

УДК 539.3; 536.4

## ДИФфуЗИЯ В ОБОБЩЕННОМ ТЕРМОУПРУГОМ БЕСКОНЕЧНОМ ТЕЛЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Дж. Н. Шарма, Н. Кумари, К. К. Шарма

Технологический национальный институт, 177005 Хамирпур, Индия  
E-mails: jns@nitham.ac.in, nishanithmr@gmail.com, kks@nitham.ac.in

С использованием уравнений состояния диффузионно-термоупругого тела с одним временем релаксации и преобразования Лапласа исследуется динамическая задача о деформировании изотропного бесконечного цилиндра радиусом  $r$  под действием заданной на границе полости радиальной нагрузки, температуры или концентрации диффундирующего вещества. Для перемещений, температуры и концентрации получены аналитические выражения, приведены соответствующие графики.

**Ключевые слова:** цилиндрическая полость, бесконечное пространство, диффузия, термоупругость, аппроксимация на малом промежутке времени.

**Введение.** В работах [1, 2] предложены две обобщенные теории термоупругости с одним или двумя временами релаксации. В отличие от классической теории термоупругости в этих теориях скорость распространения температуры конечная. Данные теории позволяют описать движение высокотемпературных потоков на малых временных интервалах. В [3] исследованы обобщенные термоупругие волны в трансверсально-изотропном бесконечном теле с цилиндрической полостью. Распространение термоупругих волн в бесконечном однородном изотропном теле с цилиндрической полостью изучено в работе [4].

В [5] исследованы продольные волны в термоупругом бесконечном круговом цилиндре, получено дисперсионное соотношение. В [6, 7] изучена связанная термоупругая задача для бесконечного тела и сплошного цилиндра. В [8, 9] рассмотрена термоупругая задача для бесконечной среды с цилиндрической полостью. Возмущение среды происходило вследствие нагрева и нагружения поверхности полости и воздействия движущегося источника тепла. В [10] с использованием гиперболической модели теплопроводности решалась динамическая задача о деформировании бруса под действием движущегося источника тепла. В [11] исследована двумерная термоупругая задача для полубесконечного пространства, подвергнутого тепловому удару.

В [12] выведены уравнения движения, теплопроводности и диффузии вещества для обобщенного термоупругого тела. В [13] с использованием обобщенной теории термодиффузии в упругом теле с одним временем релаксации рассмотрена задача для термоупругого полупространства. В [14] с помощью обобщенной теории термодиффузии в упругом теле изучено распространение плоских гармонических волн. В работах [15–17] исследовано совместное распространение тепла и вещества в деформируемых телах.

В настоящей работе с использованием модели термодиффузии в упругом теле Лорда — Шульмана решается одномерная задача для бесконечной среды с цилиндрической

полостью при действии непрерывного источника тепла. Для решения задачи используется преобразование Лапласа. Обратное преобразование реализуется численно. Вычислены смещения, температура, концентрация и напряжения.

**1. Основные уравнения.** Для обобщенной модели термодиффузии в однородном изотропном упругом теле используются следующие основные уравнения и уравнения состояния [12]:

— выражения деформаций через перемещения

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $e_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;

— зависимости напряжений от деформаций, температуры и концентрации

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \beta_1 T \delta_{ij} - \beta_2 C \delta_{ij}, \\ \rho T_0 S &= \rho C_e T + \beta_1 T_0 e_{kk} + a T_0 C, \end{aligned} \quad (2)$$

$$P = -\beta_2 e_{kk} + bC - aT, \quad i, j, k = 1, 2, 3;$$

— уравнения движения

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \beta_1 T_{,i} - \beta_2 C_{,i} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3)$$

— уравнение теплопроводности

$$KT_{,ii} - \rho C_e (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) = \beta_1 T_0 (\dot{e} + t_0 \ddot{e}) + a T_0 (\dot{C} + t_0 \ddot{C}), \quad i = 1, 2, 3; \quad (4)$$

— уравнение диффузии

$$C_{,ii} - \frac{1}{Db} (\dot{C} + t_1 \ddot{C}) = \frac{\beta_2}{b} e_{,ii} + \frac{a}{b} T_{,ii}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

В (1)–(5)  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $e_{kk}$  — дилатансия;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $\beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$ ;  $\beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_C$ ;  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $\alpha_C$  — коэффициент линейного диффузионного расширения;  $\rho$  — плотность;  $C_e$  — удельная теплоемкость при постоянной деформации;  $S$  — энтропия на единицу массы;  $a$  — константа термодиффузии;  $b$  — константа диффузии;  $P$  — химический потенциал на единицу массы;  $T_0$  — температура среды в естественном состоянии;  $T(x_i, t) = T_1(x_i, t) - T_0$  — текущая температура среды ( $|(T_1 - T_0)/T_0| \ll 1$ );  $C(x_i, t) = C_1(x_i, t) - C_0$ ;  $C_0$  — начальная концентрация вещества в естественном состоянии;  $C_1$  — текущая концентрация;  $t_0, t_1$  — времена релаксации температуры. Предполагается, что параметры материала удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} K > 0, \quad D > 0, \quad \lambda > 0, \quad \rho > 0, \quad C_e > 0, \\ \mu > 0, \quad T_0 > 0, \quad t_0 > 0, \quad t_1 > 0, \quad C_0 > 0. \end{aligned}$$

**2. Формулировка задачи.** Рассматривается однородное изотропное термодиффузионное упругое тело при однородной температуре  $T_0$  и начальной концентрации  $C_0$ , занимающее область  $R \leq r < \infty$ . Функции состояния являются функциями пространственной переменной  $r$  и времени  $t$  и стремятся к нулю на бесконечности. Используется цилиндрическая система координат  $(r, \theta, z)$ , ось  $z$  которой направлена вдоль оси цилиндра. В силу симметрии задача является одномерной, поэтому все функции зависят от пространственной переменной  $r$  и времени  $t$ . Предполагается, что массовые силы и источники тепла отсутствуют. В начальном положении тело находится в состоянии покоя.

В цилиндрической системе координат определяющая система уравнений имеет вид

$$(\lambda + 2\mu) \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{u}{r^2} \right) - \beta_1 T_{,r} - \beta_2 C_{,r} = \rho \ddot{u},$$

$$K\left(T_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r}\right) - \rho C_e(\dot{T} + t_0\ddot{T}) = \beta_1 T_0 \left[\dot{u}_{,r} + \frac{1}{r}\dot{u} + t_0\left(\ddot{u}_{,r} + \frac{1}{r}\ddot{u}\right)\right] + aT_0(\dot{C} + t_0\ddot{C}), \quad (6)$$

$$C_{,rr} + \frac{1}{r}C_{,r} - \frac{1}{Db}(\dot{C} + t_1\ddot{C}) = \frac{\beta_2}{b}\left(u_{,rrr} + \frac{1}{r}u_{,rr} - \frac{2}{r^2}u_{,r} + \frac{2}{r^3}u\right) + \frac{a}{b}\left(T_{,rr} + \frac{1}{r}T_{,r}\right).$$

Здесь  $u(r, t)$  — смещение;  $T(r, t)$  — температура;  $C(r, t)$  — концентрация. Уравнения состояния принимаются в виде

$$\sigma_{rr} = 2\mu e_{rr} + \lambda e - \beta_1 T - \beta_2 C, \quad P = -\beta_2 e + bC - aT,$$

где

$$e_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad e = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}.$$

Вводятся следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} t' = \frac{c_l t}{R}, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad t_0 = \frac{c_l t_0}{R}, \quad t_1' = \frac{c_l t_1}{R}, \quad \omega^* = \frac{C_e(\lambda + 2\mu)}{K}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \\ \bar{a} = \frac{aC_0}{\rho C_e}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta_2 C_0}{\beta_1 C_0}, \quad \bar{b} = \frac{aT_0}{bC_0}, \quad \varepsilon_c = \frac{\beta_1 \beta_2 T_0}{C_0 b(\lambda + 2\mu)}, \quad \bar{\omega}_b = \frac{c_l^2}{\omega^* Db}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \\ \sigma_{\xi\xi} = \frac{\sigma'_{\xi\xi}}{\rho c_l^2}, \quad \Omega = \frac{\omega^* R}{c_l}, \quad U = \frac{u_i}{R}, \quad \varepsilon_T = \frac{T_0 \beta_1^2}{\rho C_e(\lambda + 2\mu)}, \quad c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \varepsilon_c = \bar{b}\varepsilon_a, \\ \bar{\beta}_1 = \frac{\beta_1 T_0}{\lambda + 2\mu}, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\beta_2 C_0}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих переменных уравнения (6) принимают следующий вид:

$$\left(U_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}U_{,\xi} - \frac{U}{\xi^2}\right) - \bar{\beta}_1 T_{,\xi} - \bar{\beta}_2 C_{,\xi} = \ddot{U}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left(T_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi}T_{,\xi}\right) - \Omega\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + t_0\frac{\partial}{\partial\tau^2}\right)T - \frac{\varepsilon_T\Omega}{\beta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + t_0\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(U_{,\xi} + \frac{U}{\xi}\right) - \\ - \bar{a}\Omega(\dot{C} + t_0\ddot{C}) = 0, \\ \left(C_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi}C_{,\xi}\right) - \bar{\omega}_b\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + t_1\frac{\partial}{\partial\tau^2}\right)C - \frac{\varepsilon_c}{\beta_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{U}{\xi}\right) - \\ - \bar{b}\left(T_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi}T_{,\xi}\right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(штрихи у безразмерных величин опущены).

Уравнение (8) можно привести к виду

$$\nabla^2 \bar{e} - \bar{\beta}_1 \nabla^2 \bar{T} - \bar{\beta}_2 \nabla^2 \bar{C} = \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial \tau^2}. \quad (10)$$

Уравнения состояния записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\xi\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + (1 - 2\delta^2)\frac{U}{\xi} - \bar{\beta}_1 T - \bar{\beta}_2 C, \\ P' = \frac{P}{bC_0} = -\frac{\varepsilon_c}{\beta_1}e + C' - \bar{b}T. \end{aligned}$$

Здесь

$$e_{\xi\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad e = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{U}{\xi}. \quad (11)$$

Применяя преобразование Лапласа

$$(\bar{e}, \bar{T}, \bar{C}) = \int_0^{\infty} (e, T, C) e^{-pt} dt$$

к обеим частям уравнений (8), (9), получаем

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - p^2)\bar{e} - \bar{\beta}_1 \nabla^2 \bar{T} - \bar{\beta}_2 \nabla^2 \bar{C} &= 0, \\ \bar{\beta}_1 (\nabla^2 - \Omega \tau_0 p^2) \bar{T} - \varepsilon_T \tau_0 \Omega p^2 \bar{e} - \bar{a} \tau_0 p^2 \bar{\beta}_1 \bar{C} &= 0, \\ (\nabla^2 - \bar{\omega}_b \tau_1 \Omega p^2) \bar{\beta}_1 \bar{C} - \varepsilon_c \nabla^2 \bar{e} - \bar{b} \bar{\beta}_1 \nabla^2 \bar{T} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \tau_0 = t_0 + \frac{1}{p}, \quad \tau_1 = t_1 + \frac{1}{p},$$

черта над буквой обозначает преобразование Лапласа соответствующей функции;  $p$  — параметр преобразования. Также имеем

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + (1 - 2\delta^2) \frac{\bar{U}}{\xi} - \bar{\beta}_1 \bar{T} - \bar{\beta}_2 \bar{C}. \quad (13)$$

Уравнения (12) можно привести к виду

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - p^2)\bar{e} - \bar{\beta}_1 \nabla^2 \bar{T} - \bar{\beta}_2 \nabla^2 \bar{C} &= 0, \\ \varepsilon_T \tau_0^* p^2 \bar{e} + \bar{a} \tau_0^* p^2 \bar{\beta}_1 \bar{C} - \bar{\beta}_1 (\nabla^2 - \tau_0^* p^2) \bar{T} &= 0, \\ \varepsilon_c \nabla^2 \bar{e} + \bar{b} \bar{\beta}_1 \nabla^2 \bar{T} - (\nabla^2 - \bar{\omega}_b \tau_1^* p^2) \bar{\beta}_1 \bar{C} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\tau_0^* = t_0 \Omega$ ;  $\tau_1^* = t_1 \Omega$ .

Из системы уравнений (14) получаем

$$(\nabla^6 - p^2 \nabla^4 A^* + p^4 \nabla^2 B^* - C^* p^6) \bar{e} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{1 + \bar{\omega}_b \tau_1 + \tau_0 [(1 + \bar{a} \bar{b})(1 + \varepsilon_a) + (1 + \bar{\beta} \bar{b})(\varepsilon_t - \varepsilon_a)]}{1 - \bar{\beta} \varepsilon_c}, \\ B^* &= \frac{\bar{\omega}_b \tau_1 [1 + \tau_0 (1 + \varepsilon_t)] + \tau_0 (1 + \bar{a} \bar{b})}{1 - \bar{\beta} \varepsilon_c}, \quad C^* = \frac{\bar{\omega}_b \tau_1 \tau_0}{1 - \bar{\beta} \varepsilon_c}. \end{aligned}$$

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (15) имеет вид

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^3 A_i K_0(k_i \xi p) + B_i I_0(k_i \xi p).$$

Тогда

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^3 A_i S_i K_0(k_i \xi p) + B_i S_i I_0(k_i \xi p),$$

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^3 A_i W_i K_0(k_i \xi p) + B_i W_i I_0(k_i \xi p),$$

где  $K_0, I_0$  — модифицированные функции Бесселя второго и первого рода нулевого порядка соответственно;  $k_1^2, k_2^2, k_3^2$  — корни характеристического уравнения (15). Поскольку на бесконечности функция  $I_0$  имеет особенность, коэффициент  $B_i$  нужно положить равным нулю. В результате получаем

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^3 A_i K_0(k_i \xi p); \quad (16)$$

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^3 A_i S_i K_0(k_i \xi p), \quad \bar{C} = \sum_{i=1}^3 A_i W_i K_0(k_i \xi p), \quad (17)$$

где

$$W_i = \frac{\bar{b}[(1 + \varepsilon_a)k_i^2 - p^2]}{\beta_1[(1 + \bar{\beta}b)k_i^2 - \bar{\omega}_b \tau_1 p^2]},$$

$$S_i = \frac{k_i^2 - p^2}{k_i^2 \beta_1} - \bar{\beta} W_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Подставляя (16) в (11), находим

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i K_1(k_i \xi p)}{k_i p}, \quad \bar{\sigma}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 A_i \left( \frac{1 - 2\delta^2}{k_i \xi p} K_1(k_i \xi p) + (1 - \bar{\beta}_1 S_i - \bar{\beta}_2 W_i) K_0(k_i \xi p) \right).$$

Начальные условия, условия регулярности и краевые условия принимаются в следующем виде:

$$U = T = C = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \xi \geq 1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$U = T = C = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty \quad \forall t.$$

Рассмотрим три варианта краевых условий.

1. На границе полости  $\xi = 1$  поддерживаются постоянными температура и концентрация и приложена ступенчатая нагрузка:

$$\sigma_{\xi\xi}(1, t) = \sigma_0 H(t), \quad T(1, t) = 0, \quad C(1, t) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (19)$$

2. На границе полости  $\xi = 1$  поддерживаются постоянными напряжение и концентрация и приложена ступенчатая температура:

$$\sigma_{\xi\xi}(1, t) = 0, \quad T(1, t) = T_0 H(t), \quad C(1, t) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

3. На границе полости  $\xi = 1$ , свободной от напряжений, температура поддерживается равной начальной и приложена ступенчатая концентрация:

$$\sigma_{\xi\xi}(1, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, \quad C(1, t) = C_0 H(t) \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

Применяя преобразование Лапласа к указанным выше краевым условиям, для варианта 1 получаем

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(1, p) = 1/p, \quad \bar{T}(1, p) = 0, \quad \bar{C}(1, p) = 0, \quad (20)$$

для варианта 2 —

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(1, p) = 0, \quad \bar{T}(1, p) = 1/p, \quad \bar{C}(1, p) = 0, \quad (21)$$

для варианта 3 —

$$\sigma_{\xi\xi}(1, p) = 0, \quad T(1, p) = 0, \quad C(1, p) = 1/p. \quad (22)$$

Используя краевые условия (19) в уравнениях (17) и учитывая (13), имеем

$$\sum_{i=1}^3 l_{ii} A_i = \frac{1}{p}, \quad l_{21} A_1 + l_{22} A_2 + l_{23} A_3 = 0, \quad l_{31} A_1 + l_{32} A_2 + l_{33} A_3 = 0. \quad (23)$$

Разрешая систему уравнений (23) относительно  $A_1, A_2, A_3$ , получаем

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = l_{11}(l_{22}l_{33} - l_{23}l_{32}) - l_{12}(l_{21}l_{33} - l_{23}l_{31}) + l_{13}(l_{21}l_{32} - l_{22}l_{31}). \quad (24)$$

В случае краевых условий (20)

$$\Delta_1 = \frac{l_{22}l_{33} - l_{23}l_{32}}{p}, \quad \Delta_2 = -\frac{l_{21}l_{33} - l_{23}l_{31}}{p}, \quad \Delta_3 = \frac{l_{21}l_{32} - l_{22}l_{31}}{p}, \quad (25)$$

в случае краевых условий (21)

$$\Delta_1 = \frac{l_{13}l_{32} - l_{12}l_{33}}{p}, \quad \Delta_2 = \frac{l_{11}l_{33} - l_{13}l_{31}}{p}, \quad \Delta_3 = \frac{l_{12}l_{31} - l_{11}l_{23}}{p},$$

в случае краевых условий (22)

$$\Delta_1 = \frac{l_{12}l_{23} - l_{13}l_{22}}{p}, \quad \Delta_2 = \frac{l_{13}l_{21} - l_{11}l_{23}}{p}, \quad \Delta_3 = \frac{l_{22}l_{11} - l_{12}l_{21}}{p}.$$

Здесь

$$l_{11} = \frac{1 - 2\delta^2}{k_1 p} K_1(k_1 p) + (1 - \bar{\beta}_1 S_1 - \bar{\beta}_2 W_1) K_0(k_1 p),$$

$$l_{12} = \frac{1 - 2\delta^2}{k_2 p} K_1(k_2 p) + (1 - \bar{\beta}_1 S_2 - \bar{\beta}_2 W_2) K_0(k_2 p),$$

$$l_{13} = \frac{1 - 2\delta^2}{k_3 p} K_1(k_3 p) + (1 - \bar{\beta}_1 S_3 - \bar{\beta}_2 W_3) K_0(k_3 p),$$

$$l_{21} = S_1 K_0(k_1 p), \quad l_{22} = S_2 K_0(k_2 p), \quad l_{23} = S_3 K_0(k_3 p),$$

$$l_{31} = W_1 K_0(k_1 p), \quad l_{32} = W_2 K_0(k_2 p), \quad l_{33} = W_3 K_0(k_3 p).$$

Используя приведенные выше выражения для смещения, температуры и концентрации, получаем

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta_i}{k_i p \Delta} K_1(k_i \xi p), \quad \bar{T} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta_i S_i}{\Delta} K_0(k_i \xi p), \quad \bar{C} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta_i W_i}{\Delta} K_0(k_i \xi p), \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1 - 2\delta^2}{k_i \xi p} K_1(k_i \xi p) + (1 - \bar{\beta}_1 S_i - \bar{\beta}_2 W_i) K_0(k_i \xi p) \right) \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

При больших значениях параметра  $p$  большими будут и константы  $k_i$  — корни уравнения (15). Асимптотические разложения модифицированных функций  $K_n(z)$  записываются следующим образом:

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \exp(-z) \left(1 + \frac{4n^2 - 1}{1!(8z)} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8z)^2}\right),$$

$$K_0(k_i p) \approx \left(\frac{\pi}{2k_i p}\right)^{1/2} \exp(-k_i p) \left(1 - \frac{1}{8k_i p} + \frac{9}{128k_i^2 p}\right),$$

$$K_1(k_i p) \approx \left(\frac{\pi}{2k_i p}\right)^{1/2} \exp(-k_i p) \left(1 + \frac{3}{8k_i p} - \frac{15}{128k_i^2 p}\right),$$

$$K_0(k_i \xi p) \approx \left(\frac{\pi}{2k_i \xi p}\right)^{1/2} \exp(-k_i \xi p) \left(1 - \frac{1}{8k_i \xi p} + \frac{9}{128k_i^2 \xi p}\right),$$

$$K_1(k_i \xi p) \approx \left(\frac{\pi}{2k_i \xi p}\right)^{1/2} \exp(-k_i \xi p) \left(+ \frac{3}{8k_i \xi p} - \frac{15}{128k_i^2 \xi p}\right).$$

Так как при отсутствии диффузии ( $a = 0 = \beta_2 \Rightarrow \varepsilon_C = 0 = \bar{b}$ )

$$\bar{W}_i^* = \begin{cases} 1, & i = 3, \\ 0, & i = 1, 2, \end{cases} \quad \bar{S}_i = \begin{cases} S_i^*, & i = 1, 2, \\ 0, & i = 3, \end{cases}$$

то из уравнения (15) следуют соотношения

$$k_1^{*2} + k_2^{*2} = 1 + \tau_0(1 + \varepsilon_T), \quad k_1^{*2} a k_2^{*2} = \tau_0, \quad k_3^{*2} = \bar{\omega}_b \tau_1.$$

Образы для перемещения и температуры имеют вид

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{p k_i^*} K_0(k_i^* \xi), \quad \bar{T} = \sum_{i=1}^2 \frac{k_i^{*2} - p^2}{p \bar{\beta}_1 k_i^{*2}} K_1(k_i^* \xi).$$

**3. Аппроксимация на малых временах.** Наличие демпфирующих членов в уравнениях (6) приводит к сложной зависимости корней  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) от параметра  $p$ . Таким образом, получить обратное преобразование сложно, поскольку невозможно выделить изолированные точки параметра  $p$ . Процедура обращения можно упростить, применяя методы аппроксимации.

Используем аппроксимацию решения на малом временном интервале, полагая, что второй звук мал и его длительность незначительна. Известно, что в общем случае в решении имеется три волны, распространяющиеся с конечными скоростями.

Для корней  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) уравнения (15) можно использовать степенные разложения. Удерживая в этих разложениях только положительные члены, получаем

$$k_i = \frac{1}{V_i} + \frac{\varphi_i}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad i = 1, 2, 3; \quad (27)$$

$$\sum \frac{1}{V_1^2} = \frac{1 + \bar{\omega}_b t_1 + t_0[(1 + \bar{a}\bar{b})(1 + \varepsilon_a) + (1 + \bar{\beta}\bar{b})(\varepsilon_T - \varepsilon_a)]}{1 - \bar{\beta}\varepsilon_c},$$

$$\sum \frac{1}{V_1^2 V_2^2} = \frac{t_0(1 + \bar{a}\bar{b}) + \bar{\omega}_b t_1[1 + t_0(1 + \varepsilon_T)]}{1 - \bar{\beta}\varepsilon_c}; \quad (28)$$

$$\sum \frac{1}{V_1^2 V_2^2 V_3^2} = \frac{\bar{\omega}_b t_1 t_0}{1 - \bar{\beta}\varepsilon_c},$$

$$\varphi_i = \frac{A^*V_i^4 - B^*V_i^2 + C^*}{V_i(V_j^2 - V_i^2)(V_k^2 - V_i^2)}, \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3,$$

$$A^* = \frac{t_1 + t_0}{2t_1t_0}, \quad B^* = \frac{1 + \bar{a}\bar{b} + \bar{\omega}_b[1 + (t_1 + t_0)(1 + \varepsilon_T)]}{2\bar{\omega}_bt_1t_0}, \quad C^* = \frac{\bar{\omega}_bt_0(1 + \bar{a}\bar{b})(1 + \varepsilon_a)}{2\bar{\omega}_bt_1t_0}.$$

Используя представление (27) в выражениях (18), (24), (25) и степенные разложения полученных соотношений, находим

$$S_i = S_{i0} + S_{i1}/p, \quad W_i = W_{i0} + W_{i1}/p;$$

$$l_{ii} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_i p}} \exp(-k_i p) \left( l_{i0} + \frac{l_{i1}}{p} \right); \quad (29)$$

$$l_{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_i p}} \exp(-k_i p) \left( l_{2i0} + \frac{l_{2i1}}{p} \right), \quad l_{3i} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_i p}} \exp(-k_i p) \left( l_{3i0} + \frac{l_{3i1}}{p} \right),$$

$$\Delta_1 = \frac{\pi}{2p^2 \sqrt{k_2 k_3}} \exp(-(k_2 + k_3)p) \left( \Delta_{10} + \frac{\Delta_{11}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right),$$

$$\Delta_2 = \frac{\pi}{2p^2 \sqrt{k_1 k_3}} \exp(-(k_1 + k_3)p) \left( \Delta_{20} + \frac{\Delta_{21}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right);$$

$$\Delta_3 = \frac{\pi}{2p^2 \sqrt{k_1 k_2}} \exp(-(k_1 + k_2)p) \left( \Delta_{30} + \frac{\Delta_{31}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right),$$

$$\Delta = \left( \frac{\pi}{2p} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}} \exp(-(k_1 + k_2 + k_3)p) \left( \Delta_0 + \frac{\Delta_{01}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right). \quad (30)$$

Используя (28) в выражениях (26), с учетом (30) получаем

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{R-1}} \left( \frac{\Delta_{i0}}{p\Delta_0} - \frac{\Delta_{i0}\Delta_{01} - \Delta_{ii}}{p^2\Delta_0} - \frac{V_i\Delta_{i0}}{8p^2(R-1)\Delta_0} - \frac{\Delta_{i0}\varphi_i V_i^2}{8p^3(R-1)\Delta_0} + \right. \\ \left. + \frac{V_i(\Delta_{i0}\Delta_{01} - \Delta_{ii})}{8p^3(R-1)} \exp\left(-\left(\frac{1}{V_i} + \frac{\varphi_i}{p}\right)pR\right) \right),$$

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{R-1}} \left[ \frac{\Delta_{i0}S_{i0}}{p\Delta_0} + \frac{1}{p^2} \left( \frac{(\Delta_{i0}S_{i0})V_i}{8\Delta_0(R-1)} + \frac{\Delta_{i0}S_{i1}}{\Delta_0} - \frac{\Delta_{i0}\Delta_{0i} - \Delta_{11}}{\Delta_0} \right) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{V_i} + \frac{\varphi_i}{p}\right)pR\right) \right],$$

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{R-1}} \left[ \frac{\Delta_{i0} W_{i0}}{p \Delta_0} - \frac{1}{p^2} \left( \frac{\Delta_{i0} W_{i0} V_i}{8 \Delta_0 (R-1)} - \frac{\Delta_{i0} W_{i1} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{11}) W_{i0}}{\Delta_0} \right) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{V_i} + \frac{\varphi_i}{p}\right)pR\right) \right],$$

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^3 \frac{\sqrt{V_i}}{\Delta_0 \sqrt{1-R}} \left[ \frac{\Delta_{i0}}{p^2} + \frac{1}{p^3} \left( \frac{3V_i}{8(1-R)} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{i1}) \right) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{p^4}\right) \right] \exp\left(-\left(\frac{1}{V_i} + \frac{\varphi_i}{p}\right)pR\right),$$

где  $R = 1 + \xi$ . С помощью обратного преобразования Лапласа получаем

$$e = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \left( \frac{V_i \Delta_{i0}}{8(R-1)} + (\Delta_{i0} \Delta_{01} - \Delta_{ii}) \right) \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8(R-1)} (\Delta_{i0} \varphi_i V_i^2 + V_i (\Delta_{i0} \Delta_{01} - \Delta_{ii})) \left(t - \frac{R}{V_i}\right)^2 H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) \right] e^{-\varphi_i R},$$

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} S_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \left( \frac{(\Delta_{i0} S_{i0}) V_i}{8(R-1)} + \Delta_{i0} S_{i1} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{11}) \right) \times \right. \quad (31) \\ \left. \times \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R},$$

$$C = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} W_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \left( \frac{\Delta_{i0} W_{i0} V_i}{8(R-1)} - \Delta_{i0} W_{i1} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{11}) W_{i0} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R},$$

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{\sqrt{V_i}}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \left( \frac{3V_i}{8(1-R)} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{i1}) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(t - \frac{R}{V_i}\right)^2 H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R},$$

где

$$R = 1 + \xi, \quad S_{i0} = \frac{1}{\beta_1} (1 - V_i^2) - \bar{\beta} \bar{W}_{i0}, \quad S_{i1} = \frac{2\varphi_i V_i}{\beta_1} [2(1 - V_i^2) - \bar{\beta} \bar{W}_{i1}],$$

$$W_{i0} = \frac{\bar{b}[(1 + \varepsilon_a) - V_i^2]}{\beta_1[(1 + \beta \bar{b}) - \bar{\omega}_b \tau_1 V_i^2]}, \quad W_{i1} = \bar{b} \frac{\bar{b}[2\varphi_i V_i(1 + \varepsilon_a)]}{\beta_1(1 + \beta \bar{b} - \bar{\omega}_b \tau_1 V_i^2)},$$

$$l_{1i0} = 1 - \bar{\beta}_1 S_{i0} - \bar{\beta}_2 W_{i0}, \quad l_{1i1} = V_i(1 - 2\delta^2) + (1 - \bar{\beta}_1 \bar{S}_{i0} - \bar{\beta}_2 \bar{W}_{i0}) V_i / 8 - (\bar{\beta}_1 S_{i1} + \bar{\beta}_2 W_{i1}),$$

$$l_{2i0} = S_{i0}, \quad l_{2i1} = S_{i1} - V_i S_{i0} / 8, \quad l_{3i0} = W_{i0}, \quad l_{3i1} = W_{i1} - V_i W_{i0} / 8, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Delta_{10} = l_{220} l_{330} - l_{230} l_{320}, \quad \Delta_{20} = S_{30} W_{10} - S_{10} W_{30}, \quad \Delta_{30} = S_{10} W_{20} - S_{20} W_{10},$$

$$\Delta_0 = \Delta_{10} l_{110} - \Delta_{20} l_{120} + \Delta_{30} l_{130},$$

$$\Delta_{01} = \Delta_{11} l_{110} + \Delta_{10} l_{111} + \Delta_{21} l_{120} + \Delta_{20} l_{121} + \Delta_{31} l_{130} + \Delta_{30} l_{131}.$$

**4. Обсуждение результатов.** Из уравнений (31) следует, что волны смещения, температуры, концентрации и расширения распространяются с конечной скоростью. На больших временах функции быстро убывают. Однако на малых временах наблюдается медленная сходимость разложений, поэтому большое значение имеет исследование поведения функций на таких временах. Значение функции Хевисайда равно нулю при  $t \leq R/V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и единице при  $t > R/V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Из приведенного выше решения на малых временах следует, что оно содержит три волны (упругую, температурную и волну диффузии вещества), распространяющиеся со скоростями  $V_1, V_2, V_3$  соответственно. В случае приложения нормальной нагрузки расширение, температура, концентрация и смещение разрывны на фронте волны. Скачки соответствующих величин на фронте волны определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
[e^+ - e^-]_{R=V_i t} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \right. \\
&\quad - \left( \frac{V_i \Delta_{i0}}{8(R-1)} + (\Delta_{i0} \Delta_{01} - \Delta_{ii}) \right) \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \\
&\quad \left. - \frac{1}{8(R-1)} (\Delta_{i0} \varphi_i V_i^2 + V_i (\Delta_{i0} \Delta_{01} - \Delta_{ii})) \left(t - \frac{R}{V_i}\right)^2 H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) \right] e^{-\varphi_i R}, \\
[T^+ - T^-]_{R=V_i t} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} S_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{(\Delta_{i0} S_{i0}) V_i}{8(R-1)} + \Delta_{i0} S_{i1} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{11}) \right) \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R}, \\
[C^+ - C^-]_{R=V_i t} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta_0 \sqrt{R-1}} \left[ \Delta_{i0} W_{i0} H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\Delta_{i0} W_{i0} V_i}{8(R-1)} - \Delta_{i0} W_{i1} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{11}) W_{i0} \right) \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R}, \\
[U^+ - U^-]_{R=V_i t} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\sqrt{V_i}}{\Delta_0 \sqrt{1-R}} \left[ \Delta_{i0} \left(t - \frac{R}{V_i}\right) H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{3V_i}{8(1-R)} - (\Delta_{i0} \Delta_{0i} - \Delta_{i1}) \right) \left(t - \frac{R}{V_i}\right)^2 H\left(t - \frac{R}{V_i}\right) + \dots \right] e^{-\varphi_i R}.
\end{aligned}$$

Ниже представлены результаты численного анализа задачи с использованием приведенного выше аналитического решения. Материал среды — латунь (сплав меди и цинка 70 % Cu — 30 % Zn) — имеет следующие физические характеристики:  $\lambda = 7,69 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> [19],  $\mu = 3,61 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> [19],  $\rho = 8,522 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> [20],  $C_e = 385$  Дж/(кг · К) [20],  $K = 111$  Вт/(м · К) [20],  $\alpha_T = 2 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup> [20],  $D = 0,24 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с [19],  $\alpha_C = 1,8 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> [19],  $a = 15,21$  м/с [13],  $b = 200$  м/с [13],  $T_0 = 293$  К [20].

Значение размерного параметра температурной релаксации  $t_0$  вычислено из соотношения  $t_0 = 3K/[\rho C_e C_L^2]$  [18], значение параметра  $t_1$  принималось пропорциональным значению  $t_0$ . Соответствующие безразмерные параметры были приняты равными  $t_0 = 0,5$ ,  $t_1 = 0,3$ .

Зависимости смещения, температуры и концентрации от радиальной координаты  $\xi$  определены для двух моментов времени.

**5. Обратное преобразование Лапласа и решение задачи.** В данном пункте с использованием численных методов обращения преобразования Лапласа определяются значения физических величин, содержащихся в решении, при всех значениях времени. Для того чтобы получить решение задачи, необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа в уравнениях (18), (26). Преобразование Лапласа задается формулой

$$\bar{g}(x, p) = \int_0^{\infty} g(x, t) e^{-pt} dt.$$

Обратное преобразование Лапласа вычисляется по формуле

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{g}(p) e^{pt} dp, \quad (32)$$

где  $\gamma$  — вещественное число, превышающее вещественные части всех особых точек функции  $\bar{g}(p)$ . Интеграл (32) можно вычислить путем подстановки  $p = \gamma + iy$ :

$$g(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\gamma + iy) e^{ity} dy.$$

Разлагая в ряд Фурье функцию  $g(t) e^{-\gamma t}$  на интервале  $[0, 2l]$ , получаем приближенную формулу

$$g(t) = g_{\infty}(t) + E_D, \quad (33)$$

где

$$g_{\infty}(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k, \quad 0 \leq t \leq 2l, \quad C_k = \frac{e^{\gamma t}}{l} \operatorname{Re} \left[ \bar{g} \left( \gamma + \frac{ik\pi}{l} \right) \exp \left( \frac{ik\pi t}{l} \right) \right].$$

Ошибка дискретизации  $E_D$  может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения параметра  $\gamma$ .

В выражении (33) можно ограничиться конечным числом  $N$  членов ряда. При этом появляется еще одна ошибка — ошибка усечения. В результате получаем следующее приближенное выражение для функции  $g(t)$ :

$$g_N(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^N C_k, \quad 0 \leq t \leq 2l.$$

Корректор-метод используется для уменьшения ошибки дискретизации,  $\varepsilon$ -алгоритм — для уменьшения ошибки усечения и, следовательно, для ускорения сходимости рядов. С помощью корректор-метода оценивается функция

$$g(t) = g_{\infty}(t) - e^{-2\gamma l} g_{\infty}(2l + t) + E'_D,$$

где  $|E'_D| < |E_D|$ . Приближенное выражение для этой функции принимает вид

$$g_{N_K}(t) = g_N(t) - e^{-2\gamma l} g_{N'}(2l + 1), \quad (34)$$

где  $N$  — целое число, такое что  $N' < N$ .

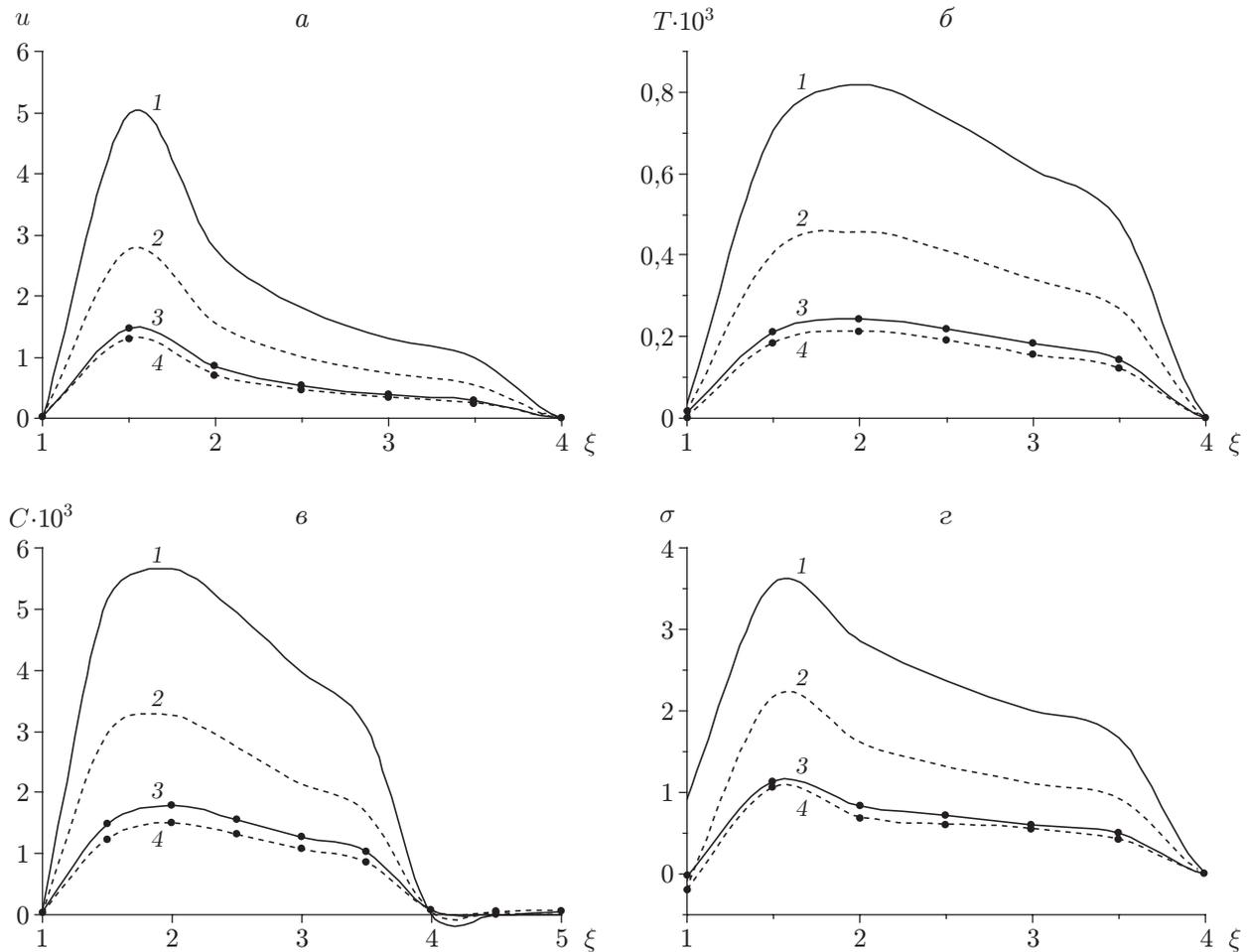


Рис. 1. Зависимости  $u(\xi)$  (а),  $T(\xi)$  (б),  $C(\xi)$  (в),  $\sigma(\xi)$  (г) в случае, когда на границе полости задано напряжение:  
 1 —  $t = 0,1$ ; 2 —  $t = 0,2$ ; 3 —  $t = 0,5$ ; 4 —  $t = 0,75$

Опишем  $\varepsilon$ -алгоритм, используемый для ускорения сходимости рядов. Пусть  $N$  — нечетное натуральное число,  $s_m = \sum_{k=1}^N C_k$  — частичная сумма ряда (29). Определим  $\varepsilon$ -последовательность следующим образом:

$$\varepsilon_{0,m} = 0, \quad \varepsilon_{1,m} = s_m,$$

$$\varepsilon_{n+1,m} = \varepsilon_{n-1,m+1} - \frac{1}{\varepsilon_{n,m+1} - \varepsilon_{n,m}}, \quad n, m = 1, 2, 3.$$

Можно показать, что последовательность частичных сумм  $\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{3,1}, \dots, \varepsilon_{N+1,1}$  сходится к функции  $g(t) + E_D - C_0/2$  быстрее, чем последовательность частичных сумм  $s_m, m = 1, 2, 3, \dots$

Для вычисления обратного преобразования функции (34) используется  $\varepsilon$ -алгоритм. Значения параметров  $\gamma, l$  выбираются согласно критерию, предложенному в работе [21].

На рис. 1–3 представлены зависимости смещения, температуры, концентрации и нормального напряжения от координаты  $\xi$  в различные моменты времени. Графики, приведенные на рис. 1, соответствуют случаю задания на границе полости нормального напря-

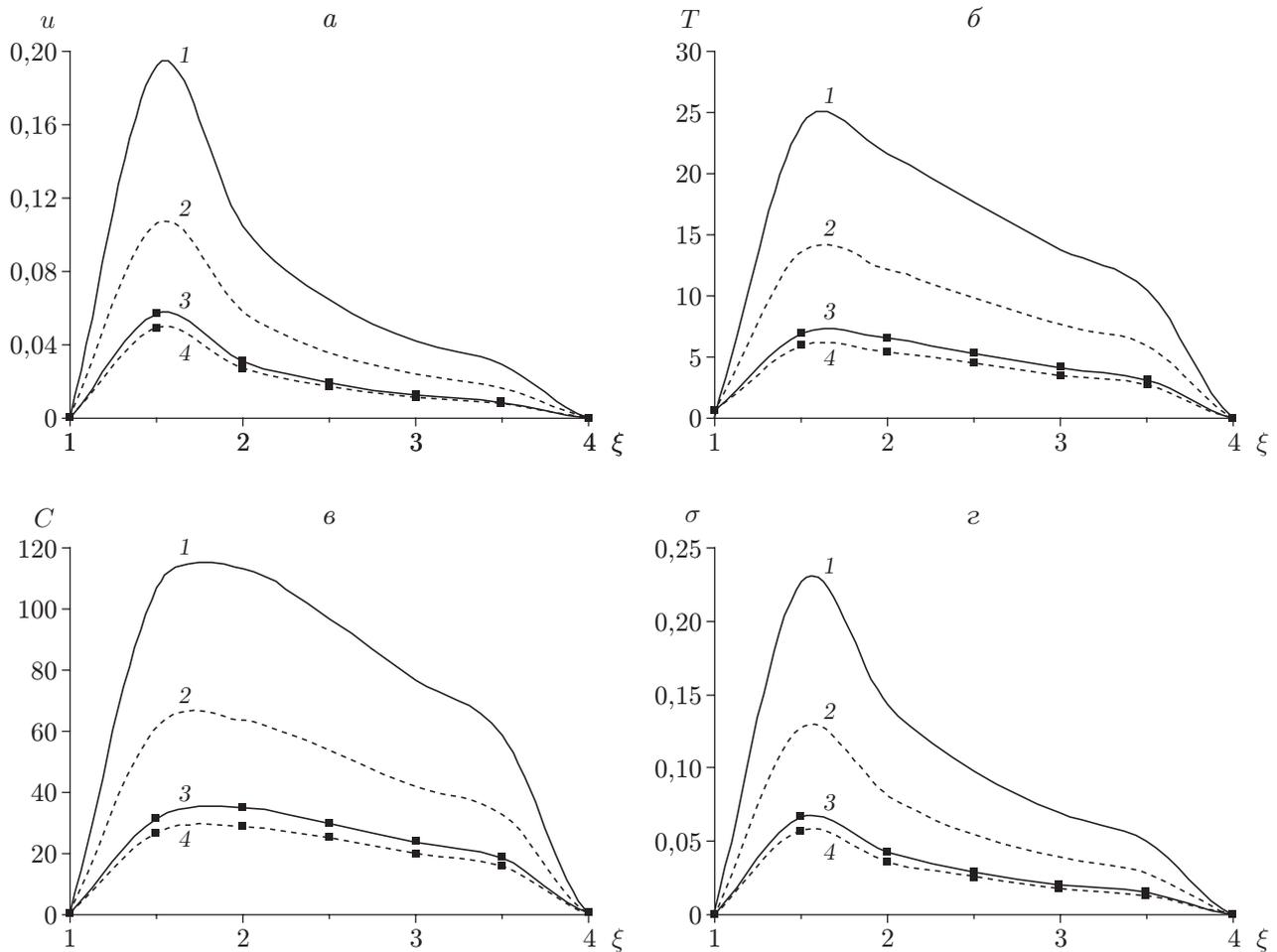


Рис. 2. Зависимости  $u(\xi)$  (а),  $T(\xi)$  (б),  $C(\xi)$  (в),  $\sigma(\xi)$  (г) в случае, когда на границе полости задана температура (обозначения те же, что на рис. 1)

жения, на рис. 2 — случаю задания на границе полости температуры, на рис. 3 — случаю задания на границе полости концентрации. Из рис. 1–3 следует существование волновых фронтов напряжения, температуры и концентрации.

**Заключение.** В работе в рамках одномерной модели с использованием связанной термодиффузионной модели упругого тела Лорда — Шульмана описано поведение сплошной среды под действием температуры, напряжения и концентрации.

Задача для радиально-симметричного цилиндра сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных с независимыми переменными  $r$  и  $t$ , для решения которой применяется преобразование Лапласа по переменной  $t$ .

Получены аналитические выражения для напряжения, перемещения, температуры и концентрации. Для вычисления обратного преобразования Лапласа используется численная процедура.

По мере удаления от границы полости значения всех физических величин стремятся к нулю, что свидетельствует о существовании волновых фронтов. С увеличением времени влияние теплового источника становится менее существенным. Следовательно, время

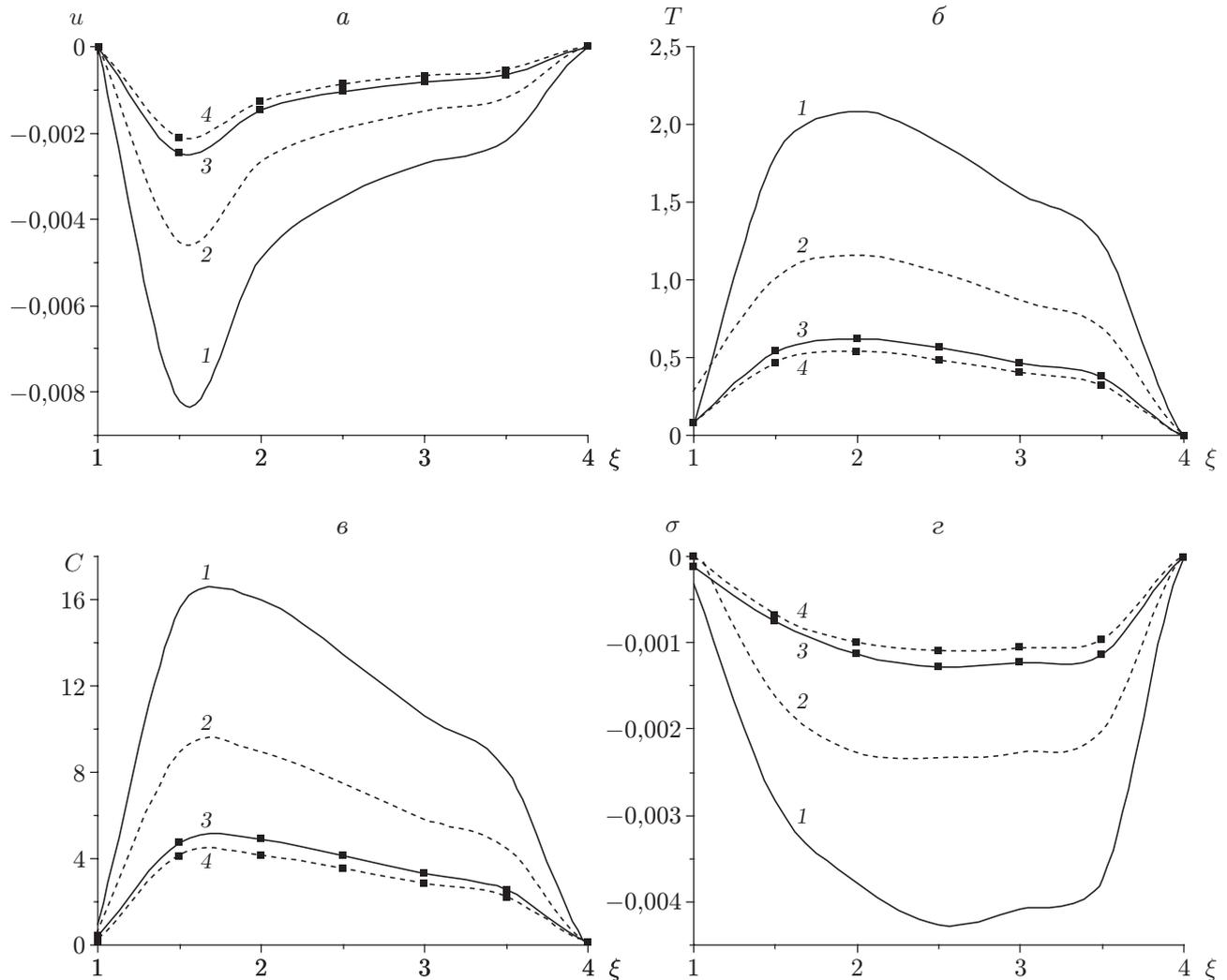


Рис. 3. Зависимости  $u(\xi)$  (а),  $T(\xi)$  (б),  $C(\xi)$  (в),  $\sigma(\xi)$  (г) в случае, когда на границе полости задана концентрация (обозначения те же, что на рис. 1)

имеет большее значение при описании физических величин. В среде, имеющей большую протяженность, волновой фронт отсутствует.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lord H., Shulman Y. A general dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
2. Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 1–7.
3. Sharma J. N. Transient generalized thermoelastic waves in a transversely isotropic medium with a cylindrical hole // Intern. J. Engng Sci. 1987. V. 25. P. 463–471.
4. Chandrasekharaiah D. S., Srinath K. S. Axisymmetric thermoelastic interaction without energy dissipation in an unbounded body with cylindrical cavity // J. Elasticity. 1997. V. 46. P. 19–31.
5. Erbay S., Suhubi E. S. Longitudinal wave propagation in a generalized thermoelastic cylinder // J. Thermal Stresses. 1986. V. 9. P. 279–285.

6. **Noda N., Furukawa T., Ashida F.** Generalized thermoelasticity in an infinite solid with a hole // *J. Thermal Stresses*. 1989. V. 12. P. 385–402.
7. **Furukawa T., Noda N., Ashida F.** Generalized thermoelasticity for an infinite solid cylinder // *Intern. J. JSME*. 1991. V. 34. P. 281–286.
8. **Youssef H. M.** Problem of generalized thermoelastic infinite medium with cylindrical cavity subjected to a ramp-type heating and loading // *Arch. Appl. Mech.* 2006. V. 75. P. 553–565.
9. **Youssef H. M.** Generalized thermoelastic infinite medium with cylindrical cavity subjected to moving heat source // *Mech. Res. Comm.* 2009. V. 36. P. 487–496.
10. **Hunti Al, Al-Nimr N. S., Najji M. A.** Dynamic response of rod due to a moving heat source under hyperbolic heat conduction model // *J. Sound Vibration*. 2001. V. 242. P. 629–640.
11. **Sherief H., Megahed F. A.** A two dimensional thermoelasticity problem for a half space subjected to heat source // *Intern. J. Solids Structures*. 1999. V. 36. P. 1369–1382.
12. **Sherief H. H., Hamza F. A., Saleh H. A.** The theory of generalized thermoelastic diffusion // *Intern. J. Engng Sci.* 2004. V. 42. P. 591–608.
13. **Sherief H. H., Saleh H. A.** A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Intern. J. Solids Structures*. 2005. V. 42. P. 4484–4493.
14. **Sharma J. N.** Generalized thermoelastic diffusive waves in heat conducting materials // *J. Sound Vibrations*. 2007. V. 301. P. 979–993.
15. **Sharma J. N., Sharma Y. D., Sharma P. K.** On the propagation of elasto-thermodiffusive surface waves in heat conducting materials // *J. Sound Vibration*. 2008. V. 315. P. 927–938.
16. **Sharma J. N., Kumari N., Sharma K. K.** Disturbance due to thermal and mass loads in elasto-thermodiffusive solids // *Intern. J. Thermophys.* 2009. V. 30. P. 1697–1723.
17. **Sharma J. N., Sharma N. K., Sharma K. K.** Transient waves due to mechanical loads in elasto-thermodiffusive solids // *J. Adv. Math. Mech.* 2011. V. 3. P. 87–108.
18. **Chandrasekharaiah D. S.** Thermoelasticity with second sound — a review // *Appl. Mech. Rev.* 1986. V. 39. P. 355–376.
19. **Callister W. D. (Jr.)** *Material science and engineering: An introduction*. 6th ed. N. Y.: John Wiley, 2003.
20. **Thomas L. C.** *Heat transfer*. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1993.
21. **Honig H., Hirdes U.** A method for numerical inversion of Laplace transform // *J. Comput. Appl. Math.* 1984. V. 101. P. 3–132.

*Поступила в редакцию 27/III 2012 г.*

---