, \quad c_2'(x, 0) = 1, \quad T_2(x, 0) = 0,$$

$$c_1'(x, 0) = \bar{F} \frac{c_1(x, 0)}{1 + c_1(x, 0)}, \quad T_1(x, 0) = \frac{1 + \alpha}{1 + c_{20}(0)} \quad (x \geq 0),$$

$$\psi'(x, \infty) \rightarrow \int_0^\infty T_1 (1 + c_1) d\eta + d, \quad c_1(x, \infty) \rightarrow c_{20}(0), \quad T_1(x, \infty) \rightarrow \frac{1}{1 + c_{20}(0)},$$

$$c_2'(x, \infty) \rightarrow 1, \quad T_2'(x, \infty) \rightarrow 1, \quad \psi(-\infty, \eta) \rightarrow \eta^2/2, \quad c_2(-\infty, \eta) \rightarrow \eta,$$

$$T_2(-\infty, \eta) \rightarrow \eta, \quad d(-\infty) \rightarrow 0, \quad c_1(x, \eta) = c_{20}(0),$$

$$T_1(x, \eta) = 1/(1 + c_{20}(0)) \quad (x < 0),$$

$$F = \frac{Sc K p_0^{5/4}}{(M^2 - 1)^{1/8} A^{3/4} T_{20}^{5/4}(0) (1 + \alpha) [1 + c_{20}(0)]^{1/4}}.$$

Здесь $(\cdot) = \partial/\partial x$; $(\cdot)' = \partial/\partial \eta$; F — местное локальное число Дамкеллера, а формулы для напряжения трения и теплового потока (2.22) сводятся к виду

$$(2.26) \quad \tau = \psi'' + \dots, \quad q_1 = T_1' + \text{Le} E_1 c_1', \quad q_2 = T_2' + \text{Le} E_2 c_2', \\ E_1 = h^0/c_p T_{20}(0)[1 + c_{20}(0)], \quad E_2 = Ch^0/Bc_p,$$

где τ , q_1 и q_2 отнесены дополнительно к величинам $\varepsilon A/\rho^*$, $c_p T_{20}(0)[1 + c_{20}(0)]/\text{Pr} \eta^*$ и $c_p B/\text{Pr} \rho^*$ соответственно. Параметры подобия E_1 и E_2 характеризуют отношение величин частей теплового потока, обусловленных переносом энергии диффундирующими компонентами газовой смеси и теплопроводностью.

Очевидно, что усиление каталитического действия поверхности пластины при $x \geq 0$ должно приводить к уменьшению массовой концентрации атомов вблизи ее поверхности, т. е. $c_1(x, 0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда использование переменных

$$(2.27) \quad n = \eta/(3x)^{1/3}, \quad \psi = (3x)^{2/3}(\varphi + J_2 + \gamma_1 n), \quad d = (3x)^{1/3} \gamma_1$$

позволяет свести краевую задачу (2.25) к автомодельной (при $x \rightarrow \infty$)

$$(2.28) \quad \frac{d^3 \varphi}{dn^3} + 2(\varphi + \gamma_1 n + J_2) \frac{d^2 \varphi}{dn^2} - \left(\frac{d\varphi}{dn} + 2\gamma_1 + 2J \right) \frac{d\varphi}{dn} + 2T_1(1 + c_1)\varphi = \\ = (\gamma_1 + J)^2 - \frac{d}{dn} [T_1(1 + c_1)] - 2T_1(1 + c_1)(\gamma_1 n + J_2),$$

$$\frac{1}{\text{Sc}} \frac{d^2 c_1}{dn^2} + 2(\varphi + \gamma_1 n + J_2) \frac{dc_1}{dn} = 0, \quad \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d^2 T_1}{dn^2} + 2(\varphi + \gamma_1 n + J_2) \frac{dT_1}{dn} = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad d\varphi/dn = -\gamma_1, \quad c_1 = 0, \quad T_1 = (1 + \alpha)/[1 + c_{20}(0)] \quad (n = 0), \\ d\varphi/dn = 0, \quad d^2 \varphi/dn^2 = 0, \quad c_1 = c_{20}(0), \quad T_1 = 1/[1 + c_{20}(0)] \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$J = \int_0^n T_1(1 + c_1) dn, \quad J_2 = \int_0^n \int_0^n T_1(1 + c_1) dn dn.$$

Особенность краевой задачи (2.28) — отсутствие в ней члена с продольным градиентом давления. Появляется дополнительный неизвестный параметр γ_1 , который находится из самого решения этой задачи. Вид переменных (2.27) показывает, что при $x \rightarrow \infty$ напряжение трения τ (см. (2.26)) приближается к своему значению в невозмущенном пограничном слое на пластине перед окрестностью точки разрыва краевых условий, а тепловой поток q_1 уменьшается по закону

$$(2.29) \quad \tau = \psi'' = \frac{d^2 \varphi}{dn^2} + T_1(1 + c_1), \quad q_1 = \frac{1}{(3x)^{1/3}} \left(\frac{dT_1}{dn} + \text{Le} E_1 \frac{dc_1}{dn} \right).$$

Асимптотика решений краевых задач типа (2.25) при $x \rightarrow -\infty$ исследовалась в [13]. Формулы (2.27) функционально схожи с разложениями, построенными в [6, 7] для внутреннего пограничного слоя сразу за точкой разрыва свойств поверхности пластины. Однако в этих работах не учитывается влияние изменения свойств поверхности на возмущения давления, напряжения трения и теплового потока, т. е. рассматриваются случаи только слабого разрыва.

3. Для анализа решения краевой задачи (2.25) при $x \rightarrow 0$ необходимо изучить дополнительно область 4 около скачкообразного изменения температуры и каталитических свойств поверхности пластины протяженностью $\varepsilon^{3/2} < x < \varepsilon^{3/4}$. Если изменение характеристик поверхности пластины не вызывает отрыва пограничного слоя, то для нелинейной вязкой теплопроводной и диффузионной области 4 справедливы те же соотношения, что и для области 3, область 4 располагается целиком внутри области 3 и внешним потоком для области 4 является течение в при-

стеночной части области 3 при $x_3 \rightarrow -0$:

$$(3.1) \quad u_3 - A_w y_3, v_3 = 0, p_3 = p_w, \rho_3 = \frac{p_0}{T_{20}(0) [1 + c_{20}(0)]}, T_{30} = \\ = T_{20}(0), c_{30} = c_{20}(0).$$

Здесь $A_w = (\partial u_3 / \partial y_3)_w$; индекс w относится к величинам у поверхности пластины при $x_3 \rightarrow -0$. В области 4 справедливы независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида (2.7)

$$(3.2) \quad x = \Delta x x_4, y = \varepsilon \Delta x^{1/3} y_4, \\ u = \Delta x^{1/3} u_4 + \dots, v = (\varepsilon / \Delta x^{1/3}) v_4 + \dots, \rho = \rho_4 + \dots, c = c_{40} + \dots, \\ p = p_0 + \varepsilon^{1/2} p_w + \Delta x^{2/3} p_4 + \dots, T = T_{40} + \dots$$

Подстановка (3.2) в уравнения Навье — Стокса и уравнение сохранения массовой концентрации атомов и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{3/2} < \Delta x < \varepsilon^{3/4}$ показывают, что в первом приближении течение в области 4 описывается уравнениями вида (2.8) (индекс 3 следует изменить на 4). Внешние и начальные краевые условия получаются из сращения разложений (3.2) с пристеночной частью области 3 при $x_3 \rightarrow -0$ (3.1) и имеют вид (2.9), (2.11) (индекс 3 изменить на 4, $D \equiv 0$, вместо A использовать A_w).

Для получения нетривиального решения уравнения сохранения массовой концентрации атомов при $x_4 > 0$ необходимо, чтобы $\varepsilon^6 \geq \varepsilon / \Delta x^{1/3}$, так как при меньших значениях коэффициента каталитичности массовая концентрация атомов не успеет измениться в своем основном порядке по величине на протяжении $\varepsilon^{3/2} < \Delta x < \varepsilon^{3/4}$. Тогда краевые условия на поверхности пластины примут вид (2.12), (2.13), (2.15), (2.17) (при соответствующей замене индекса 3 на 4).

В рассматриваемом случае не будет взаимодействия с набегающим равномерным сверхзвуковым потоком, так как иначе индуцировалось бы $\Delta p \sim \Delta y / \Delta x \sim \varepsilon / \Delta x^{2/3} > \Delta x^{2/3}$ при $\Delta x < \varepsilon^{3/4}$. Поэтому в области 4 реализуется компенсационный режим течения [15], когда изменение толщины области 4 в первом приближении компенсируется изменением толщины пристеночной части течения в области 3 непосредственно перед точкой изменения свойств поверхности пластины. В [15] получено, что при этом индуцированное возмущение давления определяется из соотношения

$$(3.3) \quad \rho_{20}(0) A_w v_4 + dp_4 / dx_4 \rightarrow 0 \quad (y_4 \rightarrow \infty).$$

Характерной особенностью краевой задачи (2.8), (2.9), (2.11)—(2.13), (2.15), (2.17) (после замены индекса 3 на 4, величины A на A_w и $D \equiv 0$) и (3.3) является последнее компенсационное условие взаимодействия для определения возмущения давления, которое, однако, не повышает порядок производных по продольной координате, входящих в эту краевую задачу, и не индуцирует возмущений перед точкой разрыва краевых условий [15] (задача остается параболической). Поэтому здесь можно начальные краевые условия задавать при $x_4 = 0$ и исследовать решение при $x_4 > 0$. Выражения (2.22) для напряжения трения τ и теплового потока q в переменных (3.2) принимают вид

$$(3.4) \quad \tau = \varepsilon \mu \frac{\partial u_4}{\partial y_4} + \dots, -q = \frac{\varepsilon}{\Delta x^{1/3}} \frac{\mu}{Pr} \left[c_{\tau} \frac{\partial T_{40}}{\partial y_4} + \right. \\ \left. + Le \frac{\partial c_{40}}{\partial y_4} \left(\int_0^{T_{40}} (c_{p_1} - c_{p_2}) dT + h^0 \right) \right].$$

Введение новых переменных

$$(3.5) \quad x = \frac{x_4}{x^*}, n = \frac{1}{\eta^* (3x)^{1/2}} \int_0^{y_4} \rho_4 dy_4, \quad \psi_4 = \psi^* (3x)^{2/3} (\varphi + J_2),$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial y_4} = \rho_4 u_4, \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial x_4} = -\rho_4 v_4, \quad p_4 = p^* (3x)^{2/3} \gamma_2, \quad c_1 = c_{40}, \quad \bar{T}_1 = \frac{T_{40}}{T_{20}(0) [1 + c_{20}(0)]},$$

$$\eta^* = x^{*1/3} \rho_{20}^{1/3}(0) A_w^{-1/3}, \quad \psi^* = x^{*2/3} \rho_{20}^{-1/3}(0) A_w^{1/3}, \quad p^* = x^{*2/3} \rho_{20}^{-1/3}(0) A_w^{4/3}$$

и использование упрощающих допущений (2.24) позволяет свести краевую задачу (2.8), (2.9), (2.11)–(2.13), (2.15), (2.17) (с соответствующими изменениями для области 4) и (3.3) в частных производных к автомодельной

$$(3.6) \quad \frac{d^3 \varphi}{dn^3} + 2(\varphi + J_2) \frac{d^2 \varphi}{dn^2} - \left(\frac{d\varphi}{dn} + 2J \right) \frac{d\varphi}{dn} + 2T_1(1 + c_1) \varphi =$$

$$= J^2 - \frac{d}{dn} [T_1(1 + c_1)] - 2T_1(1 + c_1)(J_2 + \gamma_2),$$

$$\frac{1}{Sc} \frac{d^2 c_1}{dn^2} + 2(\varphi + J_2) \frac{dc_1}{dn} = 0, \quad \frac{1}{Pr} \frac{d^2 T_1}{dn^2} + 2(\varphi + J_2) \frac{dT_1}{dn} = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad d\varphi/dn = 0, \quad c_1 = 0, \quad T_1 = (1 + \alpha)/[1 + c_{20}(0)] \quad (n = 0),$$

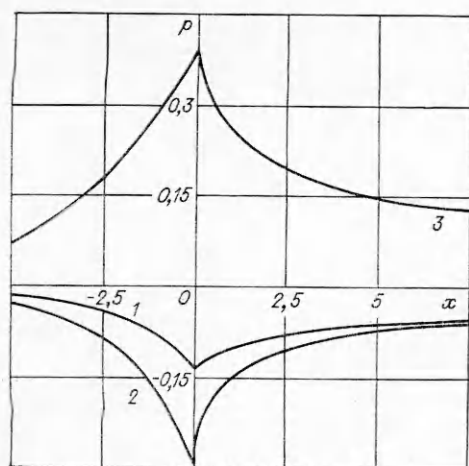
$$\varphi = \gamma_2, \quad d^2 \varphi/dn^2 = 0, \quad c_1 = c_{20}(0), \quad T_1 = 1/[1 + c_{20}(0)] \quad (n \rightarrow \infty),$$

где γ_2 — дополнительный неизвестный параметр, который находится из самого решения этой задачи. Очевидно, при $\varepsilon^\beta \sim \varepsilon/\Delta x^{1/3}$, $\varepsilon^{3/2} < \Delta x < \varepsilon^{3/4}$ решение краевой задачи (3.6) описывает асимптотическое поведение решения исходной неавтомодельной краевой задачи для области 4 при $c_{40}(x_4, 0) \rightarrow 0$, т. е. при $x_4 \rightarrow \infty$, а при $\varepsilon^\beta > \varepsilon/\Delta x^{1/3}$, $\varepsilon^{3/2} < \Delta x < \varepsilon^{3/4}$, т. е. при $c_{40}(x_4, 0) \equiv 0$, эти краевые задачи идентичны. В переменных (3.5) выражения (3.4) для τ и q принимают вид

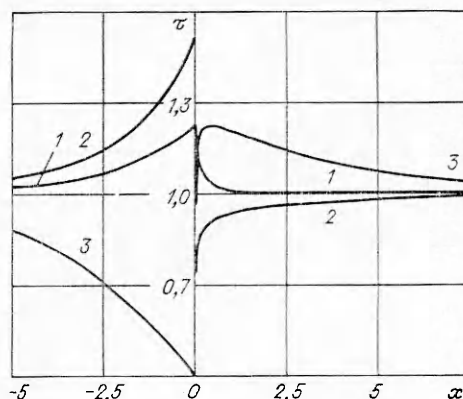
$$(3.7) \quad \tau = \frac{d^2 \varphi}{dn^2} + T_1(1 + c_1) + \dots, \quad -q = \frac{1}{(3x)^{1/3}} \left(\frac{dT_1}{dn} + \text{Le} E_1 \frac{dc_1}{dn} \right) + \dots$$

Здесь τ и q отнесены еще дополнительно к $\varepsilon A_w/\rho_{20}(0)$ и $(\varepsilon/\Delta x^{1/3})c_p T_{20}(0)[1 + c_{20}(0)]/Pr \eta^*$ соответственно. Формулы (3.7) определяют поведение решения краевой задачи (2.25) при $x \rightarrow +0$. Заметно функциональное сходство (3.5) и разложений, построенных в [6, 7] для малой окрестности за точкой разрыва каталитических свойств поверхности. Как отмечено выше, такая схема течения справедлива только для слабого разрыва свойств поверхности. В общем случае необходимо решать автомодельную краевую задачу (3.6), которая и определяет начальные условия для внутреннего слоя за точкой разрыва краевых условий.

Краевая задача (3.6) описывает скачкообразное изменение функций течения при переходе через точку разрыва краевых условий на поверхности пластины. Для исследования еще меньшей, чем области 3 и 4, окрестности точки разрыва, согласно методу сращиваемых асимптотических разложений [12], необходимо рассмотреть область, характерные протяженность и толщина которой одинаковы по порядку величины — $\Delta x \sim \Delta y$. Оценки (1.1) показывают, что в этом случае $\Delta x \sim \Delta y \sim O(\varepsilon^{3/2})$, $u \sim v \sim O(\varepsilon^{1/2})$, $\Delta p \sim O(\varepsilon)$ и течение описывается полной системой уравнений Навье — Стокса и уравнением сохранения массовой концентрации атомов при переменной плотности. Только в этой области станет существенна продольная диффузия, т. е. появится член $\sim \partial^2 c/\partial x^2$. Однако здесь уже не будут выполняться условия прилипания на поверхности пластины, так как из-за конечного возмущения температуры или массовой концентрации атомов $\Delta T \sim T \sim \Delta c \sim c \sim O(1)$ возникнет скорость скольжения $U \sim \varepsilon^2 \partial T/\partial x \sim O(\varepsilon^{1/2})$, соизмеримая со скоростью потока газа. Кроме того, будут существенны и другие эффекты молекуляр-



Р и с. 1



Р и с. 2

ной газовой динамики [19]. Следовательно, учет продольной диффузии, как это сделано в [8—11], оправдан только при слабых разрывах свойств поверхности пластины.

4. При численном интегрировании краевой задачи (2.25) из-за взаимодействия течений в областях 3 и 1 нужно определять индуцированное давление в процессе счета. Учет взаимодействия придает задаче свойство слабой эллиптичности [13], и для получения единственного решения необходимо задание дополнительного краевого условия при $x \rightarrow \infty$ (из вида переменных (2.27) вытекает, что $p \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$). Кроме того, из-за разрыва внутренних краевых условий при $x = 0$ в расчетной области для $x > 0$ надо ввести подобласть около поверхности пластины и построить специальную процедуру вычислений в двух областях [20, 21].

Численные расчеты краевой задачи (2.25) выполнены при определяющих параметрах подобия:

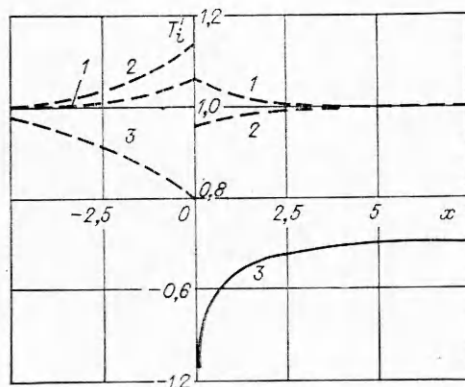
- 1) $F = 1/\sqrt{2}, \alpha = 0, c_{20}(0) = 1;$
- 2) $F \rightarrow \infty, \alpha = 0, c_{20}(0) = 1;$
- 3) $F = 0, \alpha = 1, c_{20}(0) = 1.$

При постоянной температуре поверхности пластины (варианты 1 и 2) уменьшение концентрации атомов вблизи каталитической поверхности вызывает увеличение плотности и смещение линий тока к поверхности пластины, т. е. при этом образуется эффективная впадина и реализуется течение разрежения. Возрастание температуры поверхности вызывает, наоборот, уменьшение плотности газа и смещение линий тока вверх от пластины (вариант 3). В этом случае обтекается эффективный выступ и реализуется течение сжатия.

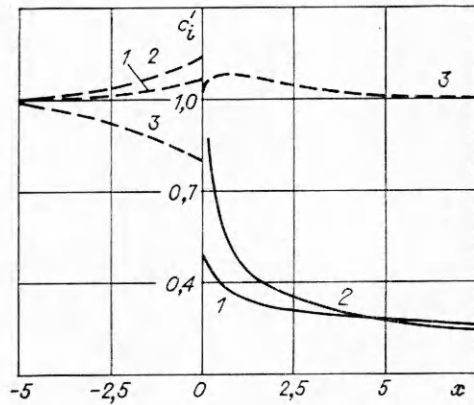
На рис. 1—4 линии 1—3 отвечают номерам вариантов. Поведение решения краевой задачи (2.25) при $x \rightarrow -\infty$ изучалось в [13], при $x \rightarrow -0$ все функции течения изменяются неособым образом и принимают конечные значения.

На рис. 1 представлены распределения индуцированного давления p . Характер изменения давления при $x \rightarrow +0$ определяется формулой (3.5), численное решение краевой задачи (3.6) позволяет найти значения неизвестного параметра $\gamma_2 = 0,22912$ и $-0,46593$ для вариантов 2 и 3 соответственно. При $x \rightarrow \infty$ распределение возмущения давления описывается формулой (2.27) ($p = -d'$), из численного решения краевой задачи (2.28) для вариантов 2 и 3 получаются значения неизвестного параметра $\gamma_1 = 0,46094$ и $-0,81717$.

Распределения напряжения трения τ вдоль поверхности пластины представлены на рис. 2. В случае течения разрежения (кривые 1, 2) τ перед точкой разрыва краевых условий возрастает, а при течении сжатия



Р и с. 3



Р и с. 4

(кривая 3) — падает. Решение локальной краевой задачи (3.6) дает при $x \rightarrow +0$ обтекание эффективной впадины (варианты 1, 2) или выпуклости (вариант 3) сдвиговым дозвуковым потоком с переменной плотностью. Поэтому в первом случае τ резко уменьшается при $x \rightarrow +0$ и возрастает во втором. Для варианта 1 распределение τ непрерывное, для вариантов 2 и 3 решение краевой задачи (3.6) дает при $x \rightarrow +0$ напряжения трения при $\tau = 0,720$ и $0,964$ соответственно. Эти значения хорошо согласуются с результатами интегрирования краевой задачи (2.25). При $x \rightarrow \infty$ напряжение трения стремится к своему значению в невозмущенном пограничном слое на пластине перед окрестностью точки разрыва краевых условий ($\tau \rightarrow 1$).

Анализ поведения кривой 2 показывает, что максимально возможному скачкообразному повышению каталитической активности поверхности отвечает возрастание напряжения трения в $\approx 1,5$ раза при $x \rightarrow -0$. Скачкообразное повышение температуры поверхности в 2 раза снижает τ до 0,4 при $x \rightarrow -0$ (кривая 3), повышение температуры в $\approx 3,87$ раза приводит к зарождению отрыва пограничного слоя [16].

На рис. 3 и 4 представлены распределения нормальных градиентов температуры T_i' и массовой концентрации атомов c_i' по поверхности пластины ($i = 1$ — сплошные линии, $i = 2$ — штриховые). Видно, что скачкообразное повышение каталитической активности поверхности пластины лишь незначительно изменяет нормальный градиент температуры T_2' (кривые 1, 2). Скачкообразное повышение температуры поверхности в 2 раза на $\approx 20\%$ уменьшает T_2' при $x \rightarrow -0$ (штриховая кривая 3). При $x > 0$ сильно нагретая поверхность охлаждается набегающим потоком, здесь нормальный градиент температуры изменяется по порядку величины и $T_1' < 0$ (сплошная кривая 3). При $x \rightarrow \infty$ возмущения от скачкообразного изменения свойств поверхности затухают и $T_1' \rightarrow 0$, $T_2' \rightarrow 1$.

Распределения c_2' при $x \leq 0$ схожи с распределениями τ или T_2' для соответствующих вариантов (штриховые линии 1—3 на рис. 4). Скачкообразный рост каталитической активности поверхности при $x > 0$ повышает нормальный градиент массовой концентрации атомов по порядку величины (сплошные линии 1, 2, формула (2.22)). Скачкообразное повышение температуры поверхности в 2 раза лишь незначительно изменяет распределение величины c_2' (линия 3), при $x \rightarrow \infty$ $c_1' \rightarrow 0$, $c_2' \rightarrow 1$.

Качественное сходство результатов настоящих расчетов с приведенными в [6, 7], например, вытекает из функционального сходства представления решений. Количественное сравнение их невозможно, так как в расчетах использовались разные начальные условия и продольные масштабы.

Авторы выражают признательность О. Г. Фридлендеру за полезные консультации.

