УДК 517.958: 537.84

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА

Р. К. Газизов*, Н. Х. Ибрагимов*,**

* Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа
** Технологический институт Блекинга, SE-371 79 Карлскрона, Швеция
E-mails: gazizov@mail.rb.ru, nib@bth.se

С использованием приближенных симметрий исследуются различные приближения к уравнению Компанейца, что позволяет учесть вклад всех членов этого уравнения, не учитываемых ранее при анализе предельных случаев.

Ключевые слова: уравнение Компанейца, эффект Комптона, приближенные симметрии, приближенные решения.

Введение. Нелинейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big[x^4\Big(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\Big)\Big] \tag{1}$$

или в развернутом виде

$$n_t = x^2 n_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2 n)n_x + 4x(n + n^2), \tag{2}$$

известное как уравнение Компанейца [1] или уравнение фотонной диффузии, описывает взаимодействие низкоэнергетического однородного фотонного газа с разреженным электронным газом. Зависимая переменная n представляет собой плотность фотонного газа (плотность числа фотонов). Члены n и n^2 учитывают спонтанное рассеяние (эффект Комптона) и индуцированное рассеяние соответственно. В уравнении (1) независимая переменная x задается выражением

$$x = \frac{h\nu}{kT},$$

где h — постоянная Планка; ν — фотонная частота; $h\nu$ — фотонная энергия; kT — температура электрона; k — постоянная Больцмана.

Уравнение (1) обладает только одной симметрией, а именно переносом по времени с оператором

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{3}$$

С помощью симметрии (3) можно исследовать только стационарные решения $n = n(x)$ уравнения Компанейца (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ согласно Постановлению № 220 (договор № 11.G34.31.0042).

С учетом физического смысла явления, описываемого уравнением (1), отбрасывая определенные малые члены в (2), можно получить несколько важных предельных случаев [2] (см. также работу [3] и библиографию к ней). Групповой анализ позволяет построить нестационарные инвариантные решения [3] в предельных случаях уравнения Компанейца.

В настоящей работе с помощью приближенных симметрий и приближенно инвариантных решений учитывается вклад малых членов.

1. Основные предельные случаи. В работе [3] с использованием группового анализа построены инвариантно-групповые решения в предельных случаях, описанных ниже.

1.1. *Стационарный случай.* В данном случае уравнение Компанейца (1) сводится к уравнению Риккати

$$\frac{dn}{dx} + n + n^2 = \frac{A}{x^4}, \qquad A = \mathrm{const}\,.$$

Если значение n мало, то соответствующее линейное уравнение

$$\frac{dn}{dx} + n = \frac{A}{x^4}$$

имеет решение

$$n = B\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-x}\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^4}\,dx, \qquad A = \mathrm{const},\ B = \mathrm{const}\,.$$

Полагая $A = 0$, получаем распределение Вина

$$n = B\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

1.2. *Доминирующее спонтанное рассеяние.* Если плотность числа фотонов n мала, то спонтанное рассеяние преобладает над индуцированным рассеянием, т. е. $n \gg n^2$. В данном случае в уравнении (1) отбрасывается член n^2. В результате получаем линейное уравнение [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big[x^4\Big(\frac{\partial n}{\partial x} + n\Big)\Big],$$

или в развернутом виде

$$n_t = x^2 n_{xx} + (x^2 + 4x)n_x + 4xn. \tag{4}$$

Линейное уравнение (4) обладает дополнительными симметриями

$$X_2 = n\,\frac{\partial}{\partial n}; \tag{5}$$

$$X_\sigma = \sigma(t,x)\,\frac{\partial}{\partial n},$$

где $\sigma(t,x)$ — любое решение этого уравнения.

1.3. *Доминирующее индуцированное рассеяние.* Если $n^2 \gg n$, то в правой части уравнения (1) отбрасывается член n. В результате получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big[x^4\Big(\frac{\partial n}{\partial x} + n^2\Big)\Big], \tag{6}$$

или в развернутом виде

$$n_t = x^2 n_{xx} + (4x + 2x^2 n)n_x + 4xn^2. \tag{7}$$

Уравнение (7), помимо симметрии (3), обладает симметрией масштабирования (растяжения)

$$X_2 = n\,\frac{\partial}{\partial n} - x\,\frac{\partial}{\partial x}. \tag{8}$$

Функцию $n = n(t, x)$, инвариантную относительно группы с оператором (8), запишем в общем виде

$$n = \varphi(t)/x.$$

Уравнение (7) для этой функции сводится к уравнению первого порядка

$$\varphi' = 2(\varphi^2 - \varphi),$$

из которого следует

$$\varphi(t) = (1 - C\,\mathrm{e}^{2t})^{-1}.$$

Таким образом, наличие симметрии масштабирования (8) приводит к следующему инвариантному решению уравнения (6):

$$n = \frac{1}{x(1 - C\,\mathrm{e}^{2t})}\,. \tag{9}$$

Аналогичные вычисления для линейной комбинации $X_1 - \alpha X_2$ операторов (3) и (8) позволяют получить общий вид инвариантных решений

$$n = \varphi(\lambda)/x, \qquad \lambda = x\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,. \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (7), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\lambda\varphi'' + (2\varphi + 2 - \alpha)\varphi' + (2/\lambda)(\varphi^2 - \varphi) = 0.$$

1.4. *Предельный случай* $n^2 \gg n$, $n^2 \gg n_x$. В данном случае, оставляя в уравнении (1) только квадратичный член n^2, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial\,(x^4 n^2)}{\partial x}. \tag{11}$$

Уравнение (11), помимо симметрии (3), обладает двумя симметриями масштабирования

$$X_2 = n\,\frac{\partial}{\partial n} - t\,\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = x\,\frac{\partial}{\partial x} - t\,\frac{\partial}{\partial t}. \tag{12}$$

2. Приближение к предельным случаям. В п. **1** получены предельные случаи без учета влияния малых членов. При использовании более точного подхода необходимо сохранить малые члены как возмущения уравнений в предельных случаях. Это можно сделать с помощью соответствующих преобразований масштабирования, порожденных симметриями растяжения невозмущенных уравнений в предельных случаях. В результате возмущенные уравнения могут наследовать симметрии растяжения невозмущенных уравнений.

2.1. *Возмущение стационарной модели.* Введем в рассмотрение “медленное время”

$$s = \varepsilon t$$

и запишем уравнение Компанейца (1) в виде

$$\varepsilon u_s = x^2 u_{xx} + (x^2 + 4x)u_x + 4xu + 2x^2 u u_x + 4xu^2.$$

2.2. *Возмущение доминирующего спонтанного рассеяния.* Оператор (5) порождает преобразование масштабирования

$$\bar n = n\,\mathrm{e}^{a}\,.$$

Обозначив $u = \bar n$, $\varepsilon = \mathrm{e}^{-a}$, запишем это преобразование в виде

$$n = \varepsilon u.$$

Уравнение Компанейца (1) в переменных t, x, u имеет вид

$$u_t = x^2 u_{xx} + (x^2 + 4x)u_x + 4xu + \varepsilon(2x^2 u u_x + 4xu^2). \tag{13}$$

Уравнение (13) с малым параметром ε является возмущением уравнения (4), представленного в виде

$$u_t = x^2 u_{xx} + (x^2 + 4x)u_x + 4xu.$$

2.3. *Возмущение доминирующего индуцированного рассеяния.* Оператор (8) порождает преобразование масштабирования

$$\bar{n} = n\,\mathrm{e}^{a}, \qquad \bar{x} = x\,\mathrm{e}^{-a}, \qquad \bar{t} = t.$$

Введя новые обозначения, представим это преобразование в виде

$$u = \varepsilon n, \qquad x = \varepsilon y. \tag{14}$$

В переменных t, y, u уравнение Компанейца (1) записывается следующим образом:

$$u_t = y^2 u_{yy} + (4y + 2y^2 u)u_y + 4yu^2 + \varepsilon(y^2 u_y + 4yu). \tag{15}$$

Уравнение (15) с малым параметром ε представляет собой возмущение уравнения (7) в виде

$$u_t = y^2 u_{yy} + (4y + 2y^2 u)u_y + 4yu^2. \tag{16}$$

2.4. *Возмущение в случае $n^2 \gg n$, $n^2 \gg n_x$.* Используя генератор X_2 из (12), введем масштабирование (ср. с (14))

$$u = \varepsilon n, \qquad t = \varepsilon s$$

и запишем уравнение (1) в виде

$$u_s = 2x^2 u u_x + 4xu^2 + \varepsilon[x^2 u_{xx} + (x^2 + 4x)u_x + 4xu]. \tag{17}$$

Уравнение (17) является возмущением уравнения (11), представленного в виде

$$u_s = 2x^2 u u_x + 4xu^2.$$

3. Приближенные симметрии и решения. При построении приближенных инвариантных решений прежде всего необходимо найти в каждом рассмотренном выше случае возмущение дополнительных симметрий (см. работу [4] и библиографию к ней). Тогда приближенные инвариантные решения можно получить с использованием метода, описанного в [5]. В качестве примера использования этого подхода рассмотрим возмущенное уравнение (15) в случае преобладания индуцированного рассеяния.

Симметрия масштабирования (8) невозмущенного уравнения (16) имеет вид

$$X_2 = u\,\frac{\partial}{\partial u} - y\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{18}$$

Используя метод приближенных симметрий [4], можно показать, что симметрия (18) наследуется возмущенным уравнением (15) в виде следующей приближенной симметрии:

$$Y_2 = \Big(u + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial u} - y\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{19}$$

Приближенные инварианты оператора (19) имеют вид

$$I_1 = t, \qquad I_2 = (u + \varepsilon/2)y.$$

Согласно [5] соответствующее приближенное инвариантное решение записывается в виде

$$I_2 = \varphi_1(I_1) + \varepsilon\varphi_2(I_1),$$

откуда следует

$$u = \frac{1}{y}\,[\varphi_1(t) + \varepsilon\varphi_2(t)] - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (20)$$

Подставляя представление (20) решения в возмущенное уравнение (15), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_1' = 2(\varphi_1^2 - \varphi_1), \qquad \varphi_2' = (4\varphi_1 - 2)\varphi_2. \qquad (21)$$

Решение системы (21) имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{1 - C_1\,\mathrm{e}^{2t}}, \qquad \varphi_2 = \frac{C_2\,\mathrm{e}^{2t}}{(1 - C_1\,\mathrm{e}^{2t})^2}, \qquad (22)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (22) в уравнение (20), находим приближенно-инвариантное решение уравнения Компанейца в случае преобладания индуцированного рассеяния:

$$u = \frac{1}{y}\Big[\frac{1}{1 - C_1\,\mathrm{e}^{2t}} + \varepsilon\,\frac{C_2\,\mathrm{e}^{2t}}{(1 - C_1\,\mathrm{e}^{2t})^2}\Big] - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (23)$$

Уравнение (23) представляет собой возмущение инвариантного решения (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Компанеец А. С.** Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1956. Т. 31, № 5. С. 876–885.
2. **Зельдович Я. Б.** Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // Успехи физ. наук. 1975. Т. 115, № 5. С. 161–197.
3. **Ibragimov N. H.** Time-dependent exact solutions of the nonlinear Kompaneets equation // J. Phys. A. Math. Theor. 2010. V. 43. 502001.
4. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные симметрии // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 4. С. 435–450.
5. **Bagderina Yu. Yu, Gazizov R. K.** Invariant representation and symmetry reduction for differential equations with a small parameter // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2004. V. 9, N 1. P. 3–11.

Поступила в редакцию 19/IX 2013 г.