УДК 539.376; 539.42

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ДЛИННОЙ МЕМБРАНЫ ВНУТРИ ЖЕСТКОЙ МАТРИЦЫ ПРИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ ОТ ВРЕМЕНИ

А. М. Локощенко*, Е. А. Абросимова*,**

* Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия
E-mails: loko@imec.msu.ru, kat121193@yandex.ru

Исследуется задача об установившейся ползучести длинной прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы с отношением высоты к ширине не менее 0,5 в случае кусочно-постоянной зависимости скорости поперечного давления от времени. Изучена ползучесть мембраны при однократном изменении скорости поперечного давления во времени. Рассмотрены два варианта условий контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение и прилипание. Исследованы три стадии ползучести мембраны. Анализ проводится до момента времени, в который мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы. Получены зависимости переменной толщины мембраны от времени, а также интенсивности напряжений в мембране от времени. Показано, что в данной задаче правило суммирования парциальных времен не выполняется.

Ключевые слова: мембрана, установившаяся ползучесть, матрица, поперечное давление, идеальное скольжение, прилипание, нестационарное нагружение.

DOI: 10.15372/PMTF20190112

Введение. Решение задачи о ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением, которое может изменяться во времени t по заданному закону, при различных физических и геометрических условиях приведено в работах [1–3] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В работах [3, 4] рассмотрены задачи о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [4] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной [5], криволинейной [6] и прямоугольной при различных условиях на поверхности контакта мембраны и матрицы. Во всех приведенных решениях величина равномерного поперечного давления q не зависит от времени. В различных решениях использовались закон установившейся ползучести, закон неустановившейся ползучести, дробно-степенной закон. В случае применения дробно-степенной модели ползучести [7] в зависимости от условий контакта

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00210).

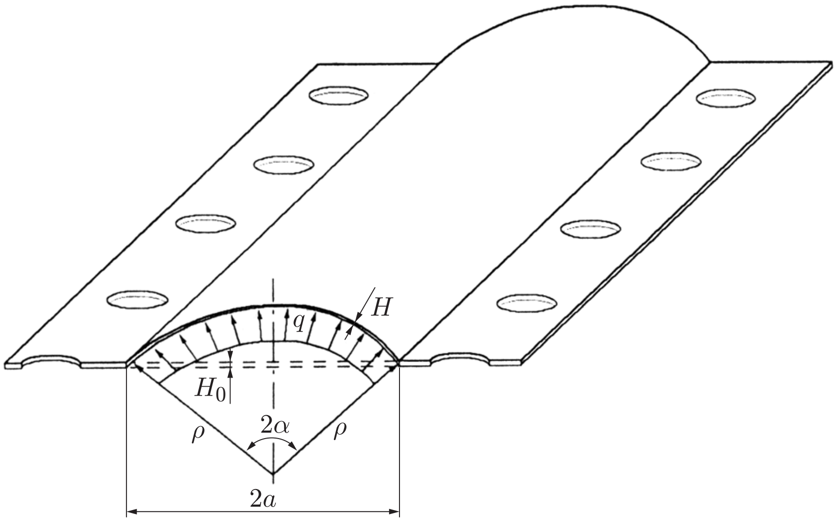

Рис. 1. Свободное деформирование мембраны под действием давления

мембрана либо полностью прилегает к стенкам матрицы за конечное или бесконечное время, либо разрушается внутри матрицы [5].

В данной работе исследуется ползучесть мембраны внутри матрицы прямоугольной формы. В отличие от [1–7] рассматривается не постоянная величина $q(t) = \text{const}$, а кусочно-постоянная зависимость скорости от времени $\dot{q}(t)$ с однократным изменением ее величины.

1. Свободное деформирование мембраны в условиях ползучести (первая стадия деформирования). Исследуется задача о ползучести длинной прямоугольной мембраны шириной $2a$ с начальной толщиной H_0 в стесненных условиях в случае кусочно-постоянной зависимости скорости изменения поперечного давления от времени $\dot{q}(t)$ (рис. 1).

Для описания деформирования мембраны при $t > 0$ используется степенной закон установившейся ползучести материала

$$\dot{p}_u = \frac{1}{t_0}\Big(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\Big)^n, \qquad (1)$$

где σ_u, $\dot{p}_u$ — интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести соответственно; σ_0 — характерное напряжение; t_0, n — постоянные; точка означает дифференцирование по времени t.

На первой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента, в который она касается стенок жесткой матрицы, при этом угол раствора мембраны совпадает с углом раствора матрицы и равен $2\alpha_1$. При моделировании напряженно-деформированного состояния мембраны рассматриваются радиальное σ_{rr}, окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr}, $p_{\theta\theta}$, p_{zz}.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_0}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \bar{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}. \qquad (2)$$

Здесь H, ρ — толщина и радиус кривизны поперечного сечения мембраны при произвольных значениях времени. Далее черта над всеми безразмерными переменными опускается. На стадии свободного деформирования проводится моделирование ползучести мембраны до момента, в который она касается стенок матрицы, т. е. до момента времени t_1, в который угол раствора мембраны становится равным $2\alpha_1 = \pi$.

Рассматривая элемент матрицы и записывая уравнения его равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H_0 H}, \qquad \sigma_{\theta\theta} H = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Из уравнений равновесия (3) следует, что $\rho = \rho(t)$, т. е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α. В плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{p}_{zz}$ полагается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \tag{4}$$

В силу тонкостенности цилиндрических оболочек принимается равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \tag{5}$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести следует

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3f(\sigma_u)}{2\sigma_u}\,(\sigma_{ij} - \sigma_0), \qquad \sigma_0 = \frac{1}{3}\,(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}).$$

Тогда с учетом (4) получаем

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta}/2. \tag{6}$$

С учетом формул (3), (5), (6) выражение для интенсивности напряжений имеет вид

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q\rho}{H_0 H}. \tag{7}$$

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести, учитывая, что деформированное состояние является однородным:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \dot{\rho}/\rho + \dot{\alpha}/\alpha. \tag{8}$$

Так как

$$\rho \sin\alpha = 1, \tag{9}$$

то

$$\dot{\rho}\sin\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha = 0.$$

Тогда выражение (8) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \tag{10}$$

С учетом (4) из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем

$$\dot{p} = \dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \qquad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}, \qquad \dot{p}_u = (2/\sqrt{3}\,)\dot{p}_{\theta\theta}. \tag{11}$$

Поскольку скорость радиальной деформации ползучести равна $\dot{p}_{rr} = \dot{H}/H$, из равенств (10), (11) получаем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{p}_{rr} = -\dot{H}/H = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \tag{12}$$

Проинтегрируем уравнение (12), используя начальные значения $t = 0$, $\alpha = 0$, $H = 1$:

$$H = \alpha^{-1}\sin\alpha. \tag{13}$$

С помощью выражений (7), (9), (13) окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и интенсивность напряжений σ_u можно выразить через угол раствора α:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\dot{q}t\rho}{H_0 H} = \frac{\dot{q}t\alpha}{H_0\sin^2\alpha}, \qquad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot{q}t\alpha}{H_0\sin^2\alpha}. \tag{14}$$

С учетом (4), (10), (11) выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести принимает следующий вид:

$$\dot{p}_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\theta\theta})^2 + (\dot{p}_{\theta\theta} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + 6(\dot{p}_{r\theta}^2 + \dot{p}_{\theta z}^2 + \dot{p}_{zr}^2)} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\Big)\dot{\alpha}. \tag{15}$$

Подставляя (13)–(15) в закон ползучести (1), получаем решение задачи о свободном деформировании мембраны

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot{q}t\alpha}{H_0\sin^2\alpha}, \quad H = \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \int\limits_0^\alpha \Phi(\alpha)\,d\alpha = Gt_1^{n+1}, \quad G = \Big(\frac{\dot{q}}{H_0}\Big)^n\frac{1}{n+1},$$

$$\Phi(\alpha) = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\Big(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\Big)\frac{(\sin\alpha)^{2n}}{\alpha^n}, \quad t^{n+1} = \frac{1}{G}\int\limits_0^\alpha \Phi(\alpha)\,d\alpha, \quad t_1^{n+1} = \frac{1}{G}\int\limits_0^{\alpha_1}\Phi(\alpha)\,d\alpha.$$

В конце первой стадии деформирования угол раствора мембраны равен $2\alpha_1 = \pi$. Следовательно, момент времени t_1, в который завершается первая стадия, и толщина мембраны $H_1 = H(t_1)$ определяются выражениями

$$t_1 = t\big|_{\alpha=\alpha_1=\pi/2}, \qquad H_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2}{\pi}. \tag{16}$$

2. Вторая стадия деформирования при идеальном скольжении мембраны вдоль продольных стенок высокой П-образной матрицы. Рассмотрим относительно высокую матрицу, сечение которой имеет форму прямоугольника (рис. 2). Введем дополнительные безразмерные параметры b, x_0, y_0, представляющие собой отношения высоты матрицы, поперечной и продольной координат точек касания матрицы и мембраны соответственно к половине ширины матрицы. Вследствие осевой симметрии мембраны и матрицы далее изучается ползучесть половины мембраны ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant b$).

При исследовании второй стадии ползучести мембраны рассмотрим два ее близких положения (радиус свободной дуги мембраны $\rho = 1$). В одном положении длина зоны контакта равна y_0, в другом — $y_0 + dy_0$. Согласно определению $\dot{p}_{\theta\theta}$ с учетом (16) имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{y_0 + dy_0 + \pi/2 - (\pi/2 + y_0)}{y_0 + \pi/2} = \frac{dy_0}{y_0 + \pi/2}, \quad \dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{1}{H}\,\frac{dH}{dt}, \quad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH}{H},$$

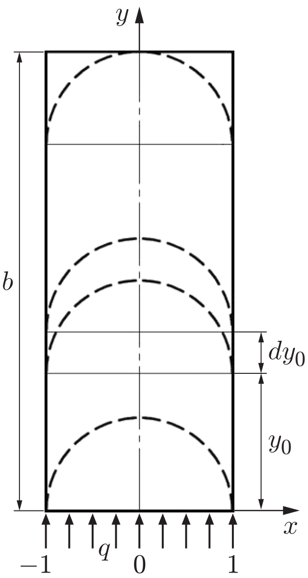

Рис. 2. Вторая стадия ползучести мембраны

$$p_{\theta\theta} = \int\limits_0^{y_0} \frac{dy_0}{y_0+\pi/2} = -\int\limits_{H_1}^{H(y_0)} \frac{dH}{H} = \ln\frac{H_1}{H} = \ln\frac{y_0+\pi/2}{\pi/2}, \quad H = \frac{(\pi/2)H_1}{y_0+\pi/2} = \frac{1}{y_0+\pi/2}.$$

Таким образом,

$$p_{\theta\theta} = \ln\frac{y_0+\pi/2}{\pi/2}, \qquad \dot p_{\theta\theta} = \frac{1}{y_0+\pi/2}\,\frac{dy_0}{dt}, \qquad \dot p_u = \frac{2}{\sqrt3}\,\frac{1}{y_0+\pi/2}\,\frac{dy_0}{dt}. \tag{17}$$

Вторая стадия заканчивается в тот момент, когда мембрана касается верхней стенки матрицы (при $y_0 = b-1$). В конце второй стадии толщина мембраны равна

$$H_2 = \frac{1}{b-1+\pi/2}.$$

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением (см. (14)):

$$\sigma_u = \frac{\sqrt3}{2}\,\frac{\dot q t\rho}{H_0 H}, \qquad \rho = 1, \qquad \sigma_u = \frac{\sqrt3}{2}\,\frac{y_0+\pi/2}{H_0}\,\dot q t. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) в (1), получаем зависимость основных параметров от времени t

$$\frac{2}{\sqrt3}\,\frac{1}{y_0+\pi/2}\,\frac{dy_0}{dt} = \Big(\frac{\sqrt3}{2}\,\frac{\dot q}{H_0}\Big)^n (y_0+\pi/2)^n t^n,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t} t^n\,dt = \int\limits_0^{y_0} \Big(\frac{2}{\sqrt3}\Big)^{n+1} \frac{1}{(y_0+\pi/2)^{n+1}} \Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n dy_0,$$

$$\frac{1}{n+1}\,(t^{n+1} - t_1^{n+1}) = \Big(\frac{2}{\sqrt3}\Big)^{n+1} \Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n \int\limits_0^{y_0} \frac{dy_0}{(y_0+\pi/2)^{n+1}},$$

$$t^{n+1} = t_1^{n+1} + \Big(\frac{2}{\sqrt3}\Big)^{n+1} \Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n \frac{n+1}{n} \Big(\frac{1}{(\pi/2)^n} - \frac{1}{(y_0+\pi/2)^n}\Big).$$

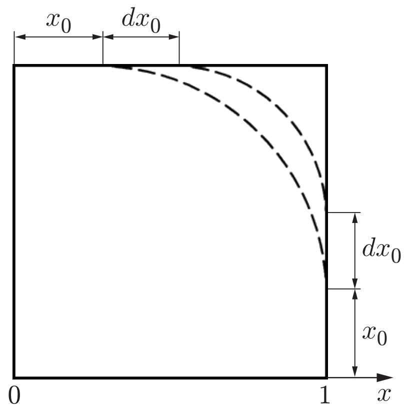

Рис. 3. Третья стадия ползучести мембраны

Время окончания второй стадии определяется следующим выражением:

$$t_2^{n+1} = (t\big|_{y_0=b-1})^{n+1} = t_1^{n+1} + \frac{n+1}{n}\Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\Big(\frac{1}{(\pi/2)^n} - \frac{1}{(b-1+\pi/2)^n}\Big). \qquad (19)$$

3. Третья стадия деформирования при идеальном скольжении мембраны вдоль продольных стенок высокой П-образной матрицы. На третьей стадии (рис. 3) ползучесть мембраны в момент касания ею обеих стенок матрицы описывается соотношениями

$$dp_{\theta\theta} = \frac{b-1+2(x_0+dx_0)+\pi(1-x_0-dx_0)/2-[b-1+2x_0+\pi(1-x_0)/2]}{b-1+\pi(1-x_0)/2+2x_0} =$$
$$= \frac{(2-\pi/2)\,dx_0}{b-1+\pi/2+x_0(2-\pi/2)} = F(x_0)\,dx_0,$$
$$F(x_0) = \frac{2-\pi/2}{b-1+\pi/2+x_0(2-\pi/2)}, \qquad (20)$$

$$p_{\theta\theta} = -\int\limits_{H_2}^{H(x_0)} \frac{dH}{H(x_0)} = \ln\frac{H_2}{H(x_0)} = \int\limits_0^{x_0} F(x_0)\,dx_0 = \ln\frac{b-1+\pi/2+x_0(2-\pi/2)}{b-1+\pi/2};$$
$$H(x_0) = H_2\,\frac{b-1+\pi/2}{b-1+\pi/2+x_0(2-\pi/2)} = \frac{1}{b-1+\pi/2+x_0(2-\pi/2)}. \qquad (21)$$

В качестве момента времени t_3, в который заканчивается третья стадия, примем значение t, при котором мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы, при этом $x_0 = x_0^{lim}$. Предполагается, что $1 - x_0^{lim} \ll 1$. Толщина мембраны в конце третьей стадии определяется выражением (21) при этом значении x_0^{lim}:

$$H_3 = H(x_0^{lim}) = \frac{1}{b-1+\pi/2+x_0^{lim}(2-\pi/2)}.$$

Согласно (17), (20) интенсивность скоростей деформаций ползучести равна

$$\dot p_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,F(x_0)\,\frac{dx_0}{dt}. \qquad (22)$$

Интенсивность напряжений определяется соотношением

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot q t\rho}{H_0 H(x_0)}, \qquad \rho = 1 - x_0. \qquad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (1), получаем

$$t^{n+1} = t_2^{n+1} + \Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \int\limits_0^{x_0} \Big(\frac{H(x_0)}{\rho}\Big)^n F(x_0)\, dx_0.$$

Момент времени, в который матрица практически полностью заполняется мембраной, определяется равенством $t_3^0 = t\big|_{x_0=x_0^{lim}}$ (величина t_2 вычисляется с помощью равенства (19)):

$$(t_3^0)^{n+1} = t_2^{n+1} + \Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \int\limits_0^{x_0^{lim}} \Big(\frac{H(x_0)}{1-x_0}\Big)^n F(x_0)\, dx_0.$$

4. Вторая стадия деформирования мембраны в случае ее прилипания к продольным стенкам высокой П-образной матрицы. При исследовании второй стадии ползучести мембраны рассмотрим два ее близких положения (радиус свободной дуги мембраны $\rho = 1$). Согласно определению $\dot p_{\theta\theta}$ имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{dy_0 + \pi/2 - \pi/2}{\pi/2} = \frac{2dy_0}{\pi}, \qquad \dot p_{\theta\theta} = \frac{2}{\pi}\frac{dy_0}{dt} = -\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}, \qquad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH}{H},$$
$$p_{\theta\theta} = \int\limits_{H_1}^{H(y_0)} \frac{dH}{H} = -\int\limits_0^{y_0} \frac{2\,dy_0}{\pi}, \qquad H(y_0) = H_1\, \mathrm{e}^{-2y_0/\pi} = \frac{2}{\pi}\, \mathrm{e}^{-2y_0/\pi}\,. \tag{24}$$

Вторая стадия завершается в тот момент, когда мембрана касается верхней стенки матрицы (при $y_0 = b-1$).

Толщина мембраны в конце второй стадии равна

$$H_2 = H\big|_{y_0=b-1} = \frac{2}{\pi}\, \mathrm{e}^{-2(b-1)/\pi}\,.$$

Интенсивность напряжений в свободной части мембраны определяется следующим соотношением (см. (7)):

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot q t\rho}{H_0 H(y_0)}, \qquad \rho = 1. \tag{25}$$

Согласно (24) интенсивность скоростей деформаций ползучести равна

$$\dot p_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\dot p_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{dy_0}{dt}. \tag{26}$$

Подставляя (25), (26) в (1), получаем

$$t^{n+1} = t_1^{n+1} + \frac{2}{\pi}\Big(\frac{H_0}{\dot q}\Big)^n (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \int\limits_0^{y_0} [H(y_0)]^n\, dy_0.$$

Время окончания второй стадии определяется выражением

$$t_2 = t\big|_{y_0=b-1}.$$

5. Третья стадия деформирования мембраны в случае ее прилипания к продольным стенкам высокой П-образной матрицы. На третьей стадии ползучесть мембраны в тот момент, когда она касается всех стенок матрицы, определяется следующим образом:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{2dx_0 + \pi(1 - x_0 - dx_0)/2 - \pi(1 - x_0)/2}{\pi(1 - x_0)/2} = \frac{(2 - \pi/2)\,dx_0}{\pi(1 - x_0)/2},$$

$$p_{\theta\theta} = -\int\limits_{H_2}^{H(x_0)} \frac{dH}{H(x_0)} = \int\limits_0^{x_0} \frac{(2 - \pi/2)}{\pi(1 - x_0)/2}\,dx_0, \qquad \ln\frac{H(x_0)}{H_2} = \frac{2(2 - \pi/2)}{\pi}\,\ln(1 - x_0),$$

$$H(x_0) = H_2(1 - x_0)^{2(2-\pi/2)/\pi}.$$

Третья стадия завершается при $x_0 = x_0^{lim}$. Предполагается, что $1 - x_0^{lim} \ll 1$.

Толщина мембраны в конце третьей стадии равна

$$H_3 = H(x_0^{lim}) = H_2(1 - x_0^{lim})^{2(2-\pi/2)/\pi}.$$

Интенсивность напряжений определяется соотношением

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot{q}t\rho}{H_0 H}, \qquad \rho = 1 - x_0, \tag{27}$$

интенсивность скоростей деформаций ползучести равна

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2 - \pi/2}{\pi/2}\,\frac{dx_0}{dt}. \tag{28}$$

Подставляя (27), (28) в (1), получаем

$$t^{n+1} = t_2^{n+1} + \Big(\frac{H_0}{\dot{q}}\Big)^n (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \int\limits_0^{x_0} \Big(\frac{H(x_0)}{\rho}\Big)^n \frac{2 - \pi/2}{\pi(1 - x_0)/2}\,dx_0 =$$

$$= t_2^{n+1} + (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\Big(\frac{H_0}{\dot{q}}\Big)^n \frac{2 - \pi/2}{\pi/2} \int\limits_0^{x_0} \frac{(H(x_0))^n}{(1 - x_0)^{n+1}}\,dx_0.$$

Время окончания третьей стадии (практически полного заполнения матрицы) определяется выражением

$$t_3^0 = t\big|_{x_0 = x_0^{lim}}.$$

6. Результаты расчетов при постоянной скорости $\dot{q}$. Рассмотрим деформирование мембраны внутри матрицы высотой $b = 2$ при следующих значениях параметров: $H_0 = 0{,}01$, $n = 3$, $x_0^{lim} = 0{,}99$. Исследуем ползучесть мембраны до момента t_3^0 при значениях скорости возрастания поперечного давления $\dot{q} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ и $\dot{q} = 10^{-4}$.

На рис. 4 приведены зависимости толщины мембраны H и интенсивности напряжений в свободной части мембраны σ_u от времени при различных значениях $\dot{q}$. Значения основных параметров t, H, σ_u в конце каждой стадии приведены в табл. 1, 2 (графы 2–4 и 5–7). Из приведенных в пп. **2–5** формул и табл. 1, 2 следует, что при $\dot{q} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ и $\dot{q} = 10^{-4}$ значения толщины свободной части мембраны в конце каждой стадии совпадают. Во всех случаях зависимости $H(t)$ являются монотонно убывающими. На первой и второй стадиях интенсивность напряжений σ_u увеличивается, на третьей — уменьшается. Момент

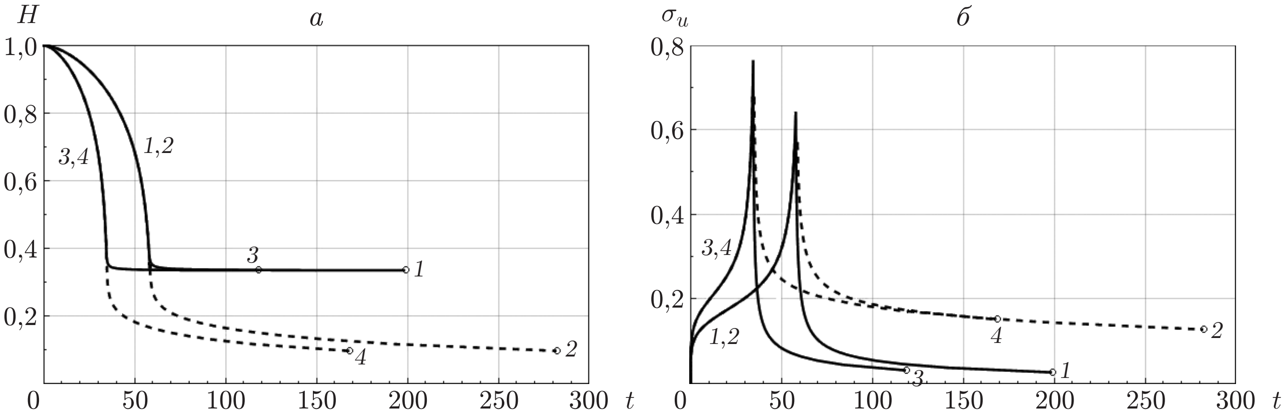

Рис. 4. Зависимости толщины мембраны (*а*) и интенсивности напряжений в свободной части мембраны (*б*) от времени в случае постоянного нагружения: *1, 2* — $\dot q = 0{,}5\cdot 10^{-4}$, *3, 4* — $\dot q = 10^{-4}$; *1, 3* — контактные условия идеального скольжения (сплошные линии), *2, 4* — условия прилипания (штриховые линии)

Таблица 1

Характеристики ползучести мембраны в случае идеального скольжения

Номер стадии	$\dot q = 0{,}5\cdot 10^{-4}$			$\dot q = 10^{-4}$			$\dot q = \begin{cases} 0{,}5\cdot 10^{-4}, & \tau<\tau_1,\\ 10^{-4}, & \tau_1<\tau<\tau_1^0\end{cases}$			$\dot q = \begin{cases} 10^{-4}, & \tau<0{,}5\tau_2,\\ 0{,}5\cdot 10^{-4}, & \tau_2<\tau<\tau_2^0\end{cases}$		
	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u
1	52,1	0,637	0,354	31,0	0,637	0,421	52,1	0,637	0,354	31,0	0,637	0,421
2	57,8	0,389	0,643	34,4	0,389	0,765	57,8	0,389	0,643	34,4	0,389	0,765
3	198,0	0,334	0,026	117,7	0,334	0,031	128,9	0,334	0,038	195,2	0,334	0,030

Таблица 2

Характеристики ползучести мембраны в случае прилипания

Номер стадии	$\dot q = 0{,}5\cdot 10^{-4}$			$\dot q = 10^{-4}$			$\dot q = \begin{cases} 0{,}5\cdot 10^{-4}, & \tau<\tau_1,\\ 10^{-4}, & \tau_1<\tau<\tau_1^0\end{cases}$			$\dot q = \begin{cases} 10^{-4}, & \tau<0{,}5\tau_2,\\ 0{,}5\cdot 10^{-4}, & \tau_2<\tau<\tau_2^0\end{cases}$		
	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u
1	52,1	0,637	0,354	31,0	0,637	0,421	52,1	0,637	0,354	31,0	0,637	0,421
2	58,3	0,337	0,749	34,7	0,337	0,891	58,3	0,337	0,749	34,7	0,337	0,891
3	281,3	0,096	0,127	167,3	0,096	0,151	183,2	0,096	0,168	277,3	0,096	0,127

времени t_3^0, в который мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы, при обоих значениях $\dot q$ в случае идеального скольжения меньше, чем в случае прилипания, значения H_3, наоборот, в случае идеального скольжения больше, чем в случае прилипания.

Вычисления показывают, что при заданных значениях используемых параметров деформирование мембраны в основном происходит на третьей стадии.

7. Ползучесть мембраны в случае кусочно-постоянной зависимости $\dot q$ от времени. Рассмотрим две программы нагружения. В соответствии с первой программой (графы 8–10 в табл. 1, 2) сначала деформирование мембраны происходит при скорости $\dot q^{(1)} = 0{,}5\cdot 10^{-4}$ в течение времени $\tau_1 = 0{,}5\tau_1^0$ (τ_1^0 — момент времени, в который мембрана касается всех стенок матрицы), затем — при $\dot q^{(2)} = 10^{-4}$ в течение времени $\tau_1 < \tau < \tau_1^0$. В соответствии со второй программой нагружения (графы 11–13 в табл. 1, 2) сначала мем-

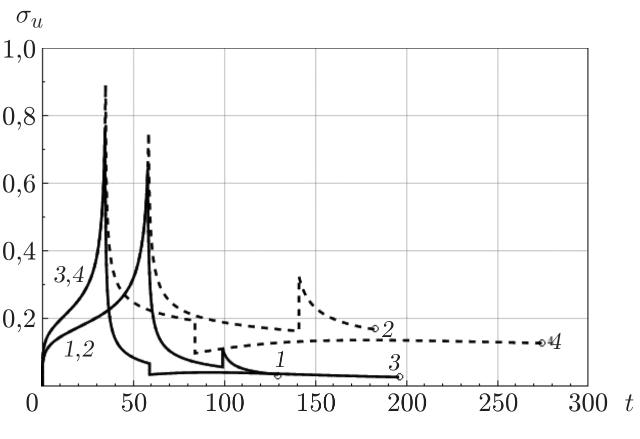

Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений в свободной части мембраны от времени в случае кусочно-постоянного нагружения (обозначения те же, что на рис. 4)

брана деформируется при значении $\dot q^{(2)} = 10^{-4}$ в течение времени $\tau_2 = 0{,}5\tau_2^0$ (τ_2^0 — момент времени, в который мембрана касается всех стенок матрицы), затем — при $\dot q^{(1)} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ в течение времени $\tau_2 < \tau < \tau_2^0$. В табл. 1, 2 приведены значения t, H, σ_u, соответствующие окончанию каждой из трех стадий ползучести мембраны согласно первой и второй программам нагружения (графы 8–10 и 11–13 соответственно). Из табл. 1, 2 следует, что при данных значениях $\dot q^{(1)}$ и $\dot q^{(2)}$ скачкообразное изменение $\dot q$ происходит на третьей стадии ползучести мембраны. На рис. 5 приведены зависимости $\sigma_u(t)$ в свободной части мембраны, соответствующие двум программам нагружения при условиях идеального скольжения и прилипания.

Рассмотрим сумму парциальных времен S, определяемую как сумму отношений длительностей ползучести при постоянных значениях $\dot q$ к длительностям деформирования до момента, в который мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы.

В случае идеального скольжения

$$S_1 = \frac{99}{198} + \frac{128{,}9 - 99}{117{,}7} = 0{,}75 < 1, \qquad S_2 = \frac{0{,}5 \cdot 117{,}7}{117{,}7} + \frac{195{,}2 - 88{,}8}{198{,}0} = 1{,}04 > 1,$$

в случае прилипания

$$S_1 = \frac{140{,}6}{281{,}3} + \frac{183{,}2 - 140{,}6}{167} = 0{,}76 < 1, \qquad S_2 = \frac{83{,}5}{167{,}0} + \frac{277{,}3 - 83{,}5}{281{,}3} = 1{,}19 > 1.$$

Вычисления показывают, что и в случае идеального скольжения, и в случае прилипания при мгновенном увеличении значения $\dot q$ сумма парциальных времен $S < 1$, при мгновенном уменьшении значения $\dot q$ $S > 1$.

8. Длительная прочность при ступенчатом одноосном нагружении. Для подтверждения достоверности полученных теоретических результатов рассмотрим результаты известных испытаний металлов на длительную прочность при однократном ступенчатом изменении величины растягивающего напряжения.

В работе [8] при анализе результатов испытаний при переменной температуре предложено использовать правило линейного суммирования парциальных времен. Ниже рассматривается случай, когда растягивающее напряжение в образце равно σ_1 в течение времени τ_1, затем оно скачкообразно меняется до значения σ_2 и остается постоянным вплоть до разрушения в момент времени $\tau^* = \tau_1 + \tau_2$. Правило суммирования парциальных времен при переменных напряжениях называется правилом Бейли, в этом случае имеет место

Таблица 3

Значения суммы парциальных времен, характеризующие длительную прочность металлов при ступенчатом изменении напряжения

Материал	T, °C	S	
		$\sigma_1 < \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$
Сталь марки ЭИ-695Р [9]	—	0,77	3,15
Алюминиевый сплав [10]	180	0,71	1,26
Сплав марки ЭИ-826 [11]	800	0,84	1,04
Сталь марки Р2М [12]	525	—	1,54

следующее равенство:

$$S = \frac{\tau_1}{\tau_1^*} + \frac{\tau_2}{\tau_2^*} = 1$$

(τ_i^* — время до разрушения при постоянном растягивающем напряжении σ_i $(i = 1, 2)$).

В табл. 3 приведены значения суммы S при увеличении и уменьшении растягивающего напряжения. Во всех проведенных испытаниях металлов на длительную прочность при кусочно-постоянном растягивающем напряжении в случае $\sigma_1 > \sigma_2$ $S > 1$, в случае $\sigma_1 < \sigma_2$ $0 < S < 1$. Результаты экспериментов, приведенные в табл. 3, согласуются с результатами исследований, полученными в пп. **1–7**.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1974.
2. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Малинин Н. Н.** Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986.
4. **Локощенко А. М.** Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
5. **Локощенко А. М., Тераул В. В.** Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 3. С. 126–133.
6. **Демин В. А., Локощенко А. М., Жеребцов А. А.** Ползучесть длинной прямоугольной мембраны внутри криволинейной матрицы // Изв. вузов. Машиностроение. 1998. № 4–6. С. 41–46.
7. **Шестериков С. А., Юмашева М. А.** Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
8. **Robinson E. L.** Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels // Trans. ASME. 1952. V. 74, N 5. P. 777–780.
9. **Гуляев В. Н., Колесниченко М. Г.** К оценке долговечности в процессе ползучести при ступенчатом изменении нагрузки // Завод. лаб. 1963. № 6. С. 748–752.
10. **Marriott D. L., Penny R. K.** Strain accumulation and rupture during creep under variable uniaxial tensile loading // J. Strain Anal. 1973. V. 8, N 3. P. 151–159.
11. **Осасюк В. В., Олисов А. Н.** К вопросу о гипотезах суммирования относительных долговечностей // Пробл. прочности. 1979. № 11. С. 31–33.
12. **Мельников Г. П., Трунин И. И.** Закономерности изменения характеристик ползучести и длительной прочности стали Р2М при ступенчатом изменении нагрузки // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях: Сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1984. С. 108–113.

Поступила в редакцию 27/II 2018 г.,
после доработки — 16/V 2018 г.
Принята к публикации 28/V 2018 г.