ПМТФ, № 6, 1989

УДК 533.952

А. Б. Будько, М. А. Либерман

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ В ПИНЧЕ ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ

В последнее время большой интерес вызывают исследования сильноточных разрядов — линейных z-пинчей — в плазме высокой плотности. Этот интерес обусловлен проблемой создания источников излучения большой интенсивности и использования z-пинчей в замороженных дейтериевых нитях как нового перспективного метода для получения термоядерной энергии [1—4].

Для лучшего понимания физических процессов, протекающих в плазме z-пинча, необходимо знать распределения тока, температуры и плотности, зависящие от динамики плазмы. Автомодельные решения, описывающие динамику z-пинча в приближении бездиссипативной магнитной гидродинамики, изучались в [5—8]. Такое приближение имеет место при относительно большом токе и низкой плотности плазмы в z-пинче, когда скорости движения и температура плазмы достаточно велики и диссипативными членами в уравнениях можно пренебречь в меру большой величины магнитного числа Рейнольдса ($\mathrm{R}_m = uR/\nu_m \gg 1$).

В настоящей работе рассматриваются автомодельные решения для динамики z-пинча в плотной плазме при относительно небольших токе и температуре плазмы пинча. Протекание электрического тока в z-пинче достаточно большой плотности вызывает нагрев и разлет плазмы, причем в условиях экспериментов [1—4] скорость разлета и температура плазмы невелики, так что $\mathrm{R}_m \simeq 1{,}2\cdot 10^{-7} R^2 \tau^{-1} T^{3/2}_{,\text{эв}} \lesssim 1$. При этом динамика плазмы z-пинча определяется джоулевым нагревом, а в уравнениях МГД следует учитывать члены с конечной проводимостью. Вместе с тем в широком диапазоне изменений параметров вязкость плазмы несущественна и соответствующими членами в уравнениях движения и переноса тепла можно пренебречь при $\mathrm{Re} = uR/\nu \gg 1$.

1. Исходные уравнения. Автомодельные переменные. Для плотной плазмы воспользуемся уравнениями магнитной гидродинамики в одно-температурном приближении ($T_i = T_e = T$) [9]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{u}) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left\{[\mathbf{u}\times\mathbf{B}] - \frac{c\mathbf{R}}{en}\right\}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}] - \frac{1}{\rho}\nabla P; \tag{3}$$

$$\frac{3}{2}n\left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T\right] + P\operatorname{div}\mathbf{u} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{R}_T}{en}. \tag{4}$$

Здесь $\rho = m_i n$ — плотность плазмы; n — плотность числа частиц; $\mathbf{u}$ — скорость; $P = 2nT$ — давление; $\mathbf{B}$ — магнитное поле; $\mathbf{q}$ — плотность потока тепла; $\mathbf{j} = (c/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{B}$ — плотность электрического тока; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_T$ — сила трения и термосила; $\sigma = (e^2 n/m_e)\tau_e$ — проводимость плазмы.

Рассмотрим случай незамагниченной плазмы, соответствующей условиям экспериментов [1—4]. Используя явный вид кинетических коэффициентов [9] и сравнивая между собой диссипативные члены в правых частях уравнений (2)—(4), покажем, что все диссипативные члены малы по сравнению с джоулевыми диссипациями в меру малости параметров:

$$\omega_e\tau_e \ll 1,\ \beta\omega_e\tau_e \ll 1 \quad (\beta = 4\pi P/B^2 \sim 1). \tag{5}$$

Пренебрегая инерционными членами в (3) для дозвуковых течений и оставляя в силу (5) в уравнениях только члены с конечной проводимостью, перепишем (1)—(4) в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(nru)=0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(uB)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_m}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB)\right); \tag{7}$$

$$\frac{1}{4\pi r}B\frac{\partial}{\partial r}(rB)+\frac{\partial P}{\partial r}=0; \tag{8}$$

$$3n\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial r}\right)+P\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)=\frac{\nu_m}{4\pi r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB)\right)^2, \tag{9}$$

где $u\equiv u_r$ и $B\equiv B_\varphi$ — радиальная компонента скорости и азимутального магнитного поля; $\nu_m=c^2/(4\pi\sigma)$— магнитная вязкость.

На оси скорость частиц плазмы и магнитное поле обращаются в нуль, а на границе пинча при $r=R(t)$ плотность обращается в нуль, а магнитное поле соответствует полному току. Таким образом, граничные условия для системы уравнений (6)—(9): $u=0$, $B=0$ при $r=0$, $n=0$, $u=\dot R(t)$, $B=(2I(t))/(cR(t))$ при $r=R(t)$. Введем автомодельную координату $\xi=r/R(t)$ и запишем решение (6)—(9) в виде

$$u(r,t)=\dot R(t)\xi,\quad n(r,t)=n_0\alpha^{-2}(t)n_1(\xi), \tag{10}$$
$$T(r,t)=T_0\alpha^{-2\varkappa}(t)T_1(\xi),\quad B(r,t)=B_0\alpha^{\mu}(t)B_1(\xi)$$

($\alpha(t)=R(t)/R_0$, $R_0=R(0)$,— начальный радиус пинча, μ и $\varkappa$ — показатели автомодельности).

Связывая произвольные размерные константы соотношением $16\pi n_0T_0=B_0^2$ и переходя в (6)—(9) к автомодельным переменным, находим, что (6) удовлетворяется тождественно, а разделение переменных ξ и t в (8) требует выполнения условия

$$\mu+\varkappa+1=0. \tag{11}$$

С учетом (11) уравнение (8) в автомодельных переменных принимает вид

$$\frac{d}{d\xi}(n_1T_1+B_1^2)+\frac{2}{\xi}B_1^2=0. \tag{12}$$

Переходя к автомодельным переменным и разделяя переменные в (9), получим

$$\left(1-\frac{3}{2}\varkappa\right)\dot\alpha=\lambda^2\alpha^{3\varkappa-1}; \tag{13}$$

$$\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi B_1)\right]^2=\lambda^2n_1T_1^{5/2}, \tag{14}$$

где λ^2 — константа разделения; точка означает дифференцирование по времени, измеряемому в единицах $t_0=R_0/\sqrt{\nu_m^{(0)}}$ ($\nu_m^{(0)}=\nu_m(t=0,r=R_0)$).

Разделение переменных в уравнении индукции (7) приведет к уравнениям

$$(\mu+1)\dot\alpha=2\beta^2(\zeta+1)\alpha^{3\varkappa-1}; \tag{15}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(T_1^{-3/2}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi B_1)\right)=2\beta^2(\zeta+1)B_1 \tag{16}$$

(β — константа разделения, $\zeta=\lambda^2/\beta^2$).

Совместное решение (13) и (15) накладывает условие на константы μ и $\varkappa$ $\mu=-1-\varkappa=-(4\zeta+5)/(2\zeta+3)$ и приводит к временно́й зависимости функций в автомодельных решениях

$$\alpha(t)=\left(1+2\lambda^2\frac{t}{t_0}\right)^{-1-3/2\zeta}. \tag{17}$$

Профили автомодельных переменных $n_1(\xi)$, $T_1(\xi)$, $B_1(\xi)$ можно найти из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12), (14), (16) с граничными условиями $T_1(0) = n_1(0) = 1$, $B_1(0) = 0$.

Прежде чем перейти к исследованию решений, заметим, что возможные автомодельные решения могут представлять асимптотику истинного движения плазмы, если временна́я зависимость тока z-пинча для такого решения согласуется с изменением тока в цепи, z-пинч — внешний источник тока.

Учитывая автомодельное представление для плотности электрического тока

$$j(r, t) = \frac{cB_0}{4\pi R_0} \alpha^{\mu-1} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}(\xi B_1),$$

находим выражение для временно́й зависимости полного тока в z-пинче:

$$I(t) = 2\pi \int_0^{R(t)} j(r, t)\, r\, dr = \frac{1}{2} cR(t)\, B(t) \lim_{\xi \to 1} \xi B_1(\xi). \tag{18}$$

Из (18), согласно (17) и (10), следует, что при $-1 < \zeta < 0$ автомодельные решения отвечают разлету плазмы при уменьшении температуры и плотности на стадии убывания полного тока, а при $-3/2 < \zeta < -1$ — возрастанию полного тока и разлету плазмы при уменьшении плотности и повышении температуры. Решения, соответствующие $\zeta > 0$ и $\zeta < -3/2$, могут описывать автомодельный режим сжатия при увеличении полного тока, температуры и плотности.

2. Автомодельные решения. Для качественного исследования решений уравнений (12), (14), (16) удобно исключить плотность $n_1(\xi)$. Перейдя в уравнениях относительно B_1 и T_1, получившихся после исключения n_1, к новой переменной $\eta = \xi^2$ и новым функциям $Y = T_1^{-3/2}(\eta)$, $\psi = \eta^{1/2} B_1(\eta)$, имеем

$$\frac{d}{d\eta}\left(Y \frac{d\psi}{d\eta}\right) - \frac{\lambda^2}{2\zeta}(\zeta + 1)\frac{1}{\eta}\psi = 0; \tag{19}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[Y\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)^2\right] + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\psi}{\eta}\frac{d\psi}{d\eta} = 0. \tag{20}$$

Граничные условия для Y и ψ есть

$$\psi(0) = 0, \quad Y(0) = 1, \quad \frac{d\psi}{d\eta}(0) = \lambda/2, \tag{21}$$

где, не ограничивая общности, можно положить $\lambda > 0$. С учетом (21) найдем первый интеграл системы (19), (20):

$$\left(\frac{2}{\lambda}\frac{d\psi}{d\eta}\right)^{3\zeta+2} = Y^{-(2\zeta+1)}, \tag{22}$$

в частности,

$$Y = \text{const} = 1 \text{ при } \zeta = -2/3. \tag{23}$$

С помощью (22), исключив из (19) Y, имеем

$$\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{2}{\lambda}\frac{d\psi}{d\eta}\right)^{-\frac{3\zeta+2}{2\zeta+1}} \frac{d\psi}{d\eta}\right] - \frac{\lambda^2}{2\zeta}(\zeta + 1)\frac{1}{\eta}\psi = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) относится к классу обобщенно-однородных. Стандартным методом его порядок можно понизить.

Вводя новую переменную $y = (\lambda/2)^{\zeta/(3\zeta+2)} \eta^{-(\zeta+1)/(3\zeta+2)} \psi(\eta)$ и новую функцию $p(y) = dy/(d \ln \eta)$, из (24) при $\zeta \neq -2/3$ и $\zeta \neq -1/2$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно $p(y)$:

$$p\frac{dp}{dy} - \frac{\zeta}{3\zeta+2} p - \frac{(\zeta+1)(2\zeta+1)}{(3\zeta+2)^2} y + \frac{4\zeta+2}{\zeta} y \left(\frac{\zeta+1}{3\zeta+2} y + p\right)^{\frac{3\zeta+2}{2\zeta+1}} = 0. \tag{25}$$

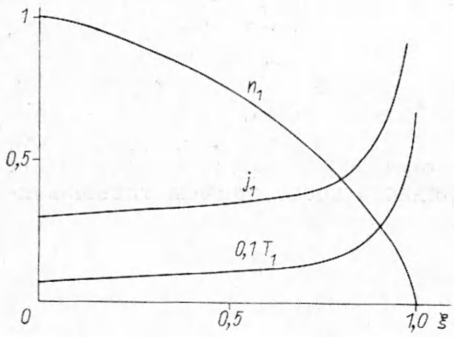

Рис. 1

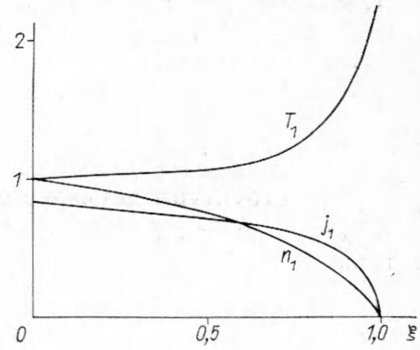

Рис. 2

Качественное исследование поведения решений уравнения (25) может быть проведено обычными методами. Поведение интегральных кривых уравнения (25), а также вид автомодельных профилей существенно зависят от параметра ζ. При $\zeta < -1$ и $\zeta > 0$ решения отвечают сжатию или разлету плазмы, плотность которой не обращается в нуль на конечных расстояниях от оси, а полная масса и ток расходятся, т. е. такие решения не имеют непосредственного физического смысла. Для $0 > \zeta > -1$ решения соответствуют динамике плазмы пинча с резкой границей. Асимптотическое поведение автомодельных профилей вблизи границы пинча при $\xi \to \xi_0$, где ξ_0 — граница пинча, запишем в виде

$$\psi \sim \psi_0 - \psi_1(\xi_0^2 - \xi^2)^{-\zeta/(\zeta+1)},\ n_1 \sim (\xi_0 - \xi)^{(3\zeta+4)/(3\zeta+3)},$$

$$T_1 \sim (\xi_0 - \xi)^{-(6\zeta+4)/(3\zeta+3)},\ j_1 \sim (\xi_0 - \xi)^{-(2\zeta+1)/(\zeta+1)}.$$

Для $-1/2 < \zeta < 0$ температура и плотность электрического тока возрастают при приближении к границе пинча $\xi \to \xi_0$. Для $-2/3 < \zeta < -1/2$ плотность тока обращается в нуль при $\xi \to \xi_0$, однако температура возрастает при приближении к границе. Для $-1 < \zeta < -2/3$ как температура, так и плотность электрического тока обращаются в нуль при $\xi \to \xi_0$. Примеры автомодельных профилей для $\zeta = -0{,}2$ и $-0{,}6$ приведены на рис. 1 и 2 соответственно.

3. Аналитические решения. При некоторых значениях ζ решение системы уравнений (19), (20) может быть получено в замкнутой аналитической форме. Для $\zeta = -2/3$ из (19) и (23) находим

$$Y = 1, \quad \frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \frac{\lambda^2}{4\eta}\psi = 0. \tag{26}$$

Решение (26) с граничными условиями (21) есть $\psi = \xi J_1(\lambda\xi)$. Здесь $J_1(x)$ — функция Бесселя, а условие обращения в нуль плотности тока на границе пинча при $\xi = \xi_0 = 1$ определяет $\lambda = j_{0,1} = 2{,}405$, где $j_{0,1}$ — первый нуль функции Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, автомодельные решения при $\zeta = -2/3$ имеют вид

$$\alpha(t) = R(t)/R_0 = (1 + 2\lambda^2 t/t_0)^{5/4},\ T(\xi, t) = T_0\alpha^{-4/5},$$

$$n(\xi, t) = n_0\alpha^{-2}[J_0(\lambda\xi)]^2,\ B(\xi, t) = B_0\alpha^{-7/5}J_1(\lambda\xi),$$

$$j(\xi, t) = \frac{\lambda c B_0}{4\pi R_0}\alpha^{-12/5}J_0(\lambda\xi), \quad I(t) = cB_0R_0J_1(\lambda)\alpha^{-2/5}(t).$$

Это решение описывает разлет изотермического пинча при спадании полного тока в цепи: $I(t) \sim t^{-1/2}$ при $t/t_0 \gg 1$.

Для $\zeta = -1$ из уравнений (22) и (19) находим $\psi = (1/2)\lambda\eta$, $Y = 1 - (1/2)\lambda^2\eta$. Отсюда

$$R(t) = R_0(1 + 2\lambda^2 t/t_0)^2,\ n(\xi, t) = n_0\alpha^{-2}(1 - (1/2)\lambda^2\xi^2)^{5/3},$$

$$T(\xi, t) = T_0\alpha^{-1}(1 - (1/2)\lambda^2\xi^2)^{-2/3},\ B(\xi, t) = B_0\alpha^{-2/3}(1/2)\lambda\xi,$$

$$j(\xi, t) = \frac{\lambda c B_0}{4\pi R_0}\alpha^{-5/2}(t), \quad I(t) = \frac{1}{4}c\lambda R_0 B_0\alpha^{-1/2}(t).$$

На границе пинча при $\xi = \xi_0 = 1$ давление и плотность плазмы обращаются в нуль при $\lambda = \sqrt{2}$, что соответствует разлету плазменного шнура пинча с постоянной по сечению плотностью тока при спадании полного тока в цепи и перегреве плазмы вблизи границы нинча.

Для $\zeta = -1$ решение уравнений (22) и (19) имеет вид $\psi = 2\lambda\eta/(4 + \lambda^2\eta)$, $Y = (1 + (1/4)\,\lambda^2\eta)^2$ и отвечает пинчу с диффузной границей, а разлет пинча происходит при постоянном полном токе

$$\alpha(t) = (1 + 2\lambda^2 t/t_0)^{1/2},$$
$$n(\xi, t) = n_0\alpha^{-2}(1 + (1/4)\lambda^2\xi^2)^{-2/3},\ T(\xi, t) = T_0(1 + (1/4)\lambda^2\xi^2)^{-4/3},$$
$$B(\xi, t) = B_0\alpha^{-1}2\lambda\xi/(4 + \lambda^2\xi^2),\ I(t) = (c/\lambda)R_0B_0 = \mathrm{const}.$$

В последнем случае значение λ определяется величиной полного тока, протекающего в пинче.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Scudder D. W.** High-density z-pinches formed from solid deuterium fibres // Bull. Amer. Phys. Soc.— 1985.— V. 30, N 9.
2. **Scudder D. W., Dagazian R. Y. et al.** Experiments on high-density z-pinches formed from solid deuterium fibres // Bull. Amer. Phys. Soc.— 1986.— V. 31, N 9.
3. **Sethian J. D., Robson A. E. et al.** Enhanced stability and neutron production in a dense z-pinch plasma formed from a frozen deuterium fiber // Phys. Rev. Lett.— 1987.— V. 59, N 8.
4. **Scudder D. W.** Experiments on high-density z-pinches formed from solid deuterium fibres.— Los Alamos, 1987.— (CTR — DOT/Los Alamos Nat. Lab.; MS F 640).
5. **Liberman M. A., Velikovich A. L.** Self-similar motions in z-pinch dynamics // Nucl. Fusion.— 1986.— V. 26, N 6.
6. **Куликовский А. Г.** К вопросу о пульсации плазменного шнура // ДАН СССР.— 1957.— Т. 114, № 5.
7. **Felber F. S.** Self-similar oscillations of a z-pinch // Phys. Fluids.— 1982.— V. 25, N 4.
8. **Felber F. S., Liberman M. A., Velikovich A. L.** Magnetic flux compression by plasma liners // IVth Intern. conf. on megagauss field generation and related topics, Santa Fe, 1986.— N. Y., 1987.
9. **Брагинский С. И.** Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1963.— Т. 1.

г. Москва *Поступила 27/VII 1988 г.*

УДК 537.521

А. В. Жаринов, С. В. Никонов

НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ РАЗРЯД В $E \perp H$ ПОЛЯХ С НЕЗАМКНУТЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ДРЕЙФОМ

Мощные газоразрядные приборы, управляемые малым сигналом, представляют значительный интерес для задач сильноточной электроники и высоковольтной коммутационной техники. В данной работе изучается несамостоятельный разряд в разреженном газе между коаксиальными цилиндрическими электродами во внешнем азимутальном магнитном поле. Показано, что при определенных условиях разряд горит только при наличии внешнего пускового тока и разрядный ток много больше пускового.

Большинство работ, в которых изучался газовый разряд в $E \perp H$ полях, посвящено самостоятельному разряду с замкнутым электронным дрейфом. Такой разряд применяется в ускорителях плазмы [1], для формирования ионных пучков [2] и может быть использован для магнитной изоляции [3] и генерации импульсов высокого напряжения [4]. В [5] экспериментально исследовался самостоятельный разряд с незамкнутым дрейфом электронов, катод и анод которого — коаксиальные цилиндры радиусов $R_к$ и $R_а$ ($R_к < R_а$) и длины $L \gg R_а$. Внешнее магнитное поле создавалось текущим по внутреннему цилиндру аксиальным током. Электроны при этом дрейфуют в радиальном электрическом E и азимутальном магнитном H_θ полях вдоль оси системы x, размножаясь за счет ионизации и ион-электронной γ-эмиссии с катода. Самостоятельность разряда обеспечивалась тем, что кванты рентгеновского излучения, поступающие в основном с торцевого электрода, находящегося под анодным потенциалом и расположенного при $x = L$ (где холловский ток максимален), выбивают фотоэлектроны с катода в области $x = 0$. При отсутствии рентгеновского потока из области $x \approx L$ (что достигалось соответствующим изменением геометрии электродов в этой об-