

ДВЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ АГРЕССИВНОЙ ЖИДКОСТИ
В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. И. Пеньковский

(Новосибирск)

При фильтрации жидкости сквозь пористую среду возможны случаи, когда фильтрующаяся жидкость вступает в реакцию с материалом среды, в результате чего величина порового пространства изменяется.

Примерами подобных явлений являются реакции растворения солей, находящихся в почве, выщелачивание горных пород и т. п. Рассматриваемые ниже задачи о движении несжимаемой жидкости, поступающей в круглую трубу (капилляр) или щель и реагирующей с ее стенками, представляющие некоторый интерес в приложениях, могут служить простейшими моделями упомянутых выше процессов.

1. Движение жидкости в трубке. Пусть $Q(x, t)$ — объемный расход жидкости, $R(x, t)$ — внутренний радиус трубки, $C(x, t)$ — концентрация жидкости, C_* — концентрация предельного насыщения, t — время, ось x направлена вдоль трубки. Предположим, что между жидкостью и материалом стенок трубки протекает реакция первого порядка, в результате которой радиус трубки увеличивается. Под реакцией первого порядка понимается реакция, скорость которой пропорциональна величине омываемой поверхности стенок и недостатку насыщения протекающего раствора [1].

Пусть за время dt на участке длины dx радиус трубки увеличился на dR . Тогда, обозначая через ρ_1 — плотность материала стенок, будем иметь

$$\rho_1 [\pi (R + dR)^2 dx - \pi R^2 dx] = A 2\pi R dx (C_* - C) dt$$

откуда получим уравнение кинетики реакции вида

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{A}{\rho_1} (C_* - C) \quad (1.1)$$

Здесь A — константа (коэффициент солеотдачи в случае реакции растворения). Уравнения баланса массы растворенного вещества и движущейся массы раствора запишутся так:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (QC) + 2\pi AR (C_* - C) = \frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2 C), \quad -\frac{d}{dx} (Q\rho) = \frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2 \rho) \quad (1.2)$$

где ρ — плотность раствора, зависящая от его концентрации. С некоторым приближением можно считать эту зависимость линейной

$$\rho = \rho_0 (1 + \gamma c) \quad (c = C/C_*) \quad (1.3)$$

Здесь ρ_0 — плотность растворителя (воды), γ — константа. Введем безразмерные величины

$$q = \frac{Q}{\pi Q_0}, \quad a = 2A \frac{R_0^2}{Q_0}, \quad v_1 = \frac{C_*}{2\rho_1}, \quad \xi = \frac{ax}{R_0}, \quad \tau = \frac{atQ_0}{R_0^3}, \quad r = \frac{R}{R_0}$$

(здесь $Q_0 = \text{const}$ — расход во входном сечении трубы, $R_0 = \text{const}$ — радиус трубки в начальный момент времени $t = 0$).

Для нахождения искомых функций $c(\xi, \tau)$, $r(\xi, \tau)$, $q(\xi, \tau)$ получим систему вида

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial c}{\partial \tau} + q \frac{\partial c}{\partial \xi} &= r(1-c)(1+\gamma c) \\ \frac{\partial r}{\partial \tau} &= v_1(1-c), \quad \frac{\partial q}{\partial \xi} = -r(1-c)(2v_1 + \gamma) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если до момента времени $t = 0$ жидкость в трубу не поступала, или в ней содержался раствор предельной концентрации, а при $t > 0$ началась подача растворителя с некоторым расходом Q_0 , то граничные условия для системы (1.4) запишутся так:

$$q = 1, \quad c = 0; \quad \xi = 0, \quad \tau > 0; \quad r = 1; \quad \xi = \xi_*(\tau), \quad \tau \geq 0 \quad (1.5)$$

При этом функция $\xi_*(\tau)$ должна удовлетворять кинематическому условию вида (уравнение характеристики системы (1.4)):

$$\frac{d\xi_*}{d\tau} = \frac{q(\xi_*, \tau)}{r^2(\xi_*, \tau)} = q(\xi_*, \tau) \quad (\xi_*(0) = 0) \quad (1.6)$$

и отыскиваться вместе с функциями $c(\xi, \tau)$, $r(\xi, \tau)$, $q(\xi, \tau)$, определенными в области

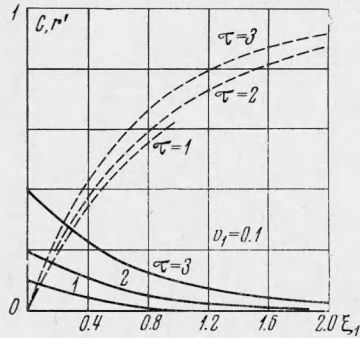
$$\xi < \xi_*(\tau), \quad \tau > 0$$

Задача (1.4) — (1.6) нелинейна. В целях ее упрощения проведем линеаризацию при помощи метода малых возмущений.

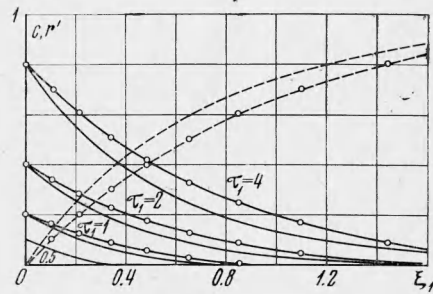
Положим

$$r = 1 + r', \quad c = c', \quad q = 1 + q' \quad (1.7)$$

где добавки r' , c' , q' малы, так что произведением и квадратами этих величин можно пренебречь.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кроме того, поскольку концентрация раствора предполагается малой, а увеличение плотности раствора с ростом его концентрации, как правило, не велико, то примем здесь $\gamma = 0$.

Подставим (1.7) в первые два уравнения системы (1.4); введем новые независимые переменные $x_1 = \xi$, $x_2 = \tau - \xi$, отбрасывая малые величины высших порядков, получим

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = r' + 1 - c', \quad \frac{\partial r'}{\partial x_2} = v_1(1 - c') \quad (1.8)$$

В условии (1.6) положим $q \approx 1$ и найдем $\xi_*(\tau) \equiv \tau$; граничные условия (1.5) для функций $c'(x_1, x_2)$ и $r'(x_1, x_2)$ примут вид

$$c' = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \geq 0; \quad r' = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \geq 0 \quad (1.9)$$

Пусть

$$c_1(x_1, p) = \int_0^{\infty} c' e^{-px_2} dx_2, \quad r_1 = \int_0^{\infty} r' e^{-px_2} dx_2$$

изображение Лапласа функций c' и r' . Умножая уравнения (1.8) на ядро изображения, интегрируя по x_2 в пределах от 0 до ∞ , принимая во внимание второе условие (1.9), найдем

$$\frac{dc_1}{dx_1} = r_1 + \frac{1}{p} - c_1, \quad pr_1 = v_1 \left(\frac{1}{p} - c_1 \right)$$

Исключая r_1 и интегрируя полученное дифференциальное уравнение с учетом первого условия (1.9), будем иметь

$$c_1(x_1, p) = p^{-1} \{ 1 - \exp[-x_1(1 + v_1/p)] \}$$

Переходя от изображения к оригиналу [2], найдем

$$c = c'(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1} J_0(2 \sqrt{v_1 x_1 x_2})$$

Из первого уравнения системы (1.8) определим

$$r' = -1 + c' + \frac{\partial c'}{\partial x_1} = e^{-x_1} \sqrt{\frac{v_1 x_2}{x_1}} J_1(2 \sqrt{v_1 x_1 x_2})$$

Здесь $J_0(z)$, $J_1(z)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

Таким образом, решение линеаризованной задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) &= 1 - e^{-\xi} J_0[2 \sqrt{v_1 \xi (\tau - \xi)}] \\ r(\xi, \tau) &= 1 + e^{-\xi} \sqrt{v_1 (\tau - \xi) / \xi} J_1[2 \sqrt{v_1 \xi (\tau - \xi)}] \\ q(\xi, \tau) &= 1 - 2v_1 \int_0^\xi e^{-\xi} \sqrt{v_1 (\tau - \xi) / \xi} J_1[2 \sqrt{v_1 \xi (\tau - \xi)}] d\xi \end{aligned}$$

В частности,

$$r(0, \tau) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [1 + e^{-\xi} \sqrt{v_1 (\tau - \xi) / \xi} \sqrt{v_1 \xi (\tau - \xi)}] = 1 + v_1 \tau$$

На фиг. 1 сплошными и пунктирными линиями представлены графики функций $r'(\xi, \tau)$ и $c(\xi, \tau)$ соответственно для $\tau = 1, 2, 3$; $v_1 = 0.1$.

2. Движение жидкости в глубь бесконечной щели. Пусть $2D$ — толщина щели, $Q_1 = Q/2$ — половинный расход, рассчитанный на единицу длины щели. Тогда уравнения сохранения массы растворимого вещества, находящегося в твердой фазе и в растворе, а также уравнение сохранения массы, движущейся в глубь щели раствора, имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial D}{\partial t} &= A(C_* - C) \\ - \frac{\partial}{\partial x} (Q_1 C) + A(C_* - C) &= \frac{\partial}{\partial t} (DC) \\ - \frac{\partial}{\partial x} (Q_1 \rho) &= \frac{\partial}{\partial t} (D\rho) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем безразмерных переменных формулами

$$\xi = \frac{Ax}{Q_0}, \quad \tau = \frac{At}{D_0}, \quad c = \frac{C}{C_*}, \quad r = \frac{D}{D_0}, \quad v_2 = \frac{C_*}{\rho_1}, \quad q = \frac{Q_1}{Q_0}, \quad p = 1 - c$$

система (2.1) после простых преобразований приводится, принимая во внимание (1.3), к виду

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = v_2 p, \quad q \frac{\partial p}{\partial \xi} + r \frac{\partial p}{\partial \tau} = -p(1 - \gamma + \gamma p), \quad \frac{\partial q}{\partial \xi} = -(v_2 + \gamma) p \quad (2.2)$$

Здесь Q_0 — половинный расход растворителя, поступающего через сечение с абсциссой $x = 0$, $2D_0$ — начальное раскрытие щели.

Граничные условия для системы (2.2) запишутся так:

$$p = q = 1, \quad \xi = 0; \quad r = 1, \quad \xi = \xi_*(\tau) \quad (2.3)$$

где $\xi_*(\tau)$ удовлетворяет уравнению (1.6).

В этом случае функции p и q , определенные в области $0 < \xi < \xi_*$, $\tau > 0$ не будут явным образом зависеть от переменной τ . Полагая $\partial p / \partial \tau = 0$, из системы (2.2) найдем

$$q \frac{dp}{dq} = \frac{1 - \gamma + \gamma p}{v_2 + \gamma}, \quad r(\xi, \tau) - r(\xi_*, \tau) = v_2 p (\tau - \tau_*)$$

Отсюда с учетом (2.3) получим

$$1 - \gamma + \gamma p = q^\delta \quad (2.4)$$

$$r = 1 + v_2 p (\tau - \tau_*) \quad (\delta = \gamma / (v_2 + \gamma))$$

Здесь $\tau_* = \tau_*(\xi)$ функция, обратная функции $\xi_*(\tau)$.

При помощи подстановки значения p из (2.4) третье уравнение системы (2.2) приводится к виду

$$\delta \frac{dq}{d\xi} = 1 - \gamma - q^\delta$$

Отсюда с учетом (2.3) получим

$$\xi = \delta \int_1^q \frac{dq}{1 - \gamma - q^\delta} = \delta I_1(\gamma, \delta, q) \quad (2.5)$$

Из (2.5), в частности, следует:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} q(\xi) = q_\infty = (1 - \gamma)^{1/\delta}, \quad \xi \rightarrow \infty$$

т. е. на достаточном удалении от входа в щель расход жидкости, уменьшаясь, стремится к некоторому постоянному значению $q_\infty < 1$. Перепишем (1.6) в виде

$$\frac{d\tau_*}{d\xi} = \frac{1}{q} \quad (\tau_*(0) = 0)$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$\tau_* = \int_0^\xi \frac{d\xi}{q} = \int_1^q \frac{d\xi}{dq} \frac{dq}{q} = \delta \int_1^q \frac{dq}{q(1 - \gamma - q^\delta)} = \delta I_2(\gamma, \delta, q)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к квадратурам, которые в общем случае, при произвольных $\gamma, \delta \neq 0$ можно осуществить численно.

В качестве примеров рассмотрим два частных случая.

Пример 1. Положим $v_2 = \gamma$. В этом случае $\delta = 0.5$ и вычисление интегралов приводит к зависимостям

$$q = (1 - \gamma + \gamma p)^2 = (1 - \gamma c)^2$$

$$\xi = \gamma(1 - p) - (1 - \gamma) \ln p = \gamma c - (1 - \gamma) \ln(1 - c)$$

$$\tau_* = \frac{1}{1 - \gamma} \ln \frac{1 - \gamma c}{1 - c}, \quad r = i_* + \gamma(i - c) \left(\tau - \frac{1}{1 - \gamma} \ln \frac{1 - \gamma c}{1 - c} \right)$$

Пример 2. Пусть $\gamma = 0, v_2 \neq 0$. В этом случае $\delta = 0$ и получим

$$q dp/d\xi = -p, \quad dq/d\xi = -v_2 p$$

Отсюда $q dp/dq = 1/v_2$ ($p = 1, q = 1$)

$$q = \exp[v_2(p - 1)] = \exp(-v_2 c)$$

Таким образом

$$\exp[v_2(p - 1)] dp/d\xi = -p$$

и, интегрируя это с учетом (2.3), найдем

$$\xi = e^{-v_2 \tau} [\text{Ei}(-v_2) - \text{Ei}(-v_2 p)] \quad \left(\text{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

Аналогично предыдущему примеру

$$\tau_* = -\ln p, \quad r = 1 + v_2 p (\tau + \ln p)$$

На фиг. 2 сплошными и пунктирными линиями представлены графики функций $r' = r - 1$ и c соответственно для $v_2 = 0.2$. Кругочками отмечены кривые относящиеся к примеру 1. Из графиков, в частности, видно, что предположение $\gamma = 0$ приводит к нескольким завышенным значениям c и заниженным значениям r' .

Поступила 15 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Богусский И. Г., Каяндер Н. О. О скорости химических реакций. Ж. Российского физ.-хим. об-ва, 1876, т. 8.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М., Гостехтеоретиздат, 1951.