

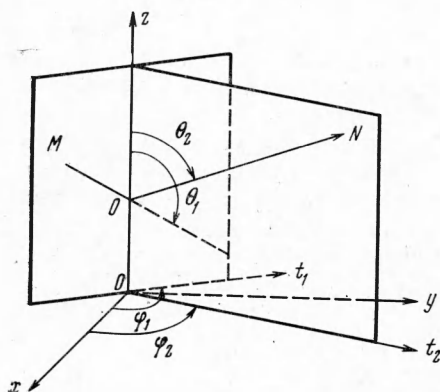
О ВЛИЯНИИ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ПРОЦЕСС ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. Л. Ложкин, Ю. А. Рыжов

(Москва)

Исследуется влияние шероховатости на отражение молекул разреженного газа от поверхности твердого тела. Выводится формула для трансформанты однократного отражения от произвольной однородной шероховатости, допускающая несложное программирование на ЭВМ. Рассматривается простая аппроксимация этой формулы, применимая в широком диапазоне изменения параметров шероховатости и угла падения молекул газа на поверхность. На основе аппроксимации рассчитываются угловые распределения отраженных молекул и приводится их сравнение с аналогичными распределениями, взятыми из работы [1].

Результат взаимодействия молекул разреженного газа с поверхностью твердого тела при заданной скорости падения u_1 характеризуется плотностью F распределения молекул по скоростям отражения u_2 (фиг. 1). Благодаря наличию шероховатости, отражение молекулы от поверхности может произойти после одного, двух и т. д. столкновений с микронеровностями. Поэтому величину F удобно представить в виде [1]



Фиг. 1

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$$

где F_n — плотность распределения молекул, отраженных после n — кратного столкновения с микронеровностями (трансформанта n — кратного отражения). Обычно из этого ряда достаточно знать лишь его первый член — F_1 , так как молекулы, испытавшие более одного столкновения,

практически полностью аккомодируют к условиям на поверхности.

Задача о влиянии шероховатости на структуру F_1 (при известном законе F_0 отражения молекул от идеально гладкой поверхности) рассматривалась в литературе главным образом в упрощенной постановке, при которой шероховатость считалась пологой (мала дисперсия наклонов σ_t^2) и изотропной, а закон отражения F_0 — зеркальным. Более полное исследование структуры F_1 дано в работе [1], где рассмотрена общая задача отражения от однородной изотропной поверхности и предложена простая аппроксимация на случай нормальной пологой шероховатости ($\sigma_t \lesssim 0,3$) при углах падения θ_1 , не близких к 90° . Асимптотика F_1 при $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$, $\sigma_t \rightarrow 0$ рассмотрена в работе [2]. Однако в остальных случаях полученное в [1] решение принимает весьма громоздкий вид и становится мало доступным для численных расчетов. Кроме того, оно не учитывает анизотропность реальных поверхностей.

С целью получения более удобного общего выражения для F_1 , которое учитывало бы также и анизотропность поверхностей, рассмотрим следующий метод нахождения искомой трансформанты.

Пусть молекула газа испытывает однократное взаимодействие с поверхностью твердого тела, т. е. происходят следующие события (фиг. 1): A — свободный пролет молекулы со скоростью u_1 вдоль луча MO из бесконечности до некоторой точки O ; B — взаимодействие с поверхностью в окрестности точки O ; C — поверхность в окрестности точки O ориентирована своей нормалью в элементарный телесный угол $d\omega_0 = \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$; D — отражение от поверхности со скоростью u_2 в интервале du_2 ; E — свободный пролет вдоль луча ON от точки O до бесконечности.

Искомая трансформанта находится при этом из выражения [1]

$$F_1 du_2 = \int_{z_0=-\infty}^{z_0=\infty} \int_{\varphi_0} \int_{\theta_0} p(ABCDE) \quad (1)$$

где $p(ABCDE)$ — вероятность произведения указанных выше событий. Пределы интегрирования по углам φ_0 и θ_0 определяются начальными условиями и зависят от углов φ_1 , φ_2 , θ_1 и θ_2 . В аппроксимации [1] они для простоты принимались соответственно равными $(0, 2\pi)$ и $(\pi/2, \pi)$, но это ограничивало область применимости аппроксимации углами $\theta_1 \geq \geq 105^\circ$. Точные значения пределов можно найти из геометрического рассмотрения задачи, которое после ряда преобразований приводит к следующему результату:

$$\int_{\varphi_0} \int_{\theta_0} = \sum_{i=1}^3 \int_{\varphi_H^i}^{\varphi_b^i} \int_{\theta_H^i}^{\theta_b^i} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_H^1 &= \varphi_b^3 - 2\pi = \\ &= \begin{cases} \varphi_1 + \arctg \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \operatorname{ctg} \theta_1} - \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_1) \right] & \text{при } \varphi_2 > \varphi_1 \\ \varphi_2 - \pi + \arctg \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{ctg} \theta_2} - \operatorname{ctg}(\varphi_1 - \varphi_2) \right] & \text{при } \varphi_2 < \varphi_1 \end{cases} \\ \varphi_H^2 &= \varphi_b^1 = \begin{cases} \varphi_1 + \pi/2 & \text{при } \varphi_2 > \varphi_1 \\ \varphi_2 - \pi/2 & \text{при } \varphi_2 < \varphi_1 \end{cases}, \\ \varphi_H^3 &= \varphi_b^2 = \begin{cases} \varphi_2 + \pi/2 & \text{при } \varphi_2 > \varphi_1 \\ \varphi_1 - \pi/2 & \text{при } \varphi_2 < \varphi_1 \end{cases} \\ \theta_H^1 &= \theta_H^2 = \theta_H^3 = 0 \\ \theta_b^1 &= \begin{cases} -\arctg \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta_1}{\cos(\varphi_0 - \varphi_1)} \right] & \text{при } \varphi_2 > \varphi_1 \\ -\arctg \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta_2}{\cos(\varphi_0 - \varphi_2)} \right] & \text{при } \varphi_2 < \varphi_1 \end{cases}, \quad \theta_b^2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

θ_b^3 определяется выражением для θ_b^1 с заменой условия $\varphi_2 > \varphi_1$ на $\varphi_2 < \varphi_1$ и наоборот.

Рассмотрим теперь подынтегральную функцию (1), полагая, что исходная поверхность является трехмерным анизотропным дифференцируемым случайным полем $\xi(x, y)$. Эту функцию можно представить в виде

$$p(ABCDE) = p(A) p(E|A) p(B|AE) p(C|AEB) \cdot p(D|AEBC) \quad (3)$$

где $p(\mu | \nu)$ — условная вероятность события μ при условии, что событие ν произошло. Следуя [1], расседем поверхность двугранным углом с ребром Oz и гранями, проходящими через лучи MO и ON . Тогда в сечении образуется случайная функция

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(t \cos \varphi_1, t \sin \varphi_1) & \text{при } t < 0 \\ \xi(t \cos \varphi_2, t \sin \varphi_2) & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $f(t)$ — заданная кривая. Введем еще одну функцию

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi(t) > f(t) \\ 0, & \text{если } \xi(t) < f(t) \end{cases} \quad (5)$$

и обозначим через $S(t_1, t_2)$ — событие, состоящее в том, что на интервале (t_1, t_2) функция $\delta(t) = 0$; $p_n(t_1, t_2)$ — вероятность того, что, находясь в момент t_1 в нулевом состоянии, функция $\delta(t)$ изменит свое состояние к моменту t_2 n раз. Используя эти обозначения, можно записать

$$p_0(t_1, t + \Delta t) = p_0(t_1, t) - p_0(t_1, t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n[t, t + \Delta t | S(t_1, t)] \quad (6)$$

Так как функция $\xi(t)$ дифференцируема, то функция $\delta(t)$ будет ординарной и на малом интервале Δt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_n[t, t + \Delta t | S(t_1, t)] &= p_1[t, t + \Delta t | S(t_1, t)] + 0(\Delta t) = \\ &= d[t | S(t_1, t)] \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \quad (7)$$

где $d[t | S(t_1, t)]$ — условная плотность вероятности выброса $\xi(t)$ через $f(t)$ в момент t при условии $S(t_1, t)$. Подставляя (7) в (6), имеем

$$\frac{p_0(t_1, t + \Delta t) - p_0(t_1, t)}{\Delta t} = -p_0(t_1, t) \{d[t | S(t_1, t)] + 0(1)\}$$

Устремив в этом равенстве $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого находим

$$p_0(t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} d[t | S(t_1, t)] dt \right\} \quad (8)$$

В частности, если $\xi(t)$ является пуассоновским процессом, то $d[t | S(t_1, t)] = d(t)$ и формула (8) принимает вид

$$p_0(t_1, t_2) = \exp \left[- \int_{t_1}^{t_2} d(t) dt \right]$$

В общем случае [3]

$$d[t | S(t_1, t)] = \int_{f(t)}^{\infty} \rho[f(t), \xi(t) | S(t_1, t)] [\xi(t) - f(t)] d\xi(t) \quad (9)$$

где точкой обозначено дифференцирование по t , а $\rho[f(t), \xi(t) | S(t_1, t)]$ есть условная плотность совместного распределения $\xi(t)$ и $\xi(t)$ при значении $\xi(t) = f(t)$ и условии $S(t_1, t)$.

Допустим теперь, что функция $f(t)$ описывает траекторию молекулы газа, т. е.

$$f(t) = \xi(0) + \begin{cases} t \operatorname{ctg} \theta_1 & \text{при } t < 0 \\ t \operatorname{ctg} \theta_2 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тогда, учитывая (8) — (10), получим

$$p(A) = \exp \left\{ - \int_{-\infty \operatorname{ctg} \theta_1}^0 \int_{\xi_x(0)}^{\infty} \rho [f(t), \dot{\xi}(t) | S(-\infty, t)] [\dot{\xi}(t) - \operatorname{ctg} \theta_1] d\dot{\xi}(t) dt \right\} \quad (11)$$

$$p(E|A) = \exp \left\{ - \int_0^{\infty} \int_{\xi_x(0)}^{\infty} \rho [f(t), \dot{\xi}(t) | S(-\infty, 0), S(0, t)] [\dot{\xi}(t) - \operatorname{ctg} \theta_2] d\dot{\xi}(t) dt \right\} \quad (12)$$

$$p(B|AE) = \int_{\operatorname{ctg} \theta_1}^{\infty} \rho [f(0), \dot{\xi}(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty)] [\dot{\xi}(0) - \operatorname{ctg} \theta_1] d\dot{\xi}(0) \quad (13)$$

Рассмотрим теперь вероятность $p(C|AEB)$. Она равна

$$p(C|AEB) = \int_{\xi_x(0)}^{\infty} \int_{\xi_y(0)}^{\infty} \rho [\xi_x(0), \xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty), \xi(0)] d\xi_x(0) d\xi_y(0) \times \\ \times \rho [\xi_x(0), \xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty), \xi(0)] d\xi_x(0) d\xi_y(0)$$

где

$$\xi_x(0) = \left. \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial x} \right|_{x=y=0}, \quad \xi_y(0) = \left. \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} \right|_{x=y=0}$$

Переходя к сферическим координатам θ_0 и φ_0 и имея в виду, что

$$\xi_x(0) = -\operatorname{tg} \theta_0 \cos \varphi_0, \quad \xi_y(0) = -\operatorname{tg} \theta_0 \sin \varphi_0$$

получаем

$$p(C|AEB) = \left\{ \int_{\varphi_0}^{\infty} \int_{\theta_0}^{\infty} \rho [\xi_x(0), \xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty), \xi(0)] \frac{\sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0} d\theta_0 d\varphi_0 \right\}^{-1} \times \\ \times \rho [\xi_x(0), \xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty), \xi(0)] \frac{\sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0} d\theta_0 d\varphi_0 \quad (14)$$

Область интегрирования по углам φ_0 и θ_0 совпадает в этом равенстве с (2). Если функция $\xi(x, y)$ нормальная, то

$$\rho [\xi_x(0), \xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty), \xi(0)] = \rho [\xi_x(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty)] \times \\ \times \rho [\xi_y(0) | S(-\infty, 0), S(0, \infty)] \quad (15)$$

и равенство (14) соответственно упрощается.

Наконец, последний сомножитель в (3) — вероятность $p(D|AEB)$ имеет вид

$$p(D|AEB) = F_0 du_2 = F_0 u_2^2 du_2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 \quad (16)$$

где закон отражения F_0 считается известным.

Формулы (1) — (4) и (10) — (16) полностью определяют трансформанту F_1 , однако еще не являются пригодными для численных расчетов. Основная трудность заключается в вычислении интегралов типа

$$I = \int_{\dot{f}(0)}^{\infty} \rho [f(t), \dot{\xi}(t) | S(T)] [\dot{\xi}(t) - \dot{f}(t)] d\dot{\xi}(t) \quad (17)$$

где T — некоторый интервал, предшествующий или следующий за моментом t . Для оценки таких интегралов воспользуемся следующей аппроксимацией. Во-первых, ограничим величину T интервалом корреляции T_k . Это допустимо, так как согласно определению [4] любые два сечения случайной функции $\xi(t)$, разделенные интервалом $T > T_k$, можно считать не зависящими друг от друга. Во-вторых, заменим $S(T)$ условием $\xi(t) < f(t)$ в конечном числе точек $t_i \in T$, $i = 1 \div n$. Не касаясь вопроса об оптимальном выборе этих точек, будем полагать, что они расположены на одинаковых расстояниях друг от друга, причем первая из них совпадает с началом интервала T , а последняя — с его концом. Тогда интеграл (17) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 I &\approx \int_{f(t)}^{\infty} \rho [f(t), \xi(t) | S(t_i, i = 1 \div n)] [\xi(t) - f(t)] d\xi(t) = \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{f(t_1)} \dots \int_{-\infty}^{f(t_n)} \rho [\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] d\xi(t_n) \dots d\xi(t_1) \right\}^{-1} \int_{f(t)}^{\infty} \int_{-\infty}^{f(t_1)} \dots \\
 &\dots \int_{-\infty}^{f(t_n)} \rho [f(t), \xi(t), \xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] [\xi(t) - f(t)] d\xi(t_n) \dots d\xi(t_1) d\xi(t) \quad (18) \\
 &t_i = t_1 - T(i-1)/(n-1), \quad T \leq T_k, \quad i = 1 \div n
 \end{aligned}$$

Беря число n достаточно большим, можно свести погрешность от замены (17) на (18) практически до нуля. Оценочные расчеты показывают, что при относительной погрешности в 10% число n для реальных поверхностей обычно не превышает 10. Особый интерес представляет случай $n = 1$, при котором условие $S(t_i, i = 1 \div n)$ сводится к $S(t_1)$. Имея в виду, что момент t_1 непосредственно предшествует или следует за моментом t , получаем в этом случае

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{t_1' \rightarrow t} \left\{ \int_{-\infty}^{f(t_1')} \rho [\xi(t_1')] d\xi(t_1') \right\}^{-1} \int_{f(t)}^{\infty} \int_{-\infty}^{f(t_1')} \rho [f(t), \xi(t), \xi(t_1')] \\
 &d\xi(t_1') d\xi(t) = \lim_{t_1' \rightarrow t} \rho [f(t)] \left\{ \int_{-\infty}^{f(t_1')} \rho [\xi(t_1')] d\xi(t_1') \right\}^{-1} \times \\
 &\times \int_{f(t)}^{\infty} \int_{-\infty}^{f(t_1')} \rho [\xi(t_1') | f(t)] \rho [\xi(t) | f(t), \xi(t_1')] d\xi(t_1') d\xi(t)
 \end{aligned}$$

Входящая сюда условная плотность $\rho [\xi(t_1') | f(t)]$ обращается при $t_1' \rightarrow t$ в δ -функцию $\delta [\xi(t) - f(t)]$, и формула (18) принимает вид

$$I = \rho [f(t)] \left\{ \int_{-\infty}^{f(t)} \rho [\xi(t)] d\xi(t) \right\}^{-1} \int_{f(t)}^{\infty} \rho [\xi(t) | f(t)] d\xi(t) \quad (19)$$

Если функция $\xi(t)$ нормальная, то $\rho [\xi(t) | f(t)] = \rho [\xi(t)]$ и выражение (19) соответственно упрощается. Учитывая (1), (3), (11) — (17) и (19), нетрудно получить в этом случае следующую формулу для искомой трансформанты:

$$F_1 = \frac{1}{\pi \sigma_x \sigma_y} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \Phi(\alpha_1)]^{-1} \exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{2}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{\alpha_2} \exp\left(-\frac{\alpha_2^2}{2}\right) - \frac{1}{\alpha_1} \exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{2}\right) \right] \right\}^{-1} \times \\ \times \int_{\varphi_0} \int_{\theta_0} F_0 \frac{\sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0} \exp \left[-\frac{\text{tg}^2 \theta_0}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sigma_y^2} \right) \right] d\theta_0 d\varphi_0 \quad (20)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\text{ctg } \theta_1}{\sigma_{t1}}, \quad \alpha_2 = \frac{\text{ctg } \theta_2}{\sigma_{t2}}, \quad \Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

а $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{t1}^2$ и σ_{t2}^2 — дисперсии наклонов (т. е. дисперсии производной $\xi(t)$) вдоль осей x и y и в направлениях полета молекулы до и после столкновения с поверхностью. Отметим, что если оси x и y совпадают с главными направлениями шероховатости, то дисперсия наклонов в произвольном направлении t выражается через дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 по формуле [5]

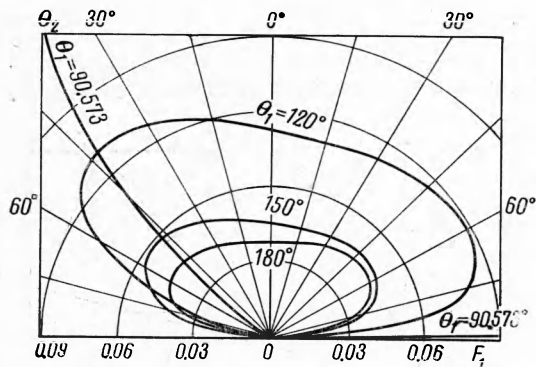
$$\sigma_t^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \psi + \sigma_y^2 \sin^2 \psi \quad (21)$$

где ψ — угол между направлением t и осью x .

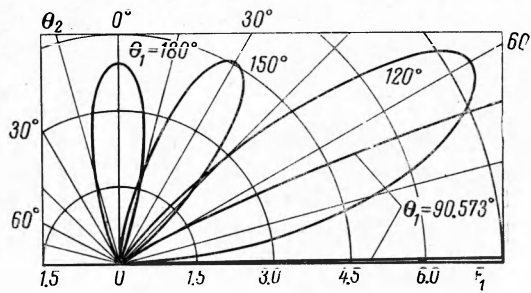
Таким образом, искомая трансформанта полностью определяется заданием дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 , а также начальных углов падения φ_1 и θ_1 .

Рассмотренная аппроксимация (19), (20), применима в тех случаях, когда траектории молекул удовлетворяют хотя бы одному из двух условий:

- 1) $|f(t) / \sigma_t| \geq 2$ (так как при $f(t) / \sigma_t \lesssim -2$ события $S(t_i, i = 1 \div n)$ и $S(t_1)$ происходят одновременно с вероятностью, близкой к единице, а при $f(t) / \sigma_t \geq 2$ интегралы (18) и (19) независимо от указанных событий практически равны нулю);



Фиг. 3



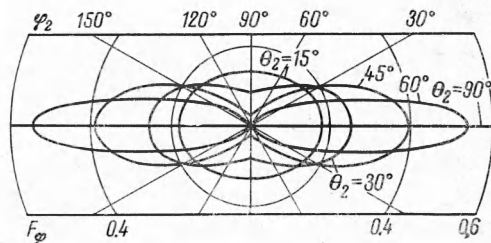
Фиг. 2

- 2) угол падения θ_1 близок к 90° (так как при этом молекулы как бы скользят по вершинам шероховатости и интегралы типа $\int_{-\infty}^{i(t_i)}$ можно заменить на $\int_{-\infty}^{\infty}$). Фактически это означа-

ет, что при таком падении молекул случайную функцию $\xi(t)$ можно рассматривать как одномерный пуассоновский процесс, что согласуется с теорией выбросов за высокий уровень [6]).

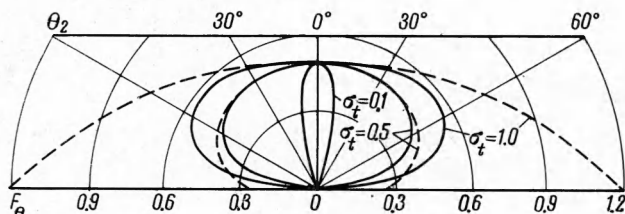
Таким образом, существует весьма ограниченная область пространства $|f(t) / \sigma_t| \lesssim 2$, в которой аппроксимация (19), (20) приводит к погрешности. Если шероховатость пологая, то эта область оказывается небольшой и при вычислении интегральных характеристик практически не искажает результат. Оценочные расчеты показали, что и в случае сильной ше-

роховатости ($\sigma_t \leq 1$) погрешность, вносимая в такие характеристики взаимодействия, как вероятность однократного отражения и коэффициенты аккомодации импульса и энергии, не превышает 10%. Кроме того, при $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$ указанная погрешность стремится к нулю, и аппроксимация (19),



Фиг. 4

(20) становится применимой при любой шероховатости. На фиг. 2—6 приведены результаты расчетов, выполненных по формуле (20) для случаев, когда закон отражения F_0 зеркальный (фиг. 2—5) и диффузный (фиг. 6). На первых двух фигурах показана зависимость величины F_1 от вертикального угла падения θ_1 для изотропной поверхности при дисперсиях $\sigma_t^2 = 0.01$ (фиг. 2) и $\sigma_t^2 = 1$ (фиг. 4). Как видно, с увеличением дисперсии индикатриса рассеяния становится все менее похожей на зеркальную и начинает давать «выброс» навстречу падающему потоку. При этом максимальная величина выброса наблюдается для тех частиц, которые падают на поверхность перпендикулярно средней линии наклона шероховатости в направлении падения.



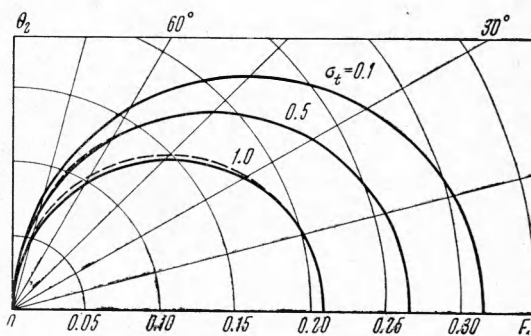
Фиг. 5

На фиг. 3 показано влияние анизотропности на трансформанту F_1 . Здесь представлены индикатрисы отражения по азимутальным углам φ_2 для случая вертикального падения частиц на слабо анизотропную поверхность ($\sigma_x / \sigma_y = 1.2$). Величина $F_1 = F_1(\theta_2, \varphi_2)$ для наглядности заменена выражением

$$F_\varphi = F_1(\theta_2, \varphi_2) \int_0^{2\pi} F_1(\theta_2, \varphi_2) d\varphi_2$$

Ясно, что в случае изотропной поверхности ($\sigma_x / \sigma_y = 1$) такая нормированная трансформанта должна графически изображаться правильной окружностью. С появлением анизотропности эта окружность, как видно из фигуры, начинает растягиваться вдоль направления максимальной дисперсии, причем растяжение будет тем больше, чем больше угол θ_2 .

С увеличением анизотропности это растяжение усиливается и величина F_φ при любых углах $\theta_2 \neq \pi/2$ стремится к полусумме δ -функций: $0.5 [\delta(\varphi_2) + \delta(\varphi_2 - \pi)]$.



Фиг. 6

Аналогичные зависимости наблюдаются и при диффузном законе отражения F_0 , однако выражены они значительно слабее.

На фиг. 5 и 6 показано сравнение индикатрис однократного отражения соответственно при зеркальном и диффузном законах отражения F_0 , рассчитанных по аппроксимациям (20) и [1] (пунктирная линия). Для простоты выбран случай вертикального падения молекул на изотропную поверхность. Величина F_1 заменена нормированным выражением

$$F_0 = F_1(\theta_2, \varphi_2) / F_1(0, \varphi_2)$$

Как видно, расхождение между аппроксимациями начинается именно с тех значений σ_1 , при которых аппроксимация [1] становится неприменимой.

Используя формулу (20), можно рассчитать вероятность однократного отражения, коэффициенты аккомодации импульса и энергии, а также другие аэродинамические параметры.

Поступила 7 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев Р. Г. Отражение молекул газа от шероховатых поверхностей. Сб. «Аэродинамика разреженных газов». 1, Л., Изд-во ЛГУ, 1963.
2. Баранцев Р. Г. Асимптотика однократного отражения на слабо шероховатой поверхности. Вестн. ЛГУ, сер. Математика, механика, астрономия, 1967, № 7, вып. 2.
3. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. О длительности выбросов случайной функции. Ж. техн. физ., 1954, т. 24, вып. 1.
4. Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Советское радио», 1968.
5. Лонге-Хиггинс М. С. Статистический анализ случайной движущейся поверхности. В сб. «Ветровые волны», М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.