

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ В ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО ПЕРЕНОСА  
ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

*Н. А. Рубцов*

(Новосибирск)

Глубокая общность процессов переноса находит отражение в тех физических аналогиях, которые успешно привлекаются в ряде приближенных теорий переноса тепла [1-11]. Основное содержание указанных аналогий, достаточно наглядных в конкретных рассмотренных (разреженные среды [4-10], турбулентные переносы [11]), заключается в общности модели процессов переноса. Принципиальные отличия в природе носителей (фотоны, частицы) оказываются не столь важными. В основе такого моделирования лежит кинетическое уравнение Больцмана, которое в его упрощенной интерпретации [4] оказывается аналогичным уравнению переноса лучистой энергии.

Применительно к частному случаю стационарного поля нерассеивающей однородной среды кинетическое уравнение Больцмана записывается следующим образом:

$$df(M, S) / ds = k(M, S) \{-f(M, S) + \epsilon_0(M, S)\} \quad (1)$$

Здесь  $f(M, S)$  имеет смысл удельной интенсивности «излучения» фотонов (нейтронов), либо частиц (молекул, их ассоциаций), в зависимости от характера процессов переноса, в точке  $M$  и по направлению  $S$ ; с учетом энергии элементарных носителей и скорости их распространения устанавливается прямая связь  $f(M, S)$  с функцией распределения [12];  $\epsilon_0(M, S)$  — равновесная функция, отображающая эмиссию, порождение фотонов или частиц элементарным объемом с точкой  $M$  в направлении  $S$  и связанную с элементарными процессами взаимодействия;  $k(M, S)$  — коэффициент ослабления (экстинкции) переноса, связанный с взаимодействием и включающий в общем случае коэффициенты рассеяния и поглощения.

Уравнение переноса (1) с учетом граничных условий преобразуется путем его формального интегрирования в уравнение, представляющее собой решение относительно  $f(M, S)$

$$f(M, S) = f(M_0, S_0) e^{-h(M, S)} + \int_{S_0}^S \epsilon_0(N, S) e^{(-h(N, S) + h(M, S))} dh$$

$$\left( h(M, S) = \int_{S_0}^S k(P, S) dS \right)$$

$$dh = k(N, S) dS \quad (2)$$

Здесь  $f(M_0, S_0)$  — граничное значение удельной интенсивности, а  $h(M, S)$  имеет смысл оптической плотности среды, или числа средних свободных пробегов носителей, укладывающихся на луче  $S_0 - S$ .

Процессы переносов характеризуются плотностями потоков, которым в зависимости от характера исследования придается разнообразное физическое толкование. Плотность результирующего переноса через воображаемую плоскость в пространстве определяется соотношением

$$E(M, S) = \pi \int_{4\pi} f(N, S) Q(M, S, N) dF_N \quad (3)$$

Здесь  $Q(M, S, N) dF_N$  — функция пространственной ориентации элементарных переносов в фиксированной  $M$  и текущей  $N$  точках соприкосновения по отношению к выбранному направлению  $S$ .

Рассмотрение одномерных процессов переноса сводится к исследованию уравнения энергии, представляющего собой выражение для объемного результирующего переноса. По аналогии с выражением для результирующего переноса тепла в плоском слое серой нерассеивающей среды (стенки диффузно излучают) [13], указанное уравнение может быть записано в виде

$$-\frac{1}{\pi} \eta(h) = \frac{1}{\pi} \frac{dE(h)}{dh} = 4\varepsilon_0(h) - 2\sigma_1(h) f(h_1) - 2\sigma_2(h) f(h_2) - 2 \int_0^{h_0} \varepsilon_0(\zeta) G(h, \zeta) d\zeta \quad (4)$$

Здесь  $G(h, \zeta)$  — функционал, описывающий объемные переносы, включающие эффекты отражения на границах;

$\sigma_i(h) f(h_i)$  — эмиссия граничных поверхностей, ослабленная промежуточной средой ( $i = 1, 2$ ) и отражениями на границах по пути к  $h$ .

При заданном значении  $\eta(h)$  уравнение (4) позволяет определить распределение равновесной функции  $\varepsilon_0(\zeta)$  по слою, а следовательно, — соответствующие распределения температур, скоростей и т. п.

Функции граничного влияния  $\sigma_i(h)$  и функционал  $G(h, \zeta)$  определяются из соотношений [13]

$$\begin{aligned} \sigma_1(h) &= A_1 \frac{K_2(h) + 2(1 - A_2) K_3(h_0) K_2(h_0 - h)}{1 - 4(1 - A_1)(1 - A_2) K_3^2(h_0)} \\ \sigma_2(h) &= A_2 \frac{K_2(h_0 - h) + 2(1 - A_1) K_3(h_0) K_2(h)}{1 - 4(1 - A_1)(1 - A_2) K_3^2(h_0)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$G(h, \zeta) = K_1 |h - \zeta| + 2\sigma_1(h) \frac{1 - A_1}{A_1} K_2(\zeta) + 2\sigma_2(h) \frac{1 - A_2}{A_2} K_2(h_0 - \zeta)$$

$$K_n(x) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \mu^{n-1} \frac{d\mu}{\mu}$$

Здесь  $A_i$  — обобщенные коэффициенты аккомодации граничных поверхностей [12] (или излучательная — поглощательная способность при излучении).

Если анализируется соленоидальное поле ( $\eta \equiv 0$ ) переносов, то задача, связанная с отысканием распределения функций  $\varepsilon_0(h)$ , преобразуется к решению интегрального уравнения

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} \sigma_2(h) + \frac{1}{2} \int_0^{h_0} G(h, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (6)$$

составленного относительно функции

$$\varphi(h) = \frac{\varepsilon_0(h) - f(h_1)}{f(h_2) - f(h_1)} = \frac{E_0(h) - E_{0,1}}{E_{0,2} - E_{0,1}},$$

представляющей собой безразмерный аналог равновесной функции  $\varepsilon_0(h)$  (равновесного излучения, температуры, скорости).

В связи с этим представляется возможным описание процессов переноса в плоском слое, вызванных граничными возмущениями (стенки имеют различные температуры, либо скорости движения). В качестве параметра, определяющего роль указанных возмущений, служит обобщенный коэффициент аккомодации. Применительно к случаю  $\sigma_i(h) \equiv 1$  уравнение (6) ранее использовалось при анализе внутреннего трения в разреженных газах [1], а затем, позднее, — при исследовании течения Куэтта в разреженной среде [10].

Если граничные условия симметричны ( $f(h_1) = f(h_2)$ ,  $A_1 = A_2$ ), то (4) преобразуется в интегральное уравнение

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{h_0} G(h, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

$$G(h, \zeta) = K_1 |h - \zeta| + \sigma_1(h) K_2(\zeta) + \sigma_2(h) K_2(h_0 - \zeta)$$

$$\left( \varphi(h) = \frac{\varepsilon_0(h) - f(h_1)}{1/2 \eta \pi} = \frac{\varepsilon_0(h) - f(h_2)}{1/2 \eta \pi} = \frac{E_0(h) - E_{0,i}}{1/2 \eta} \right)$$

Следует обратить внимание на отсутствие в уравнении (7) свободных членов, отображающих роль границ в явном виде. Это сопряжено с тем обстоятельством, что единственный источник возмущения в этом случае оказывается равномерно распределенным по всему объему среды.

Уравнение (7) позволяет проанализировать температурное распределение в слое нетеплопроводной излучающей среды, содержащей равномерно распределенные источники тепловыделения. Оно же позволяет, по-видимому, установить распределение скоростей потока разреженной среды, движущейся в плоском канале со скольжением.

Роль источников возмущения при этом играет динамический напор в канале<sup>1</sup>. Очевидно, что функции распределения  $\varphi(h)$  или ( $\varepsilon_0(h)$ ) в околостеночных областях терпят разрыв непрерывности, размеры которого определяются молекулярной или оптической плотностями.

Внесение существенной асимметрии в эмиссионные характеристики границ ( $A_2 = 1$ ,  $A_1 \neq 1$ ) приводит к преобразованию функции влияния  $G(h, \zeta)$  в уравнении (7) к виду

$$G(h, \zeta) = K_1 |h - \zeta| + 2R_1 K_2(h) K_2(\zeta) \quad (8)$$

Это влечет за собой соответствующую асимметрию в распределении  $\varphi(h)$ . Особое положение занимает несимметричный вариант рассматриваемого случая, когда одна из граничных поверхностей представляет собой абсолютный сток ( $f(h_2) \equiv 0$ ,  $A_2 \equiv 1.0$ ).

Уравнение (4) тогда приобретает вид

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} \sigma_1(h) + \frac{1}{2} \int_0^{h_0} G(h, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

$$\sigma_1(h) = 1 + A_1 K_2(h) \varphi_1, \quad \varphi(h) = \frac{\varepsilon_0(h)}{1/2 \eta \pi}, \quad \varphi_1 = \frac{f(h_1)}{1/2 \eta \pi} = \frac{E_{0,1}}{1/2 \eta}$$

Уравнение (9) описывает процессы теплового переноса излучением в плоском слое с тепловыделением, одна из поверхностей которого абсолютно черная и находится при температуре абсолютного нуля. Это же уравнение, по-видимому, описывает распределение температур и скоростей в слое разреженного потока, обтекающего пластину со скольжением.

<sup>1</sup> По-видимому, уравнение (7) описывает также распределение скоростей в турбулентном ядре плоской свободной струи, в пределах которого давление, играющее роль источников возмущения, остается постоянным.

Как видно, рассмотренные выше процессы описываются интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое в общем случае можно записать следующим образом:

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} \sigma(h) + \frac{1}{2} \int_0^{h_0} G(h, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

Ядро интегрального уравнения  $G(h, \zeta)$  при  $\zeta \rightarrow h$  имеет особенность в связи с тем, что входящее в него значение экспоненциального интеграла  $K_1 |h - \zeta|$  обладает разрывом непрерывности логарифмического характера. В общем случае для ядер рассматриваемого типа справедливы все теоремы Фредгольма [15].

Однако дискретное представление (10), связанное с численным решением, дает большую погрешность. В этой связи представляется целесообразным исключение особых точек функциональной области  $G(h \sim \zeta)$  путем записи уравнения (10) в виде

$$\varphi(h) = \beta(h) \sigma(h) + \beta(h) \int_0^{h_0} G(h, \zeta) [\varphi(\zeta) - \varphi(h)] d\zeta \quad (11)$$

$$\beta(h) = \left( 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \int_0^{h_0} G(h, \zeta) d\zeta \right) \right)^{-1}$$

В области малых значений функции влияния  $G(h, \zeta)$ , что соответствует малым оптическим плотностям или большим длинам свободного пробега, роль интеграла в функциональном уравнении (11), отображающего взаимодействие объемного характера, оказывается пренебрежимой, и решение (11) может быть представлено упрощенным соотношением

$$\varphi(h) \sim \beta(h) \sigma(h) \quad (12)$$

Решение уравнения (11) применительно к конкретным случаям исследования переносов теплового излучения проводится по обычной итерационной схеме при дискретном представлении интервала  $(0, h_0)$  по Гауссу (десять точек) с привлечением метода Ньютона. Число итераций, как правило, не превышает двух<sup>1</sup>.

1. *Плоский слой серой нерассеивающей среды (без теплообмена) с асимметричными граничными условиями.* Результаты решения интегрального уравнения (6), представленные на фиг. 1 и хорошо согласующиеся с результатами в [16], отображают влияние оптических свойств граничных поверхностей  $A_1$ , а также оптической плотности  $h_0$  среды на распределение безразмерного равновесного излучения  $\varphi(\zeta)$  в слое. Здесь анализируется случай с существенно различающимися значениями  $A_1 = 0.7$  и  $A_2 = 0.2$  применительно к нескольким характерным значениям оптической плотности с среды  $h_0$ . Решение уравнения (6) хорошо аппроксимируется линейным приближением

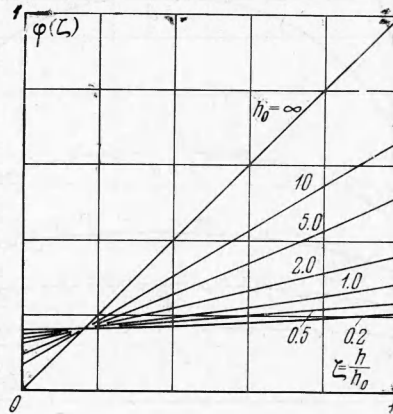
$$\varphi(h) = \varphi(0) + (\varphi(h_0) - \varphi(0)) h / h_0 \quad (13)$$

где  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(h_0)$  (значения  $\varphi(h)$  в околостеночных областях) сравнительно просто определяются [13] при совместном рассмотрении (6) и (12). В частном случае, когда граничные поверхности — абсолютно черные

$$\varphi(0) = (1/2 - K_3(h_0)) (1 + h_0 (1 - K_2(h_0)) - 2K_3(h_0))^{-1}, \quad \varphi(h_0) = 1 - \varphi(0) \quad (14)$$

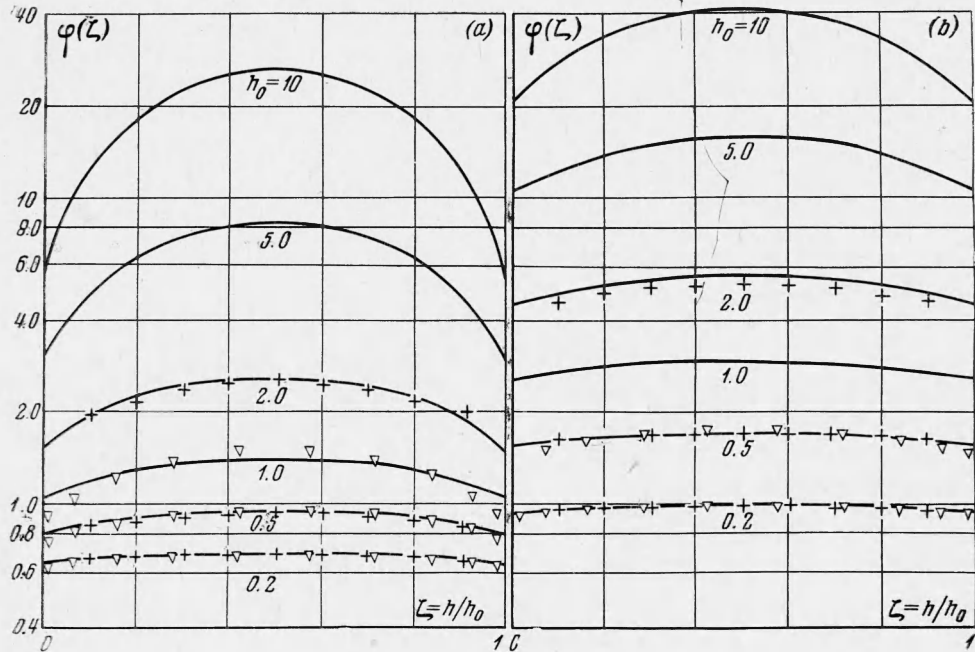
Результаты решения с привлечением (13) удовлетворительно согласуются с результатами ранее рассмотренной строгой постановки задачи (фиг. 1) применительно к случаю  $A_1 = 0.7$  и  $A_2 = 0.2$  (фиг. 3 в [13]).

<sup>1</sup> Все вычисления, описываемые здесь, проведены на ЭВМ — 20 ВЦ СО АН СССР.



Фиг. 1

Такое согласование свидетельствует о применимости линейной аппроксимации строгого решения и в общем случае, когда граничные условия оказываются несимметричными по оптическим свойствам поверхностей. Полученные результаты имеют непосредственное отношение к исследованиям распределения скоростей и температур в плоском слое разреженного газа, образованного двумя бесконечными плоскостями, из которых одна (вторая) находится в движении (течение Куэтта) [1,10].



Фиг. 2

Более того, будучи весьма наглядными в физическом представлении, последние дают соответствующую информацию в построении приближенных решений.

В слабо поглощающих средах ( $h_0 < 0.5$ ) можно воспользоваться соотношением (12), которое применительно к анализируемому случаю записывается так:

$$\varphi(h) = \sigma_2(h) \left\{ K_2(h) + K_2(h_0 - h) - (1 - 2K_3(h_0)) \left( \sigma_1(h) \frac{1 - A_1}{A_1} + \sigma_2(h) \frac{1 - A_2}{A_2} \right) \right\}^{-1} \quad (15)$$

Для варианта с абсолютно черными граничными поверхностями

$$\varphi(h) = K_2(h_0 - h) (K_2(h) + K_2(h_0 - h))^{-1} \quad (16)$$

Вычисления распределения  $\varphi(h)$  по формуле (15) применительно к случаю  $A_1 = 0.7$ ,  $A_2 = 0.2$ ,  $h_0 = 0.2$  дают весьма хорошие результаты.

2. Плоский слой среды с равномерно распределенными источниками тепловыделения (симметричные граничные условия)<sup>1</sup>. Решение уравнения (7), представленного в формуле (10), проводится для большого диапазона значений  $h_0$  и  $R = 1 - A$ . Соответствующие численные результаты представлены на фиг. 2, где приведено распределение значений равновесного излучения

$$\varphi(\xi) = \frac{E_0(\xi) - E_{0.1}}{E_{0.2} - E_{0.1}}$$

по толщине слоя серой среды, разнообразной оптической плотности, когда граничные поверхности диффузно отражают излучение с различной степенью интенсивности (a)  $R = 0$ , (b)  $R = 0.6$ . Точка 1 получена по формуле (17), точка 2 — по формуле

<sup>1</sup> Под источниками (стоками) тепла следует понимать некоторое тепловыделение, приходящееся на единицу «оптического объема»  $\eta(h) = dE(h) / dh$ .



(23). Как видно, с увеличением  $h_0$  степень неравносности по значениям  $\varphi(h)$  в начале растет, а затем вновь падает. Рост отражательной способности  $R$  в указанном смысле всегда оказывает стабилизирующее влияние. Аналогичные результаты получены в работе [17] методом Монте-Карло.

Решение интегрального уравнения (7) хорошо аппроксимируется параболой вида

$$\varphi(h) = \varphi(0) + 4 \frac{\varphi(1/2 h_0) - \varphi(0)}{h_0} h \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) \quad (17)$$

Здесь  $\varphi(0)$  и  $\varphi(1/2 h_0)$  — безразмерные значения равновесного излучения соответственно в околостеночной и приосевой областях плоского слоя.

Значения  $\varphi(0)$  и  $\varphi(1/2 h_0)$  определяются из совместного рассмотрения уравнений (7) и (17). В общем случае соответствующие расчетные уравнения отличаются громоздкостью, в связи с чем ограничимся приведением выражений для частного случая абсолютно черных граничных поверхностей.

При определении  $\varphi(0)$  будем исходить из решения интегрального уравнения (7), которое позволяет получить строгое соотношение

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{h_0} \Gamma_1(h) dh \quad (18)$$

$$\Gamma_1(h) = K_1(h) + \frac{1}{2} \int_0^{h_0} K_1|h - \zeta| \Gamma_1(\zeta) d\zeta$$

Воспользуемся приближенным выражением

$$\int_0^{h_0} \Gamma_1(h) dh \approx h_0 \frac{1 - K_2(h_0)}{1/2 - K_3(h_0)} \quad (19)$$

полученным ранее в [13]. Тогда имеем

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} \left(1 + h_0 \frac{1 - K_2(h_0)}{1 - 2K_3(h_0)}\right) \quad (20)$$

Используя приближение (17) в интегральном уравнении (7) (при  $R \equiv 0$ ), получим

$$\varphi(1/2 h_0) = \varphi(0) + (1/2 h_0)^2 (1/2 - \varphi(0) K_2(1/2 h_0)) (2/3 - h_0 K_3(1/2 h_0) - 2K_4(1/2 h_0))^{-1} \quad (21)$$

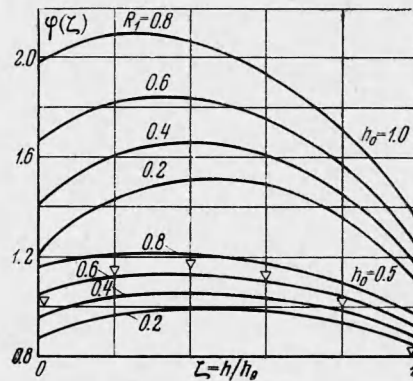
Результаты расчетов, проведенных при помощи формул (17), (21) и (22), хорошо согласуются с соответствующими значениями, представленными на фиг. 2, а, в строгом рассмотрении.

С ростом отражательной способности границ (фиг. 2, б) погрешность расчетов увеличивается, не превышая, однако, 7% для  $R = 0.6$  и  $h_0 = 2.0$ .

Приближенное решение (12), действующее в диапазоне оптически слабых сред ( $h_0 < 0.5$ ), записывается в виде

$$\varphi(h) = \{K_2(h) + K_2(h_0 - h) - (1 - 2K_3(h_0)) (\sigma_1(h) + \sigma_2(h))\}^{-1} \quad (22)$$

Результаты расчетов по формуле (22) представлены на фиг. 2. Как видно, погрешность расчета при  $h_0 \leq 0.5$  даже в общем случае серых поверхностей не превышает 10%



Фиг. 3

3. Плоский слой среды с равномерно распределенными источниками тепловыделения (несимметричный вариант). а) Одна из граничных поверхностей предполагается абсолютно черной ( $A_2 \equiv 1.0$ ).

Результаты решения интегрального уравнения (7) с учетом (8), представленные на фиг. 3, свидетельствуют о заметном влиянии асимметрии оптических свойств на распределение безразмерного значения равновесного излучения; с увеличением оптической плотности  $h_0$  это влияние особенно заметно в связи с тем, что распределение

$$\varphi(\xi) = \frac{E_0(\xi) - E_{0.1}}{1/2 \eta} \quad (23)$$

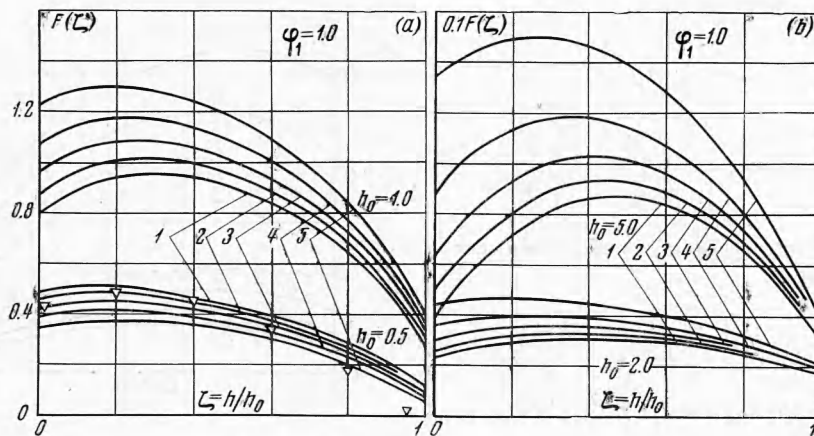
по толщине слоя здесь оказывается связанным со спецификой граничных условий в несравненно большей степени.

С уменьшением  $R_1 = 1 - A_1$  распределение  $\varphi(\xi)$  становится более симметричным и в пределе, когда  $R_1 \equiv 0$ , симметрия в распределении  $\varphi(\xi)$  восстанавливается (частный случай решения уравнения (7), представленный на фиг. 2, а).

В оптически тонких слоях ( $h_0 < 0.5$ ) решение уравнения (7) удовлетворительно аппроксимируется формулой (12), которая записывается в виде

$$\varphi(h) = \{K_2(h) + K_2(h_0 - h) - R_1 K_2(h) (1 - 2 K_3(h_0))\}^{-1} \quad (24)$$

Результаты расчетов по формуле (24) представлены на фиг. 3 для  $h_0 = 0.5$  и  $R_1 = 0.6$ .



Фиг. 4

в) Одна из граничных поверхностей предполагается при температуре абсолютного нуля ( $E_{0.2} \equiv 0$ ,  $A_2 \equiv 1$ ). Результаты численного решения интегрального уравнения (9) для случая  $\varphi_1 = 1.0$  и в широком диапазоне  $R_1$  и  $h_0$  представлены на фиг. 4 в виде зависимости

$$\varphi(\xi) - \varphi_1 = F(\xi) = \frac{E_0(\xi) - E_{0.1}}{1/2 \eta}$$

На фиг. 4 кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям  $R_1 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ .

Из сопоставления результатов расчетов, представленных на фиг. 4, а, с аналогичными результатами на фиг. 3, следует совершенно очевидное снижение общего уровня значений  $\varphi(\xi)$  за счет своеобразного «высвечивания» в сторону фиктивной стенки, находящейся при абсолютном нуле.

При определенном соотношении выбранных параметров по оптической плотности слоя  $h_0$ , а также безразмерному равновесному излучению действительной стенки  $\varphi_1 = 1/2 E_{0.1} / \eta$  безразмерное равновесное излучение  $\varphi(\xi)$  в слое растет с уменьшением отражательной способности стенки  $R_1$  (фиг. 4, а для  $h_0 = 0.5$ ). Это связано с преобладающей ролью в распределении  $\varphi(\xi)$  излучательной способности стенки. Очевидно, что с увеличением оптической плотности  $h_0$  ее роль слабеет и во все возрастающей степени начинают сказываться внутренние процессы в среде, содержащей равномерно распределенные источники тепловыделения (фиг. 4, б)

В оптически слабых средах ( $h_0 < 0.5$ ) можно воспользоваться приближенным выражением (12), которое в этом случае записывается в виде

$$\varphi(h) \approx (1 + (1 - R_1) K_2(h) \varphi_1) (K_2(h) (1 - R_1 (1 - 2 K_3(h_0))) + K_2(h_0 - h))^{-1} \quad (25)$$

Расчеты по формуле (25) применительно к случаю  $h_0 = 0.5$ ,  $R_1 = 0.6$  и  $\varphi_1 = 1.0$  представлены на фиг. 4, а. Максимальная погрешность подобных расчетов также не превышает 10%. В этой связи приближенное уравнение (12) и его частные формы, представленные формулами (15), (23), (24) и (25), следует применять в диапазоне оптических плотностей, ограниченном  $h_0 < 0.5$ .

Более эффективным, в смысле расширения диапазона оптических плотностей, оказываются приближенные решения вида (13) и (17), основанные на дополнительных сведениях об ожидаемом характере распределения  $\varphi(\xi)$ . Весьма полезными в этом смысле могут оказаться обобщающие физические аналогии, приближенно рассмотренные в работе.

Затронутые вопросы представляют собой примеры наиболее простых случаев приближенного развития общей теории переносов.

Поступила 5 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костицын В. А. Интегральные уравнения с интегрологарифмическим ядром и сходные интегральные уравнения. Матем. сб., 1922, т. 31, № 2, стр. 188.
2. Тимирязев А. К. Применение интегральных уравнений к теории внутреннего трения в разреженных газах. Тр. Ин-та физики Моск. ун-та, 1929, вып. 12.
3. Clausing P. The amount of uniformly — diffused light that will pass through two apertures in series. Philos. Mag., 1929, vol. 8, 126.
4. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, стр. 425—432.
5. Rhatnagar, Gross E., Groot M. A. Model for Collision Processed in Gases. Phys. Rev., 1954, 94, 511.
6. Крук М. Уравнение континуума в динамике разреженных газов. Сб. статей. Некоторые задачи современной аэродинамики, Изд. Иностран. лит., 1961.
7. Гросс Э., Джексон Э., Зиринг С. Граничные задачи кинетической теории газов. Механика. Сб. обз. и перев. ин. период. лит., 1958, № 5 (51).
8. Willis D. R. Comparison on Kinetic theory analyses of linearised Couette flow. Phys Fluids, 1962, vol. 5, No. 2. (Русск. перев.: Уиллис Д. Р. Сравнение исследований линеаризованного течения Куэтта по кинетической теории. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 2 (78), стр. 87—103).
9. Онуфриев А. Т. Модель неравновесных процессов в некоторых задачах механики сплошных сред. ПМТФ, 1963, № 1.
10. Онуфриев А. Т. Решение линеаризованной задачи Куэтта для разреженного газа методом интегральной диффузии. ПМТФ, 1965, № 2.
11. Булеев Н. И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. Сб. «Теплопередача», ЭНИН, 1962.
12. Зелдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд-во «Наука», 1966.
13. Рубцов Н. А. К переносу теплового излучения в плоском слое поглощающей среды. ПМТФ, 1965, № 5.
14. Eckert E. R. G. Similarities between energy transport in rarefied gases and by thermal radiation. Modern Developments in Heat Transfer (ed. Warren Gbele), New York — London, 1963.
15. Соболев С. А. Уравнения математической физики. Изд. технико-теоретич. лит., 1950.
16. Viskanta R., Gosh R. I. Effect of Surface Emissivity on Heat Transfer by Simultaneous Conduction and Radiation. Ints. J. Heat Mass Transfer, 1962, vol. 5, p. 729—734.
17. Хауэлл Д., Перлмуттер М. Применение метода Монте-Карло для расчета лучистого теплообмена в излучающей среде, заключенной между серыми стенками. Теплопередача, 1964, 1.