Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2005, том 41, № 4

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Л. Резник

(Новосибирск)

ОБ ОТСЧЕТНЫХ ФУНКЦИЯХ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ДИСПЕРСИИ ОШИБКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ *

Получены соотношения для отсчетных функций, когда периодический сигнал и его производные подвергаются равномерной дискретизации. Рассмотрены выражения для дисперсии ошибки реконструкции такого сигнала на любой частоте при использовании полученных соотношений.

Введение. Обычно для периодического сигнала используется стандартное разложение (N нечетно)

$$f^{(0)}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N\Delta}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{N\Delta}kt\right), \tag{1}$$

где константы a_0, a_k и b_k (их общее число совпадает с числом отсчетов N) определяются известными соотношениями:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f^{(0)}(n\Delta); \quad a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f^{(0)}(n\Delta)\cos\frac{2\pi}{N}kn;$$
$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f^{(0)}(n\Delta)\sin\frac{2\pi}{N}kn. \tag{2}$$

Если произвести подстановку (2) в (1) и сменить порядок суммирования, то соотношение (1) принимает вид теоремы отсчетов для периодического сигнала

$$f^{(0)}(t) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f^{(0)}(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{N\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-n\Delta)}. \tag{3}$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа № 2.13/2005).

В работе [1] получены интерполяционные формулы для восстановления сигнала с ограниченным спектром по совокупности равномерно следующих отсчетов сигнала и отсчетов его производных. (Далее используется эта же схема реконструкции периодического сигнала.) Получены формулы для соответствующих отсчетных функций и соотношения для дисперсии ошибки реконструкции на промежуточных частотах.

Отсчетные функции и соответствующие интерполяционные формулы. Отсчетные функции для равномерной последовательности значений периодического сигнала и значений его производных вытекают из соответствующих соотношений для такой же последовательности сигнала с ограниченным спектром [1] при использовании известных соотношений

$$\mathop{}\limits_{n} \frac{1}{(n\quad a)^r} \quad (\quad 1)^r \frac{\quad}{(r\quad 1)!} \frac{d^{r\quad 1}}{da^{r\quad 1}} \mathrm{ctg}\, a \quad , \tag{4}$$

$$\mathop{}\limits_{n} \frac{(\quad 1)^n}{(n\quad a)^r} \quad (\quad 1)^r \frac{\quad}{(r\quad 1)!} \frac{d^{r\quad 1}}{da^{r\quad 1}} \mathrm{cosec}\, a \quad . \tag{5}$$

1. Рассмотрим сначала случай, когда для реконструкции сигнала используются только его отсчеты $\{f^{(0)}(n\quad)\}, n \quad \overline{0, N\quad 1}$, на периоде N . В силу того что

$$f^{(0)}(t) \quad f^{(0)}(t \quad kN\ ), \tag{6}$$

классическая теорема отсчетов

$$f^{(0)}(t) \qquad f^{(0)}(n\quad) \frac{\sin \frac{}{}(t\quad n\quad)}{\frac{}{}(t\quad n\quad)} \tag{7}$$

очевидным образом преобразуется к следующему виду:

$$f^{(0)}(t) \quad \mathop{}\limits_{n\quad 0}^{N\quad 1} f^{(0)}(n\quad) \sin \frac{}{}(t\quad n\quad) \quad \mathop{}\limits_{k} \quad \frac{(\quad 1)^{kN}}{\frac{}{}(t\quad n\quad kN\ )}. \tag{8}$$

Используя далее соотношение (5) для нечетных значений N, а соотношение (4) для четных N при $r \quad 1$, после несложных преобразований получим интерполяционные формулу (3) и формулу

$$f^{(0)}(t) \quad \mathop{}\limits_{n\quad 0}^{N\quad 1} f^{(0)}(n\quad) \frac{\sin \frac{}{}(t\quad n\quad)}{N \sin \frac{}{N}(t\quad n\quad)} \cos \frac{}{N}(t\quad n\quad). \tag{9}$$

Следует заметить, что соотношения (3) и (9), хотя и точно описывают на частотах $\frac{2}{N}k$ (1) периодический сигнал посредством его отсчетов, оказываются мало пригодными для его реконструкции на иных частотах. Это обстоятельство объясняется тем, что условие (6) делает сигнал разрывным. Стандартным приемом в такой ситуации, снижающим погрешность интерполяции, является использование косинусного преобразования Фурье. Отсчетные функции для этого случая могут быть легко получены из соотношения (3) или (9) после удвоения числа N, сдвига вправо на половину интервала дискретизации и использования условия четности

$$f^{(0)}\ \frac{2n\quad 1}{2}\qquad f^{(0)}\ 2N\qquad \frac{2n\quad 1}{2}\ . \qquad (10)$$

Если выполнить эти вычисления, то для косинусного преобразования теорема отсчетов принимает вид

$$f^{(0)}(t)\quad \sum_{n\quad 1}^{N} f^{(0)}\ \frac{2n\quad 1}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{(2N\quad 1)}{2N}\quad t\quad \frac{2n\quad 1}{2}}{2N\sin\frac{}{2N}\quad t\quad \frac{2n\quad 1}{2}}\qquad \frac{\sin\frac{(2N\quad 1)}{2N}\quad t\quad \frac{2n\quad 1}{2}}{2N\sin\frac{}{2N}\quad t\quad \frac{2n\quad 1}{2}}\ . \qquad (11)$$

2. Для равномерных последовательностей отсчетов сигнала и его первой производной, когда спектр сигнала ограничен частотой – и интервал между парами отсчетов составляет величину 2 , теорема отсчетов выглядит следующим образом [1]:

$$f^{(0)}(t)\quad \sum_{n}\ \frac{\sin\frac{}{2}(t\quad n2\ )}{\frac{}{2}(t\quad n2\ )}^{3}\quad f^{(0)}(n2\ )\quad \frac{f^{(1)}(n2\ )}{1!}(t\quad n2\ )\ . \qquad (12)$$

Если сигнал периодический и его период составляет $N2$, то из равенств (4) и (12) следует, что независимо от четности или нечетности числа N теорема отсчетов (12) превращается в равенство

$$f^{(0)}(t)\quad \sum_{n\quad 0}^{N\quad 1}\ \frac{\sin\frac{}{2}(t\quad n2\ )}{N\sin\frac{}{N2}(t\quad n2\ )}^{2}$$

$$f^{(0)}(n2\ )\quad \frac{f^{(1)}(n2\ )}{1!}\frac{N2}{}\sin\frac{}{N2}(t\quad n2\ )\ \cos\frac{}{N2}(t\quad n2\ )\ . \qquad (13)$$

Нетрудно видеть, что при N соотношение (13) переходит в соотношение (12), так как

$$\lim_{N} \frac{2}{} N \sin \frac{}{N2}(t \quad n2 \quad) \quad (t \quad n2 \quad), \qquad \lim_{N} \cos \frac{}{N2}(t \quad n2 \quad) \quad 1.$$

Вычисляя для (13) косинусно-синусные коэффициенты классической формулы (1), получаем:

$$a_0 \quad \frac{1}{N} \sum_{n \quad 0}^{N \quad 1} f^{(0)}(n2 \quad);$$

$$a_k \quad a_k^{(0)} \quad a_k^{(1)} \quad \frac{2(N \quad k)}{N^2} \sum_{n \quad 0}^{N \quad 1} f^{(0)}(n2 \quad)\cos\frac{2}{N}kn \quad \frac{2}{N} \sum_{n \quad 0}^{N \quad 1} f^{(1)}(n2 \quad)\sin\frac{2}{N}kn; \tag{14}$$

$$b_k \quad b_k^{(0)} \quad b_k^{(1)} \quad \frac{2(N \quad k)}{N^2} \sum_{n \quad 0}^{N \quad 1} f^{(0)}(n2 \quad)\sin\frac{2}{N}kn \quad \frac{2}{N} \sum_{n \quad 0}^{N \quad 1} f^{(1)}(n2 \quad)\cos\frac{2}{N}kn.$$

Сходимость (13) на промежуточных частотах также неудовлетворительна. При переходе к косинусному преобразованию соотношение (13) по аналогии с (11) принимает следующий вид:

$$f^{(0)}(t) \quad \sum_{n \quad 1}^{N} f^{(0)}((2n \quad 1) \quad) \quad \left(\frac{\sin\frac{}{2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}{2N \sin\frac{}{2N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sin\frac{}{2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}{2N \sin\frac{}{2N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}\right)^2 \quad \frac{f^{(1)}((2n \quad 1) \quad)}{1!}\frac{2N2}{}$$

$$\left(\frac{\sin\frac{}{2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}{2N \sin\frac{}{2N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}\right)^2 \quad \frac{1}{2}\sin\frac{}{N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)$$

$$\left(\frac{\sin\frac{}{2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}{2N \sin\frac{}{2N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad)}\right)^2 \quad \frac{1}{2}\sin\frac{}{N2}(t \quad (2n \quad 1) \quad) \quad . \tag{15}$$

Коэффициенты стандартного косинусного разложения для формулы (15) могут быть определены через синусно-косинусные коэффициенты из (14) при значениях аргумента функции, синуса и косинуса, равных $(2n\quad 1)$ и $\frac{}{N}k(2n\quad 1)$:

$$a_{0\cos}\quad a_0;\qquad a_{r\cos}\quad {}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\ a_k\ \frac{\sin\quad(2k\quad r)}{2N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}\quad\frac{\sin\quad(2k\quad r)}{2N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}$$

$$b_k\ \frac{\sin^2\frac{}{2}(2k\quad r)}{N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}\quad\frac{\sin^2\frac{}{2}(2k\quad r)}{N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}\quad,\quad r\quad\overline{1,2N\quad 1}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что

$$a_{2r\cos}\quad a_r;\qquad a_{(2r\quad 1)\cos}\quad {}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\ b_k\ \frac{\sin^2\frac{}{2}(2k\quad r)}{N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}\quad\frac{\sin^2\frac{}{2}(2k\quad r)}{N\sin\frac{}{2N}(2k\quad r)}\ . \tag{17}$$

3. Пусть задана равномерная последовательность троек отсчетов сигнала и его двух первых производных, следующих через интервал $3\quad$. Тогда, как следует из [1], теорема отсчетов для сигнала с ограниченным частотой — спектром формулируется следующим образом [2]:

$$f^{(0)}(t)\quad {}_{n}\quad \frac{\sin\frac{}{3}(t\quad n3\quad)}{\frac{}{3}(t\quad n3\quad)}^{3}\quad f^{(0)}(n3\quad)\ 1\quad\frac{}{3}^{2}\ \frac{(t\quad n3\quad)^2}{2!}$$

$$\frac{f^{(1)}(n3\quad)}{1!}(t\quad n3\quad)\quad\frac{f^{(2)}(n3\quad)}{2!}(t\quad n3\quad)^2\ . \tag{18}$$

Теорема (18) эквивалентна обычной теореме отсчетов при утроенной частоте дискретизации, так что общее число отсчетов в единицу времени остается одинаковым. Если сигнал периодический и его период кратен интервалу последовательности троек отсчетов сигнала и двух его первых производных, т. е. период равен $N3\quad$, то

$$f^{(0)}(t)\quad f^{(0)}(t\quad kN3\quad). \tag{19}$$

После подстановки (19) в (18), использования очевидного равенства

$$\sin^3\frac{}{3}(t\quad n3\quad\quad kN3\quad)\quad\sin^3\frac{}{3}(t\quad n3\quad)(\quad 1)^{kN} \tag{20}$$

и несложных преобразований получим формулу

$$f^{(0)}(t) \quad \mathop{}_{n \quad 0}^{N \quad 1} \sin^3 \frac{}{2}(t \quad n3 \quad)$$

$$f^{(0)}(n3 \quad) \quad \mathop{}_{k} \quad \frac{(\quad 1)^{3Nk}}{{}^3N^3 \left(\frac{t \quad n3}{N3} \quad k \right)^3} \quad \frac{(\quad 1)^{3Nk}}{2 \; N \left(\frac{t \quad n3}{N3} \quad k \right)} \quad \frac{f^{(1)}(n3 \quad)}{1!} \frac{3}{}$$

$$\mathop{}_{k} \quad \frac{(\quad 1)^{3Nk}}{{}^2N^2 \left(\frac{t \quad n3}{N3} \quad k \right)^2} \quad \frac{f^{(2)}(n3 \quad)}{2!} \left(\frac{3}{} \right)^2 \quad \mathop{}_{k} \quad \frac{(\quad 1)^{3Nk}}{N \left(\frac{t \quad n3}{N3} \quad k \right)} . \quad (21)$$

При нечетном числе N, используя равенство (5), получим соотношение

$$f^{(0)}(t) \quad \mathop{}_{n \quad 0}^{N \quad 1} \left(\frac{\sin \frac{}{3} (t \quad n3 \quad)}{N \sin \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad)} \right)^3 \quad f^{(0)}(n3 \quad) \; 1 \quad \frac{(N^2 \quad 1) \sin^2 \frac{}{N3}(t \quad n3 \quad)}{2!}$$

$$\frac{f^{(1)}(n3 \quad)}{1!} \frac{N3}{} \frac{1}{2} \sin \frac{2}{N3} (t \quad n3 \quad) \quad \frac{f^{(2)}(n3 \quad)}{2!} \left(\frac{N3}{} \sin \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad) \right)^2 \cdot (22)$$

Если число N четно, то, используя соотношение (4), будем иметь следующую теорему отсчетов:

$$f^{(0)}(t) \quad \mathop{}_{n \quad 0}^{N \quad 1} \left(\frac{\sin \frac{}{3} (t \quad n3 \quad)}{N \sin \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad)} \right)^3 \quad f^{(0)}(n3 \quad) \; 1 \quad \frac{N^2 \sin^2 \frac{}{N3}(t \quad n3 \quad)}{2!}$$

$$\cos \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad) \quad \frac{f^{(1)}(n3 \quad)}{1!} \frac{N3}{} \sin \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad)$$

$$\frac{f^{(2)}(n3 \quad)}{2!} \left(\frac{N3}{} \sin \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad) \right)^2 \cos \frac{}{N3} (t \quad n3 \quad) . \qquad (23)$$

Формулы (3), (9), (13), (22) и (23) позволяют точно реконструировать периодический сигнал при равномерной дискретизации путем использования соответствующих отсчетных функций. Эти же соотношения в принципе могут быть использованы при реконструкции сигнала более общего вида.

Дисперсия ошибки реконструкции. Дисперсия ошибки реконструкции сигнала определяется очевидным соотношением

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \int d\omega \; S_f(\omega)\, \varepsilon^2(\omega), \tag{24}$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность реконструируемого сигнала; $\varepsilon^2(\omega)$ – дисперсия ошибки реконструкции сигнала на конкретной частоте ω.

Величина $\varepsilon^2(\omega)$ может быть вычислена как с использованием отсчетных функций, так и с использованием стандартных частотных разложений. Последнее представляется более предпочтительным, так как отсчетные функции в отличие от частотных не являются ортогональными.

1. Рассмотрим сначала, чему равна дисперсия ошибки реконструкции сигнала при использовании теоремы (3). В этом случае

$$\varepsilon^2(\omega) = \frac{1}{N}\int_{-N/2}^{N/2} dt \left| e^{i\omega t} - a_0 - \sum_{k=1}^{(N-1)/2}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{N}kt \right) \right|^2. \tag{25}$$

Здесь в соответствии с (2) величина $f^{(0)}(n) = e^{i\omega n}$.

После вычислений получим

$$\varepsilon^2(\omega) = 1 - \left(\frac{\sin N\frac{\omega}{2}}{N \sin\frac{\omega}{2}} \right)^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[\left(\frac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}{N\sin\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)} \right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)}{N\sin\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)} \right)^2 \right] + 2\frac{\sin^2 N\frac{\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}\, N\frac{\omega}{2}} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[\frac{\sin^2\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}{N\sin\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2\frac{N}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)}{N\sin\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)} \right]. \tag{26}$$

Из рис. 1 следует, что разложение сигнала (3) неудовлетворительно описывает сигнал, содержащий промежуточные частоты. На частотах $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ $(1 \le k \le (N-1)/2)$ дисперсия ошибки равна нулю.

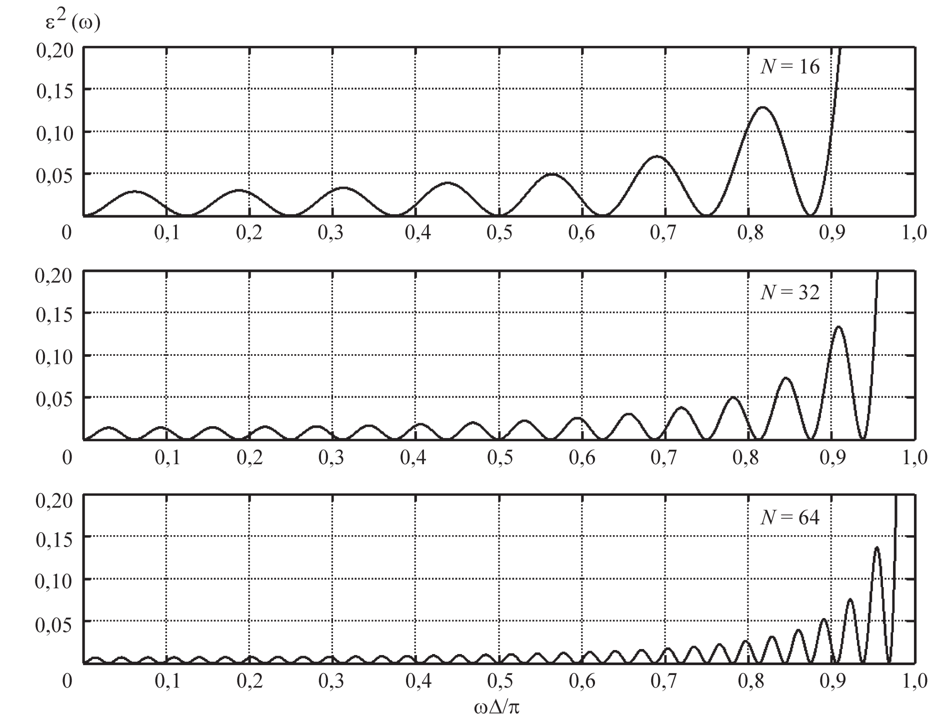


Рис. 1. Дисперсия ошибки реконструкции сигнала формулой (3) при различных значениях числа отсчетов на периоде сигнала

При косинусном разложении, отсчетные функции для которого определяются соотношением (11), частотное представление функции

$$f^{(0)}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos\frac{\pi}{N}kt, \tag{27}$$

где коэффициенты разложения

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} f^{(0)}\left(\frac{2n-1}{2}\right); \quad a_n = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N-1} f^{(0)}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{N}kn. \tag{28}$$

Учитывая, что $f^{(0)}\left(\frac{2n-1}{2}\right) = e^{i\omega\frac{2n-1}{2}}$, после преобразований, аналогичных предыдущим, получим формулу для дисперсии ошибки:

$$\varepsilon^2(\omega) = 1 - \left(\frac{\sin N\frac{\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\,{}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\;\frac{\sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{}{N}k}\quad(\quad 1)^{k}\,\frac{\sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{}{N}k}^{\;2}\quad 2\,\frac{\sin^{2}N\ \frac{}{2}}{N\sin\frac{}{2}\ N\ \frac{}{2}}$$

$${}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\;\frac{\sin^{2}\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{}{N}k\ \ \frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}$$

$$(\quad 1)^{k}\;\frac{\sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k\quad \sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{}{N}k\ \ \frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}$$

$$\frac{\sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k\quad \sin\frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{}{N}k\ \ \frac{N}{2}\qquad \frac{}{N}k}\qquad \frac{\sin^{2}\frac{N}{2}\qquad \frac{2}{N}k}{N\sin\frac{1}{2}\qquad \frac{2}{N}k\ \ \frac{N}{2}\qquad \frac{2}{N}k}\cdot \quad (29)$$

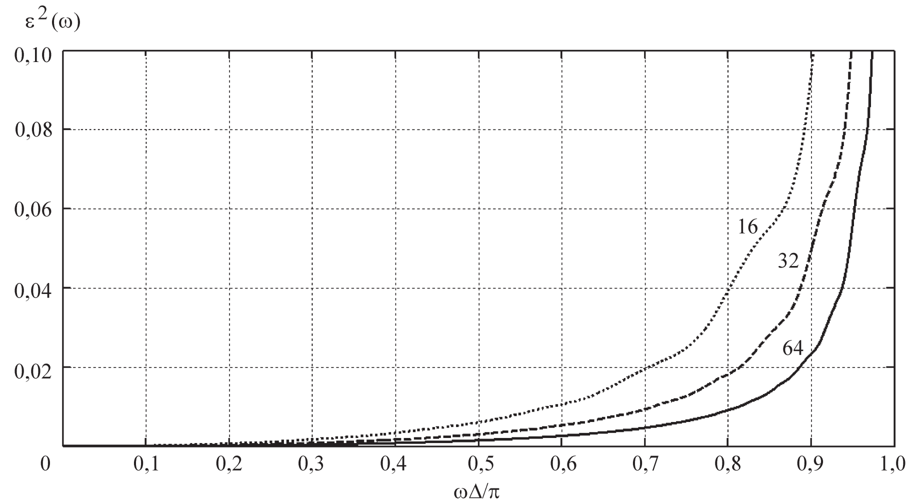
Дисперсия ошибки $^{2}(\ )$ уже не имеет в этом случае колебательного характера, а возрастает с увеличением частоты. Соотношение (11) удовлетворительно воспроизводит промежуточные частоты сигнала (рис. 2).

2. Пусть заданы пары значений сигнала и его производной в абсциссах $n2\quad (n\quad \overline{0, N\quad 1})$, а сигнал реконструируется формулой (13). В этом случае, используя стандартное частотное разложение сигнала, в котором константы разложения определяются соотношениями (14), где $f^{(0)}(n2\quad)\quad e^{\ i\ 2n}$, а значения производной $f^{(1)}(n2\quad)\quad i\quad e^{\ i\ 2n}$, получим следующую формулу для дисперсии ошибки реконструкции (рис. 3):

$$^{2}(\ )\quad 1\quad \frac{\sin N}{N\sin}^{\;2}$$

$${}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\;\frac{N\quad k}{N}^{2}\quad \frac{}{}^{\;2}\;\frac{\sin^{2}N\qquad \frac{}{N}k}{N^{2}\sin^{2}\qquad \frac{}{N}k}\;\frac{\sin^{2}N\qquad \frac{}{N}k}{N^{2}\sin^{2}\qquad \frac{}{N}k}$$

$$2\,\frac{N\quad k}{N}\,\frac{}{}\;\frac{\sin^{2}N\qquad \frac{}{N}k}{N^{2}\sin^{2}\qquad \frac{}{N}k}\;\frac{\sin^{2}N\qquad \frac{}{N}k}{N^{2}\sin^{2}\qquad \frac{}{N}k}\qquad 2\,\frac{\sin^{2}N}{N\sin\quad N}$$



N	/										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
16	0	0,00018	0,00074	0,00178	0,0034	0,006	0,0106	0,0196	0,0393	0,0949	0,949
32	0	0,00009	0,00036	0,00088	0,0017	0,003	0,0053	0,0094	0,0182	0,0498	0,970
64	0	0,00004	0,00018	0,00044	0,0008	0,0015	0,0027	0,0047	0,0091	0,0233	0,983

Рис. 2. Дисперсия ошибки реконструкции сигнала формулой (11) при различных значениях числа отсчетов на периоде сигнала

$$2_{k\quad 1}^{N\quad 1}\frac{N\quad k}{N}\,\frac{\sin^{2} N \qquad \frac{}{N}k \quad \cos \qquad \frac{}{N}k}{N\sin \qquad \frac{}{N}k \quad N \qquad \frac{}{N}k}$$

$$\frac{\sin^{2} N \qquad \frac{}{N}k \quad \cos \qquad \frac{}{N}k}{N\sin \qquad \frac{}{N}k \quad N \qquad \frac{}{N}k}$$

$$2\frac{}{}{}_{k\quad 1}^{N\quad 1}\,\frac{\sin^{2} N \qquad \frac{}{N}k \quad \cos \qquad \frac{}{N}k}{N\sin \qquad \frac{}{N}k \quad N \qquad \frac{}{N}k}$$

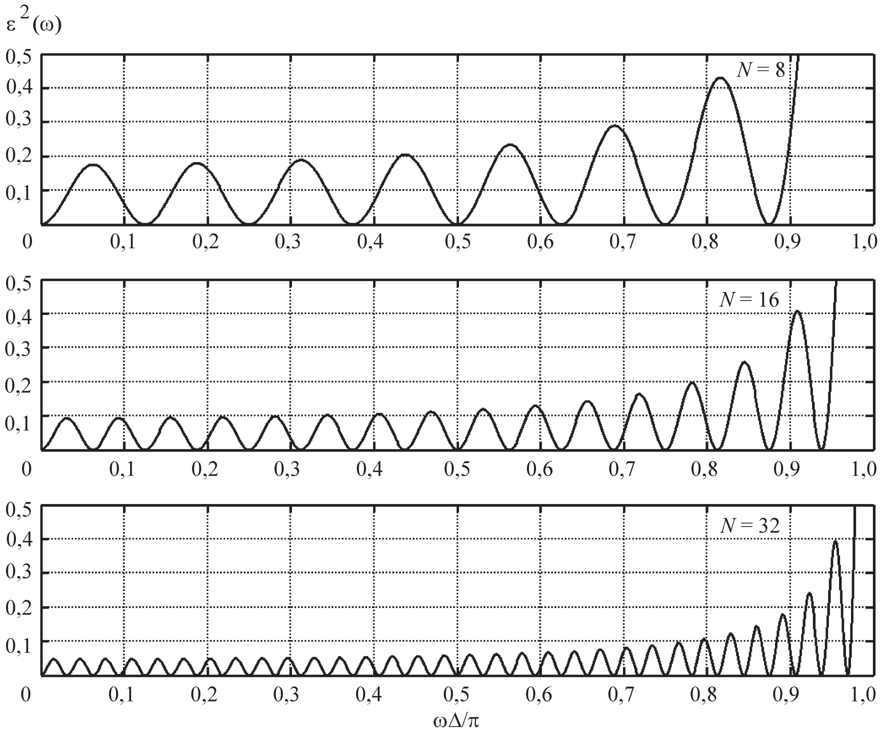


Рис. 3. Дисперсия ошибки реконструкции сигнала формулой (13) при различных значениях

$$\frac{\sin^2 N \qquad \frac{}{N}k \quad \cos \qquad \frac{}{N}k}{N\sin \qquad \frac{}{N}k \quad N \qquad \frac{}{N}k} \;. \tag{30}$$

Заключение. Из соотношений (26) и (30) (см. рис.1 и 3) следует, что в области частот | | – реконструкция сигнала с использованием интерполяционных формул (3) и (13) дает практически один и тот же неудовлетворительный результат из-за явлений Гиббса, поэтому необходима передискретизация. При достаточно большом N на частотах выше частоты Найквиста по точности реконструкции формула (13) эквивалентна формуле (12), а формула (3) – стандартной теореме отсчетов (7) (см. [2]).

Теорема отсчетов (11) удовлетворительно воспроизводит частоты при | | –, а на более высоких частотах эквивалентна стандартной теореме отсчетов для непериодического сигнала (7). По-видимому, при передискретизации ее можно использовать для построения КИХ-фильтра по методике, изложенной в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
2. Ефимов В. М., Резник А. Л., Васьков С. Т. О дисперсии ошибки восстановления сигнала при дополнительном использовании отсчетов его производных // Автометрия. 2004. 40, № 6. С. 110.
3. Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В. Сравнительная оценка характеристик полиномиальных интерполяторов при равномерной дискретизации сигнала // Автометрия. 2001. № 6. С. 24.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
22 декабря 2004 г.