УДК 517.958.532

ДВУХЖИДКОСТНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

В. Н. Монахов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучаются плоские стационарные задачи фильтрации жидкости, имеющей неизвестные контактные (свободные) границы с неподвижными жидкостями другой плотности (вода — воздух, соленые и пресные воды). Рассмотрены различные прикладные задачи подобного типа, возникающие, например, при описании процесса фильтрации в водоносном пласте пресной воды, граничащей с морскими или солеными грунтовыми водами: задачи о линзе пресных вод, конусе подошвенных вод вблизи несовершенной скважины, равновесии двух контактных границ при выходе их на дренаж и др. Доказана однозначная разрешимость широкого класса контактных задач фильтрации жидкостей различной плотности в пористых каналах, известные части границ которых являются конечными или бесконечными полигонами.

При изучении рассмотренных ниже задач теории фильтрации в прямой постановке относительно входящих в них параметров (физических и геометрических) обнаруживаются новые качественные свойства решений этих задач.

В монографии [1] впервые предложен алгоритмичный метод доказательства разрешимости функциональных уравнений относительно таких параметров фильтрационных потоков со свободными (неизвестными) границами, развитый в [2–5].

1. Постановка контактных задач теории фильтрации. Уравнения фильтрации имеют вид [6, с. 47]

$$\boldsymbol{v} = k\nabla\varphi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad -\varphi = p/(\rho g) + x. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = (u, v)$ — вектор скорости фильтрации ($|\boldsymbol{v}|$ — расход); $-\varphi$ — пьезометрический напор (φ — потенциал фильтрации); p и ρ — давление и плотность жидкости соответственно; вектор $\boldsymbol{g} = (-g, 0)$ ускорения силы тяжести направлен противоположно оси Ox, перпендикулярной основному потоку жидкости; $k = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент фильтрации. Уравнение неразрывности потока $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ в (1) позволяет ввести функцию тока течения $\psi(x, y)$: $k\psi_y = u$, $-k\psi_x = v$. Таким образом, стационарные плоские фильтрационные течения в однородных ($k = \mathrm{const}$) пористых средах описываются аналитической функцией $w(z) = \varphi + i\psi$ — комплексным потенциалом фильтрации, $z = x + iy$.

Рассмотрим область $D = D(\rho_1)$ фильтрационного течения жидкости с плотностью $\rho = \rho_1$, ограниченную заданным конечным или бесконечным полигоном P и неизвестными кривыми — свободной границей L (контактной границей вода — воздух) и линией раздела Γ пресных и соленых вод. В свою очередь полигон P включает участки P^k, граничащие с неподвижной жидкостью той же плотности $\rho = \rho_1$, и на P^k задано $\varphi = \mathrm{const}$, непроницаемые участки P^j (водоупоры), характеризующиеся условием $\psi = \mathrm{const}$, а в некоторых

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00622) и Министерства образования Российской Федерации (грант № E00-4.0-65).

задачах и вертикальные линии симметрии потока P^s: $y = \text{const}$ с условием на них $v = 0$ $(\boldsymbol{v} = (u, v))$.

При $z \in P^s$ имеем $v = -k\psi_x = 0$, откуда $\psi_x = 0$, и тем самым P^s является линией тока $\psi = \text{const}$.

Свободная граница L есть линия тока $\psi = \text{const}$, и на ней давление постоянно ($p = \text{const}$), что влечет за собой выполнение условия $\varphi + x = \text{const}$. Линия раздела Γ пресных и соленых вод также есть линия тока $\psi = \text{const}$, на которой давления $p_k = -g\rho_k(\varphi_k + x)$, $k = 1, 2$ совпадают, что приводит к соотношению

$$\varphi - \lambda x = (\rho_2/\rho_1)\varphi_2 = \text{const}, \qquad \lambda = \rho_2/\rho_1 - 1 > 0, \qquad z \in \Gamma. \tag{2}$$

Краевые условия для $w(z)$ на $\partial D = P \cup L \cup \Gamma$ определяют в плоскости $w = \varphi + i\psi$ комплексного потенциала границу области D^*, состоящую из отрезков прямых $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$. При этом в зависимости от схемы течения внутренние углы $\gamma_k\pi$ в вершинах w_k многоугольника ∂D^* принимают одно из значений: $\gamma_k\pi = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ в конечных и $\gamma_k\pi = 0,\ -\pi$ в бесконечных вершинах w_k.

2. Представление конформных отображений. Проблема параметров. Построим конформные отображения w: $E \to D^*$, z: $E \to D$ верхней полуплоскости E: $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на области D^* и D. Пусть $z_k \in P$, $k = \overline{0, n+1}$ — вершины полигона P и t_k $(t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1})$ — их прообразы на вещественной оси ∂E $(z_k = z(t_k))$, $\alpha_k\pi$ — внутренние углы в этих вершинах, $l_k = |z_k - z_{k-1}|$ — длины конечных звеньев $P_k \subset P$ с концами в точках $z_k,\ z_{k-1}$ $\big(P = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k\big)$.

Из условия $\varphi + x = \text{const}$ на свободной границе L находим $dx/dt = -d\varphi/dt = |dw/dt|$. Аналогично из соотношения (2) на Γ получим $dx/dt = \lambda^{-1}|dw/dt|$. В изучаемых далее задачах свободная граница L присутствует только вместе с линией раздела Γ, при этом L и Γ выходят на горизонтальный дренаж P^j: $x = \text{const}$, и на нем $dx/dt = 0$.

Итак, при $t \bar{\in} (t_0, t_{n+1})$, т. е. на прообразе контактной границы $S = L \cup \Gamma \cup P^j$ известна функция dx/dt. Тогда для определения производной $dz/d\zeta$ получим краевую задачу

$$\arg\frac{dz}{dt} = \delta_k\pi, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]; \qquad \frac{dx}{dt} = q(t)\left|\frac{dw}{dt}\right|, \quad t \bar{\in} (t_0, t_{n+1}). \tag{3}$$

Здесь $\delta_k\pi$ — угол звена $P_k \subset P$ с осью Ox; $q(t) = 1$ при $t \in L_*$, $q(t) = \lambda^{-1}$ при $t \in \Gamma_*$ и $q(t) = 0$ при $t \in P_*^j$; L_*, Γ_* и P_*^j — прообразы L, Γ и P^j $(L = z(L_*), \ldots)$.

Каноническим решением однородной задачи (3) в нужном классе аналитических функций является производная

$$\frac{dZ}{d\zeta} = C\prod_{k=0}^{n+1}(\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1} \equiv C\Pi(\zeta), \qquad C = \text{const} \tag{4}$$

конформного отображения Z: $E \to D(\bar{P})$ верхней полуплоскости E на область $D(\bar{P})$, ограниченную многоугольником $\bar{P} = P \cup P_0 \cup P_{n+2} = \bigcup\limits_{k=0}^{n+2} P_k$, где P_0 и P_{n+2} — бесконечные лучи с концами в точках z_0 и z_{n+1}. Записывая стандартным образом решение неоднородной задачи (3) через решение однородной (4), приходим к следующим представлениям для производных $dw/d\zeta$ и $dz/d\zeta$:

$$\frac{dw}{d\zeta} = K\mathrm{e}^{i\beta\pi}\prod_k(\zeta-\tau_k)^{\gamma_k-1} \equiv \Pi_0(\zeta), \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta)M(\zeta),$$
$$\Pi(\zeta) = \prod_{k=0}^{n+1}(\zeta-t_k)^{\alpha_k-1}, \qquad M(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{S_*}\frac{q(t)|\Pi_0(t)|}{\Pi(t)(t-\zeta)}\,dt \quad (S = z(S_*)), \tag{5}$$

где τ_k — прообразы вершин w_k многоугольника ∂D^*, совпадающие с частью параметров t_j.

Каждому подставленному в (5) вектору $T = (t_1,\dots,t_n)$ ($K = 1$, $t_0 = -1$, $t_{n+1} = 1$ фиксированы) отвечает некоторый полигон $P(T)$ со звеньями $P_k(T)$, параллельными $P_k \subset P$. Искомые постоянные t_k, $k = \overline{1,n}$ должны определяться из условий совпадения $P(T)$ с заданным полигоном P. Систему уравнений относительно t_k составим для общего случая области фильтрации D, когда на P имеется две бесконечных вершины $z_s = \infty$ и $z_m = \infty$, $0 \leqslant s < m \leqslant n+1$ соответственно вверх и вниз по потоку.

На каждом из бесконечных звеньев P_k, P_{k+1}, $k = s, m$, примыкающих к вершинам $z_s = z_m = \infty$, зафиксируем по две различных точки, включив их в число вершин P с углами при них, равными π.

Искомые постоянные t_k, $k = \overline{1,n}$ находятся из следующей системы уравнений:

$$l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|\Pi(t)M(t)|\,dt, \qquad k = \overline{1,n+1}, \quad k \neq s, s+1, m, m+1,$$
$$l_s + il_{s+1} = \int\limits_{t_0}^{t_{s+1}}\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta, \qquad l_m = \mathrm{Im}\int\limits_{t_0}^{t_{m+1}}\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta. \tag{6}$$

Здесь $l_k = |z_k - z_{k-1}|$ — заданные длины конечных звеньев $P_k \subset P$; $l_s + il_{s+1} = z_{s+1}$; $l_m = \mathrm{Im}\, z_{m+1}$; $z_0 = z(t_0) = 0$.

Любые два из трех последних уравнений в (6) можно заменить соотношениями для заданных конечных глубин H_s, H_m потока в окрестности z_s, z_m :

$$H_k = \pi\Big|\frac{dz}{d\zeta}(\zeta - t_k)\Big|_{\zeta=t_k}, \quad k = s, m.$$

Исследование контактных задач фильтрации проводится методом непрерывности, заключающимся в переходе от простых задач, для которых известна однозначная разрешимость системы уравнений (6) относительно параметров, к более сложным путем деформации полигональных границ области D [1, 2]. Рассмотрим ряд таких начальных задач, представляющих и самостоятельный интерес. На рис. 1 [7, с. 287] изображены различные формы контактной поверхности в прибрежных водоносных пластах. Когда линия раздела пересекается с водоупором, область, занятая солеными водами, приобретает форму клина (рис. 1,*а,б*). На рис. 1,*в,г* показана линза пресной воды, плавающая на соленой воде.

3. Контактная граница пресных и соленых вод под дамбой. На рис. 2,*а* изображена схема фильтрации жидкости в области $D = D(\rho_1)$ под узкой дамбой, моделируемой отрезком прямой Ox, при наличии неподвижного подстилающего слоя $D(\rho_2)$, $\rho_2 > \rho_1$ соленых грунтовых вод [6, с. 333].

Предполагается, что на проницаемых участках ∂D $y > 0$, $y < 0$ заданы напоры $\varphi = H/2$ и $\varphi = -H/2$ соответственно ($\varphi \equiv \varphi_1$ в $D = D(\rho_1)$), а неизвестная граница $\Gamma = D(\rho_1) \cap D(\rho_2)$ раздела пресной и соленой жидкостей является линией тока $\psi = 0$. Равенство давлений $p_k = -g\rho_k(\varphi_k + x)$, $k = 1, 2$ на Γ приводит к граничному условию (2).

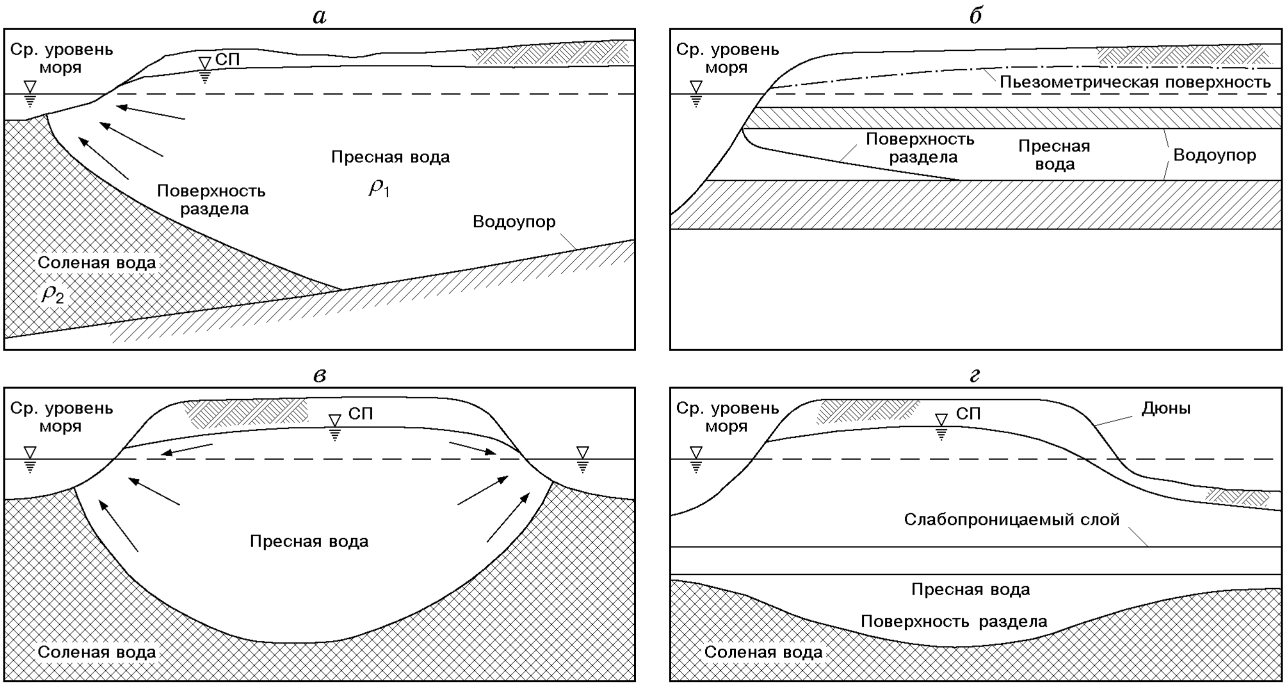

Рис. 1. Схемы прибрежных потоков (СП — свободная поверхность):
а — безнапорный горизонт; *б* — напорный горизонт; *в* — океанический остров; *г* — голландский тип

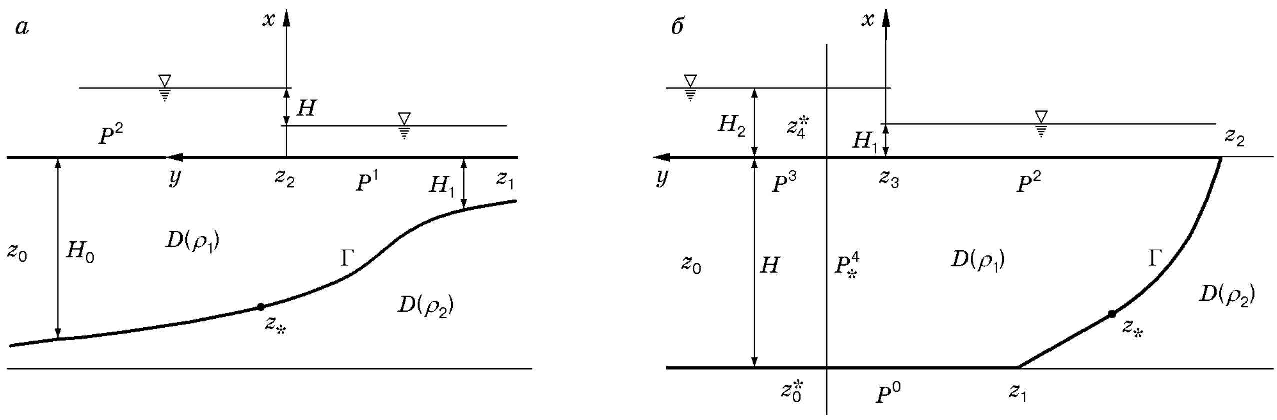

Рис. 2. Схемы течений:
а — под узкой дамбой; *б* — в водоносном пласте

Для производных конформных отображений w: $E \to D^*$ и z: $E \to D$ выполняются аналоги представлений (5)

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{H}{\pi}(1-\zeta^2)^{-1/2}, \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \lambda_0 \Pi(\zeta)[M(\zeta) + iC],$$

$$\Pi(\zeta) = (1-\zeta^2)^{-1}, \qquad M(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{1/2}}{t-\zeta}\,dt, \qquad \lambda_0 = \frac{H}{\pi\lambda}. \tag{7}$$

Искомая вещественная постоянная C должна определяться из уравнения для заданной глубины H_0 в нижнем бьефе $z_0 = \infty$:

$$\Big|\frac{dz}{d\zeta}(\zeta+1)\Big|_{\zeta=-1} = \frac{H_0}{\pi}.$$

Отметим, что при $C = 0$ производная $dz/d\zeta$ в (7) имеет порядок ζ^{-3} в окрестности точки $\zeta = \infty$, и тем самым нарушается конформность отображения z: $E \to D$ в этой точке.

Интеграл типа Коши $M(\zeta)$ в (7) удовлетворяет условиям $\mathrm{Re}\, M(t) = (1-t^2)^{1/2}$, $|t| \leqslant 1$; $\mathrm{Re}\, M(t) = 0$, $|t| > 1$, которым, очевидно, подчиняется и функция $M_0(\zeta) = (1-\zeta^2)^{1/2} - i(1+\zeta^2)^{1/2}$. Поскольку порядки при $\zeta \to \infty$ функций $M(\zeta)$ и $M_0(\zeta)$ совпадают, $M(\zeta) = M_0(\zeta)$. Подставляя значение $M(\zeta)$ в (7), находим

$$\frac{dz}{d\zeta} = i\lambda_0(1-\zeta^2)^{-1}[N(\zeta)+C], \qquad N = -\frac{2}{\sqrt{\zeta^2-1}+\sqrt{\zeta^2+1}}. \tag{8}$$

Сохранение ориентации конформного отображения z: $E \to D$ и его невырожденности ($dz/dt \neq 0$, $|t| < \infty$) приводят к условию $N(t) + C < 0$, $|t| > 1$, которое выполняется только при $C < -1$. С учетом этого из уравнения для H_0 однозначно определяется постоянная $C = -(2\lambda H/H_1 + 1)$.

Замечание 1. При принятой выше нормировке отображения z: $E \to D$, использованной в [6], функция $\Pi(\zeta)$ имела второй порядок ζ^{-2} при $\zeta \to \infty$, что привело к изменению представления (5) для $dz/d\zeta$. Пусть теперь $t_1 = -1$, $t_0 = 1$, и тем самым прообразом Γ является Γ_*: $|t| > 1$. При этом представление $dw/d\zeta = (H/\pi)(1-\zeta^2)^{-1/2}$ сохраняется, а $\Pi(\zeta)$ и $M(\zeta)$ записываются в форме (5)

$$\Pi(\zeta) = (\zeta-1)^{-1}, \qquad M(\zeta) = \frac{\lambda_0}{\pi i}\int\limits_{|t|>1}\Big(\frac{t-1}{t+1}\Big)^{1/2}\frac{dt}{t-\zeta}.$$

4. Поверхность раздела в прибрежном напорном водоносном пласте. Схема фильтрации изображена на рис. 2,*б* [7, с. 283]. В области $D = D(\rho_1)$ происходит фильтрация пресной воды плотности ρ_1, а область $D(\rho_2)$ занята неподвижной соленой (морской) водой плотности $\rho_2 > \rho_1$. Полупрямые

$$P^k = \{z \mid \mathrm{Re}\,(z-z_k) = 0,\ \mathrm{Im}\,(z-z_k) > 0\}, \quad k = 1,3 \quad (P^1 \equiv P^0)$$

являются водоупорами, т. е. линиями тока $\psi = \psi_k = \mathrm{const}$ $(\psi_0 = 0, \psi_3 = Q)$. На неизвестной линии раздела Γ, как и в задаче, рассмотренной в п. **3**, выполняются условия $\psi = 0$, $\varphi = \lambda x + \varphi_*$, $\lambda = \rho_2/\rho_1 - 1$. Участок $P^2 = \{z \mid x = 0,\ y_2 < y < 0\}$ морского дна есть эквипотенциаль $\varphi = 0$. Из условий $\varphi = 0$ и $\varphi = \lambda x + \varphi_*$ в точке $z_2 = P^2 \cap \Gamma$ находим $\varphi_* = 0$. Тогда в точке $z_1 \in \Gamma$ имеем $w_1 = \varphi_1 = \lambda x_1 = -\lambda H$.

Производные конформных отображений w: $E \to D^*$ и z: $E \to D$ представим в форме (5), где $\Pi_0(\zeta) = K(\zeta-t_0)^{-1}[(\zeta-t_2)(\zeta-t_3)]^{-1/2}$, $K > 0$, $\Pi(\zeta) = (\zeta-t_0)^{-1}$, $S_* = \Gamma_*$ ($\Gamma = z(\Gamma_*)$). Постоянные t_1, t_2 и $K = 1$ зафиксируем, а искомые параметры t_0, t_3 определим из уравнений

$$\lambda H = \int\limits_{\Gamma_*}|\Pi_0(t)|\,dt, \qquad l = |z_3 - z_2| = \int\limits_{t_2}^{t_3}|\Pi(t)|\,|M(t)|\,dt,$$

в которых H и l заданы.

После нахождения t_0, t_3 может быть вычислен расход Q: $Q = \pi\big|\Pi_0(\zeta)(\zeta-t_0)\big|_{\zeta=t_0}$.

Если постоянную t_3 также зафиксировать, то постоянная t_0 может быть найдена из условия

$$H\lambda = \int\limits_{\Gamma_*} |\Pi_0(t)|\,dt \equiv \Phi(t_0) \qquad \Bigl(\int\limits_{\Gamma_*} = \int\limits_{t_1}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{t_2}\Bigr). \tag{9}$$

В этом случае длина $l = |z_3 - z_2|$ заранее не задается, а определяется вместе с расходом Q после нахождения t_0. Пусть для определенности $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_1 = 1$.

С помощью замены переменной $t = -\tau$ в интеграле по полупрямой $-\infty < t < t_2 = -1$ функция $\Phi(t_0)$ в (9) преобразуется к виду

$$\Phi(t_0) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\Bigl(\frac{1}{(t-t_0)\sqrt{t+1}} - \frac{1}{(t+t_0)\sqrt{t-1}}\Bigr)\,dt \equiv \int\limits_1^{\infty} \sigma(t_0,t)\,dt.$$

При $t_0 \in [0,1]$ $\partial\sigma/\partial t_0 > 0$, $\sigma(0,t) < 0$, при $t_0 \to 1$ $\sigma(t_0,t) \to +\infty$. Следовательно, существует единственное значение $t_0 \in (0,1)$, для которого выполняется соотношение (9).

5. Конечный водоносный пласт. Рассмотрим схему фильтрации, изображенную на рис. 2,*б* ($z_0^* = z_0$, $z_4^* = z_4$, $P_*^4 = P^4$), когда водоносный пласт, в отличие от случая, изученного в п. **4**, имеет конечные размеры [8, с. 285].

На контуре питания $P^4 = \{z \mid -H < x < 0,\ y = y_0\}$ — границе неподвижных и движущихся пресных вод — принимается $\varphi\big|_{P^4} = \varphi_0 = 0$ $(\varphi_k = \operatorname{Re} w_k,\ k = \overline{0,4})$.

На линии $P^2 = \{z \mid x = 0,\ y_2 < y < 0\}$ оттока пресных вод — горизонтальном промежутке высачивания — имеем $\varphi\big|_{P^2} = \varphi_2 = H_2 - \bar H_1$, где $\bar H_1 = H_1\rho_2/\rho_1$ — потенциал пресной воды по отношению к соленой, и с учетом схемы вытеснения $H_2 > \bar H_1$.

Водоупоры P^0 и P^3 являются линиями тока $\psi = 0$ и $\psi = Q$. Неизвестная граница Γ раздела пресных и соленых вод характеризуется условиями $\psi = 0$, $\varphi = \lambda x + \varphi_2$, откуда необходимо, чтобы $\varphi_1 = \varphi_2 - \lambda H > 0$.

Представления (5) для $dw/d\zeta$ и $dz/d\zeta$ принимают вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = iK\prod_{k\ne 1}(\zeta - t_k)^{-1/2} \equiv \Pi_0(\zeta), \quad K > 0, \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta)M(\zeta),$$
$$M(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{S_*} \frac{q(t)|\Pi_0(t)|}{\Pi(t)(t-\zeta)}\,dt, \tag{10}$$

где $S_* = \Gamma_*$ $(\Gamma = z(\Gamma_*))$; $\Pi(\zeta) = [(\zeta - t_0)(\zeta - t_4)]^{-1/2}$; $q = \lambda^{-1}$. Зафиксируем постоянные $t_0 = 0$, $t_k = k - 1$ $(k = 2,3,4)$, а неизвестные параметры K и t_1 найдем из системы уравнений

$$\varphi_k = \int\limits_{t_0}^{t_k} |\Pi_0(t)|\,dt, \qquad k = 1,2, \tag{11}$$

где φ_1, φ_2 вычислены выше.

В интеграле для φ_1 произведем замену переменных $t = st_1$, представляя его в виде

$$K^{-1}\varphi_1 = t_1^{1/2}\int\limits_0^1 s^{-1/2}\prod_{k=2}^{4}(t_k - st_1)^{-1/2}\,ds \equiv \varphi(t_1),$$

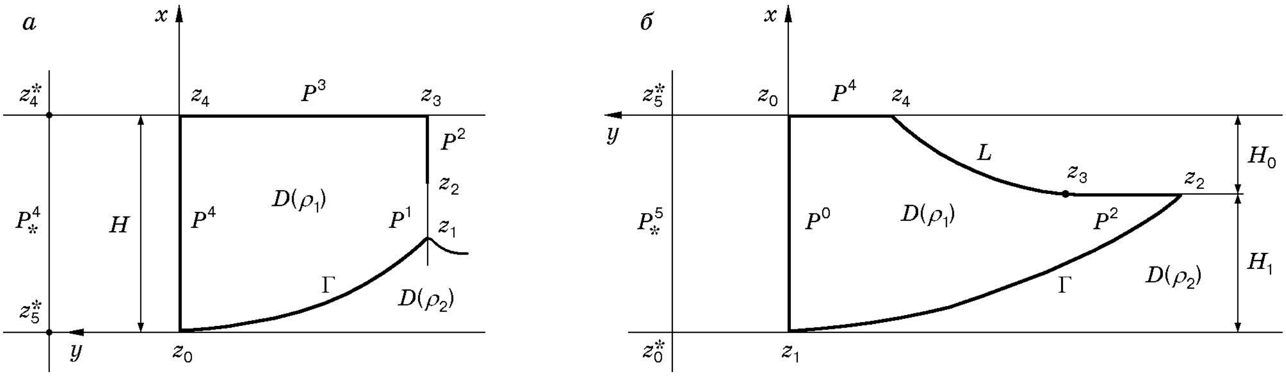

Рис. 3. Схемы фильтрации:
а — конус подошвенных вод; *б* — линза пресных вод

а из второго уравнения в (11) вычислим $K = [\varphi(1)]^{-1}\varphi_2$. Рассмотрим отношение $\varphi_1/\varphi_2 = \varphi(t_1)/\varphi(1) \equiv \Phi(t_1)$ и заметим, что $d\Phi/dt_1 > 0$, $t_1 \in (0,1)$ и $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = \infty$. Следовательно, для любых φ_1, φ_2 $(0 < \varphi_1 < \varphi_2)$ существует единственное значение $t_1 \in (0,1)$, при котором выполняется равенство $\varphi_1 = \varphi_2\Phi(t_1)$.

Итак, установлена однозначная разрешимость системы уравнений (11) относительно K и t_1.

По известным значениям t_k, $k = \overline{0,4}$ и K теперь определяются расход $Q = |w_4 - w_0|$ и координаты всех точек $z_k \in \partial D$, $k = \overline{0,4}$.

6. Конус подошвенных вод. Рассмотрим изображенную на рис. 3,*а* схему притока пресной воды к несовершенной скважине, симметрично расположенной в водоносном пласте, подстилаемом солеными грунтовыми водами [7, с. 293; 9, с. 202].

На контуре питания $P^4 = \{z \mid y = 0,\ 0 < x < H\}$ принимается $\varphi\big|_{P^4} = 0$. Кровля пласта $P^3 = \{z \mid x = H,\ -l < y < 0\}$ считается непроницаемой $(\psi\big|_{P^3} = Q)$. На скважине $P^2 = \{z \mid x_2 < x < H,\ y = -l\}$, расположенной на оси симметрии $y = -l$, задано условие

$$\varphi\big|_{P^2} = \varphi_2 > \varphi_1 = \lambda x_1 \qquad (\varphi_k = \operatorname{Re} w_k,\ k = \overline{0,4}).$$

На не вскрытом скважиной участке $P^1 = \{z \mid x_1 < x < x_2,\ y = -l\}$ оси симметрии проекция v вектора скорости фильтрации $\boldsymbol{v} = (u, v)$ равна нулю $(\boldsymbol{v} = 0)$, и тем самым $\psi = \mathrm{const}$. Неизвестная линия Γ раздела движущихся пресных и неподвижных соленых вод является линией тока $\psi\big|_{\Gamma} = 0$, и на ней дополнительно выполняется условие равновесия давлений $\varphi\big|_{\Gamma} = \lambda x$. При этом $\psi = 0$ на всей линии $(P^1 \cup \Gamma)$. Производные $dz/d\zeta$ и $dw/d\zeta$ представляются в форме (10), где

$$S_* = \Gamma_* \quad (\Gamma = z(\Gamma_*)), \qquad \Pi = \prod_k (\zeta - t_k)^{-1/2}(t_1 - \zeta)^{1/2} \quad (k = 0, 3, 4), \qquad q = \lambda^{-1}.$$

Как и в п. **5**, константы t_0, t_2, t_3, t_4 фиксируются, а неизвестные постоянные K, t_1 находятся из однозначно разрешимой системы уравнений (11).

Замечание 2. На рис. 3,*а* изображена также более общая схема фильтрации пресных и соленых вод вблизи несовершенной скважины, изучение которой проводится аналогично рассмотренной выше $(z_4^* = z_4,\ z_5^* = z_5,\ P_*^4 = P^4)$.

7. Линза пресных вод. 7.1. *Симметричный поток.* Предполагается, что поверхность раздела пресных и соленых вод и избыточный поток пресных вод, направленный в сторону моря, находятся в равновесии, что приводит к образованию устойчивой линзы пресных вод, плавающей на соленых водах [6, с. 334–338; 7, с. 287–301]. Поверхность стока пресных вод в море моделируется горизонтальным дренажем. Половина такого симметричного потока пресных вод в прибрежном водоносном пласте изображена на рис. 3,*б*. Здесь L — свободная граница (контакта вода — воздух), на которой выполняются условия $\psi = Q$ (Q — искомый расход пресной воды) и $\varphi + x = 0$, а $\varGamma$ — линия раздела (контакта пресных и соленых вод), характеризуемая условиями $\psi = 0$ и $\varphi = \lambda x + \varphi_*$, $\varphi_* = \mathrm{const}$.

На поверхности инфильтрации или на дне пресноводного бассейна малой глубины, моделируемых отрезком $P^4 = \{z \mid x = 0,\ y_4 < y < 0\}$, полагается $\varphi = 0$, а на линии $P^2 = \{z \mid x = -H_0,\ y_2 < y < y_3\}$ стока пресных вод $\varphi = H_0$ $(x = -H_0$ — уровень моря). Линия симметрии $P^0 = \{z \mid -H_0 - H_1 < x < 0,\ y = 0\}$ является линией тока $\psi = 0$.

В точке $z_2 = \varGamma \cap P^2$ $H_0 = -\lambda H_0 + \varphi_*$, откуда $\varphi_* = (1+\lambda)H_0$. Тогда в точке $z_1 = \varGamma \cap P^0$ $\varphi_1 = H_0 - \lambda H_1$, $\varphi_0 = 0 < \varphi_1 < H_0 = \varphi_2$ $(\varphi_k = \mathrm{Re}\, w_k)$. Последние неравенства приводят к следующему условию: $H_1/H_0 < \lambda^{-1}$, обеспечивающему направление движения пресных вод в сторону моря.

Производные $dw/d\zeta$ и $dz/d\zeta$ представляются в форме (10), где $\Pi = [(\zeta - t_0)(\zeta - t_1)]^{-1/2}$. Постоянные t_0, t_2, t_3, t_4 фиксированы, а K и t_1 однозначно определяются из системы уравнений (11) (см. п. **5**).

Более общий вариант симметричного потока соответствует схеме, приведенной на рис. 3,*б*, в которой нужно положить $z_4 = 0$, $z_5^* = z_5$, $z_0^* = z_0$, $P_*^5 = P^5$ и $P^0 = \{z \mid x = -H,\ y_1 < y < y_0\}$, $H = H_0 + H_1$.

Отрезок $P^5 = \{z \mid -H < x < 0,\ y = y_5 > 0\}$ является линией симметрии, и тем самым $\psi = 0$ на $P^0 \cup P^5$. На линии питания $P^4 = \{z \mid x = 0,\ 0 < y < y_5\}$ полагается $\varphi = 0$. В представлении (10)

$$\frac{dw}{d\zeta} = \Pi_0(\zeta) = K\mathrm{e}^{i\beta\pi}\prod_{k=2}^{5}(\zeta - t_k)^{-1/2}, \qquad \Pi(\zeta) = [(\zeta - t_0)(\zeta - t_5)]^{-1/2}.$$

Как и в предыдущем случае, постоянные t_k, $k = \overline{2,5}$ $(-\infty < t_5 < t_0 < t_1 < \ldots < t_4 < \infty)$ задаются, а параметры K и t_1 находятся однозначно из системы уравнений (11), в которой интегралы вычисляются по интервалу (t_5, t_k), $k = 1, 2$, поэтому неизвестный параметр t_0 в (11) не входит.

7.2. *Общий случай.* На рис. 3,*б* изображена несимметричная схема фильтрации пресных вод в прибрежном водоносном пласте ($z_0^* = z_0$, $z_5^* = z_5$, $P_*^5 = P^5$), где полигон $P^4 \cup P^5$ является контуром питания $\varphi = 0$ либо P^4: $\psi = Q$, а P^5: $\varphi = 0$. Остановимся, например, на первом варианте. В этом случае в представлении (10) имеем

$$\frac{dw}{d\zeta} = K\mathrm{e}^{i\beta\pi}\prod_{k=2}^{4}(\zeta - t_k)^{-1/2}(\zeta - t_0)^{-1/2} \equiv \Pi_0(\zeta), \qquad \Pi(\zeta) = [(\zeta - t_0)(\zeta - t_5)]^{-1/2}.$$

Положим $t_3 = -1$, $t_4 = 0$, $t_0 = 1$, $t_2 = 2$, а параметры K и t_1 однозначно определим из системы уравнений (11) (см. п. **5**).

Замечание 3. В общем варианте симметричного потока (см. подп. 7.1) остался неизвестным параметр $t_0 \in (t_5, t_1)$, а в несимметричной схеме (см. подп. 7.2) — параметр $t_5 \in (0, 1)$. Эти параметры можно, например, определить из уравнения $l = \displaystyle\int_{t_4}^{t_5} \left|\frac{dz}{dt}\right| dt$, в котором длина $l = |z_5 - z_4| = y_5 > 0$ $(z_4 = 0)$ контура питания задана. Поскольку по построению $|z_5 - z_0| = H_0 + H_1$ фиксировано, на полигоне $P = P^5 \cup P^4 \cup P^0$, соединяющем концы $z_4 = L \cap P^4$ и $z_1 = \varGamma \cap P^0$ свободных границ L и $\varGamma$, остается неизвестной только координата $y_1 = \mathrm{Im}\ z_1$.

8. Полигональные границы. В пп. **3–7** рассмотрены простейшие задачи, в которых заданные участки границы области фильтрации D состояли из отрезков прямых (конечных или бесконечных), параллельных осям координат. В некоторых из этих задач проблема нахождения параметров искомого конформного отображения z: $E \to D$ очень просто решалась за счет монотонности функционалов, определяющих систему уравнений относительно этих параметров. В других задачах разрешимость системы следует непосредственно из результатов работы [4], в которой эта проблема изучена для более сложной геометрии границы области D.

При применении в дальнейшем метода непрерывности к доказательству разрешимости общих задач безнапорной фильтрации изученные в пп. **3–7** задачи будут служить начальными, из которых путем полигональной деформации заданных участков границ ∂D получаются фильтрационные задачи со сложной геометрией области D. Такой подход приводит к возможности в задачах, рассмотренных в пп. **3–7**, водоупоры ($\psi = \mathrm{const}$) и границы водных бассейнов ($\varphi = \mathrm{const}$) считать полигонами P^k (конечными или бесконечными) с вершинами в точках z_j^k и углами $\alpha_j^k \pi$ при них.

9. Однозначная разрешимость контактных задач. Рассмотрим сформулированные в пп. **1, 2** общие контактные задачи фильтрации жидкости в пористых каналах, которые могут быть получены полигональной деформацией водоупоров и границ водных бассейнов в исследованных в пп. **3–7** простейших задачах. Отметим, что при таких деформациях конечные полигоны могут переходить в бесконечные [1, с. 165].

Изучение контактных задач теории фильтрации жидкости в областях D, заданная часть границ которых является полигонами $P \subset \partial D$, заключается в доказательстве разрешимости соответствующих этим задачам систем уравнений (6) относительно параметров t_k, $k = \overline{1, n}$ конформных отображений z: $E \to D$.

Вектор $p = (l, \alpha)$, $l = (l_1, \ldots, l_{n+1})$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1})$ будем называть *геометрической характеристикой* полигона P, так как он полностью определяет геометрию P.

Характеристика p подчиняется условиям *простого* (невырожденного) полигона [2] $|\ln l_{k+1}| \leqslant \delta^{-1}$, $0 < \delta \leqslant \alpha_k \leqslant 2$, $k = \overline{0, n+1}$; $|P_{ij}| \geqslant \delta$, $|i - j| \geqslant 2$, где $P_{ij} \subset D$ — произвольная кривая, соединяющая звенья $(P_i, P_j) \subset P$. Множество простых полигонов P обозначается через $G = G(\delta)$ $(P \subset G,\ p = (l, \alpha) \in G)$.

При доказательстве разрешимости (6) относительно t_k, $k = \overline{1, n}$ большую роль играют также свойства конформного отображения w: $E \to D^*$.

При наличии только одной свободной границы L или $\varGamma$ в работе [2] установлена однозначная разрешимость уравнения (6) для широкого класса задач, названных в [2] задачами типа фильтрации, в которых производная $dw/d\zeta$ зависит только от фиксированных прообразов t_0 и t_{n+1} концов свободной границы $z_k = z(t_k)$, $k = 0, n + 1$.

Однозначная разрешимость сформулированных в пп. **1, 2** прямых относительно параметров t_k, $k = \overline{1, n}$ задач фильтрации, когда имеется только одна свободная граница L или $\varGamma$, практически непосредственно следует из результатов работы [4]. Поэтому остановимся на задачах фильтрации жидкости с двумя свободным границами L и $\varGamma$, приходящими на горизонтальный дренаж.

В задачах, изученных в п. **7**, деформируем водоупоры ($\psi = \mathrm{const}$) и границы водных бассейнов ($\varphi = \mathrm{const}$), заменяя их произвольным простым (невырожденным) полигоном $P \subset G(\delta)$. Рассмотрим для определенности несимметричную задачу из подп. 7.2. Пусть z^k, $k = \overline{0, n+1}$ $(z^0 = z_4 = 0,\ z^{n+1} = z_1)$ — вершины и концы полигона P, $\alpha^k\pi$ — углы при них, $l_k = |z^k - z^{k-1}|$ — длины его звеньев P_k, $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k$.

Параметры t_k, $k=\overline{2,4}$ и t_0 фиксируются, а t_1 и $K>0$ определяются из уравнения (11). Обозначим через $\tau_k \in [t_4, t_1]$, $k=\overline{0,n+1}$ прообразы вершин $z^k \in P$ и заметим, что $\tau_0 = t_4$, $\tau_{n+1}=t_1$ и один из параметров $\tau_j = t_0$, $j \leqslant n$ (пусть $\tau_n = t_0$) фиксированы. Вектор $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$ неизвестных постоянных τ_k, $k=\overline{1,n-1}$ отыскивается из системы уравнений

$$l_k = \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \equiv f_k(\tau,\alpha) \quad (k=\overline{1,n}), \qquad \alpha=(\alpha^0,\dots,\alpha^{n+1}),$$

в которой одно из уравнений (пусть для l_n) является следствием остальных (см. замечание 3).

Запишем систему уравнений для τ_k, $k=\overline{1,n-1}$ в виде функционального уравнения относительно $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$:

$$l = f(\tau,\alpha), \qquad f=(f_1,\dots,f_{n-1}). \tag{12}$$

В представлениях (5) функция $M(\zeta)$ имеет вид

$$M(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{t_1}^{t_4}\frac{h(t)}{\Pi(t)(t-\zeta)}\,dt, \qquad h=q(t)|\Pi_0(t)|.$$

Отметим, что пределы интегрирования t_1, t_4 и все входящие в $h(t)$ параметры t_k, $k=\overline{0,4}$ и K фиксированы. Поэтому для решения $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$ уравнения (12), отвечающего простому полигону $P\subset G(\delta)$, аналогично работе [2] устанавливается справедливость включения (априорных оценок)

$$\tau\in\Omega=\{\tau \mid \tau_{k+1}-\tau_k \geqslant \varepsilon(\delta)>0,\ k=\overline{0,n}\}. \tag{13}$$

Опираясь на оценки (13), в [2] установлены следующие свойства вектора $f(\tau,\alpha)$:

$$f\in C^2[\Omega\times G], \qquad \left|\frac{Df}{D\tau}\right| \geqslant d(\varepsilon,\delta)>0, \tag{14}$$

где $Df/D\tau=\{f_{ij}\}$; $f_{ij}=Df_i/D\tau_j$; $i,j\in\overline{1,n-1}$.

Оценки (13), (14) обеспечивают применимость метода непрерывности [1–3], согласно которому из однозначной разрешимости простых задач в п. **7** следует существование единственного решения $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$ уравнения (12) для произвольного простого полигона $P\subset G(\delta)$.

10. Анализ результатов. Рассмотренные в пп. **3–7** классические задачи теории фильтрации изучались и другими авторами, ссылки на работы которых имеются в монографиях [6–9]. Как правило, исследование этих задач проводилось методом годографа скорости фильтрации, и проблема параметров соответствующих этим задачам конформных отображений $z\colon E\to D$ решалась с использованием полуобратного подхода: фиксировались различные значения этих параметров и по ним вычислялись фильтрационные характеристики потока (напор, длина плотины, размеры дренажных зон и т. д.).

Решение прямой задачи о параметрах конформных отображений в теории фильтрации жидкости со свободными границами впервые получено автором данной работы в [1] в случае конечных областей и распространено в [2] на неограниченные области.

Основной целью настоящей работы являлся выбор таких простых задач фильтрации, с помощью деформации заданных границ которых в классе полигонов методом непрерывности можно доказать разрешимость общих прямых задач теории фильтрации. При этом исследование проблемы параметров для некоторых из этих известных задач приводит к обнаружению новых качественных свойств их решений.

В [6] для рассмотренной в п. **3** задачи построен аналог формулы (8) производной конформного отображения z: $E \to D$, в которую входит произвольный вещественный параметр. В п. **3** установлено, что этот параметр не является произвольным и однозначно определяется из условий сохранения ориентации конформного отображения и его невырожденности на границе ($dz/dt \neq 0$ при $|t| < \infty$).

В пп. **6, 7** впервые поставлены и решены прямые задачи о конусе подошвенных вод и линзе пресных вод, построению различных приближенных моделей которых посвящено большое количество работ (см. библиографию в [6–9]).

Отметим некоторые свойства построенного отображения z: $E \to D$ (см. пп. **6, 7**):

а) в прообразе t_1 точки z_1 функция $(dz/d\zeta)(\zeta - t_1)^{-1/2}$ имеет логарифмическую особенность, т. е. свободная граница Γ в этой точке z_1 не является кривой Ляпунова (ср. с примером в [10, с. 172]);

б) в точке t_2 производная $dz/d\zeta$ ограничена, тем самым ось симметрии потока $y = -l$ (см. п. **6**) или $y = y_5$ (см. подп. 7.1) является касательной к Γ в точке z_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монахов В. Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
2. **Монахов В. Н.** Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 106–121.
3. **Монахов В. Н.** О сходимости численного метода непрерывности задач гидродинамики со свободными границами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 55–61.
4. **Губкина Е. В., Монахов В. Н.** Фильтрация жидкости со свободными границами в неограниченных областях // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 188–197.
5. **Губкина Е. В.** Алгоритм численной реализации конформных отображений со свободной границей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 26–35.
6. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
7. **Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.** Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1977.
8. **Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.** Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
9. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
10. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 16/III 2001 г.