УДК 539.3

ОПИСАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ОТСЧЕТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mails: sokolova@tula.net, dmitro@tula.net

Сформулированы вариационные принципы равновесного протекания процессов деформирования и теплопроводности. Вариационные соотношения записаны в начальной конфигурации тела и могут быть использованы без ограничения на величины деформаций. Представлена система уравнений связанной краевой задачи для изотропных и анизотропных тел, сформулированы начальные и граничные условия. Приведены результаты решения задач о конечном деформировании изначально цилиндрических тел.

Ключевые слова: термомеханика, обратимые деформации, конечные деформации, вариационные принципы, связанные краевые задачи.

Современные конструкционные материалы применяются в широком диапазоне механических и температурных воздействий. Для описания поведения деформируемых твердых тел при указанных воздействиях во многих случаях необходимо построение сложных нелинейных моделей.

В настоящей работе на основе классического термомеханического подхода предложена постановка задачи о конечном деформировании изотропных и анизотропных тел под действием внешних силовых и температурных факторов с учетом их взаимного влияния и приведены результаты ее численного решения.

Система термомеханических уравнений содержит соотношения, описывающие движение материальных точек деформируемого тела в результате внешних механических и тепловых воздействий, а также определяющие соотношения. При описании процессов конечного деформирования необходимо учитывать, что напряженно-деформированное состояние тела определяется не только смещениями точек тела в данный момент времени, но и всей историей деформирования. Следовательно, целесообразно использовать условия равновесного протекания процессов деформирования, согласно которым необходимо выполнение условий равновесия не только для напряжений и деформаций, но и для их приращений, обусловленных приращениями внешних воздействий в данный момент времени.

В работах [1, 2] было предложено формулировать условия равновесного протекания процесса в виде вариационного соотношения, записанного в текущей конфигурации, что позволяет использовать при решении задач смешанный подход Эйлера — Лагранжа. В данной работе вариационное условие сохранения равновесия предлагается записывать в отсчетной конфигурации, что позволит значительно упростить вычислительные алгоритмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-97501-р_центр_а).

Изменение температурного поля описывается уравнением теплопроводности, которое, как правило, представляется в дифференциальной форме. Вариационный принцип теплопроводности для сред, теплоемкость и теплопроводность которых зависят от температуры, приведен в работе [3]. При этом не учитывается влияние деформационных характеристик на температурное поле, а только рассматриваются малые деформации. Поэтому в данной работе предлагается вариационное соотношение, с помощью которого можно исследовать процессы конечного деформирования изотропных и анизотропных тел с учетом взаимного влияния полей деформаций и температуры.

1. Вариационные формы уравнения равновесия. Рассмотрим произвольно выбранный объем V сплошной среды в произвольный момент времени t. На материальный объем действуют внешние поверхностные силы с вектором напряжения $\boldsymbol{P}$, а также внешние массовые силы с интенсивностью $\boldsymbol{F}$. Выражение для суммарной силы, действующей на частицу массой $dm = \rho\, dV$, может быть записано в эйлеровом или лагранжевом представлениях

$$d'\boldsymbol{R} = (\nabla \cdot S + \rho \boldsymbol{F})\, dV = (\overset{\circ}{\nabla} \cdot P + \rho_0 \boldsymbol{F})\, dV_0.$$

Здесь S — тензор истинных напряжений Коши, определяющий внешние поверхностные силы, действующие на материальный объем, в соответствии с соотношением $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n} \cdot S$; $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности Σ. Набла-оператор записан в эйлеровых координатах: $\nabla = \boldsymbol{e}^i\, \partial/\partial x^i$, следовательно, тензор напряжений S, массовая плотность ρ, интенсивность массовых сил должны рассматриваться как функции эйлеровых координат: $S(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$.

В исходной системе координат оператор Гамильтона обозначен $\overset{\circ}{\nabla} = \boldsymbol{e}^i\, \partial/\partial x^i$, ρ_0 — начальная плотность материала, P — тензор условных напряжений Пиолы — Кирхгофа (первый тензор Пиолы — Кирхгофа), связанный с тензором напряжений Коши с помощью соотношения

$$P = \frac{dV}{dV_0}\, (\Phi^{-1})^{\mathrm{т}} \cdot S = \frac{dV}{dV_0}\, S \cdot \Phi^{-1}, \tag{1.1}$$

где $\Phi = \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{x}$ — аффинор деформаций.

Первый тензор Пиолы — Кирхгофа определяет вектор напряжений $\boldsymbol{P}_0$, отнесенный к начальной площади материального элемента, через ориентацию начальной нормали $\boldsymbol{n}_0$ к этому элементу. При этом $\boldsymbol{P}_0\, d\Sigma_0 = \boldsymbol{P}\, d\Sigma$ и $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{n}_0 \cdot P$.

Согласно принципу Лагранжа суммарная работа на любых возможных перемещениях всех активных сил, действующих на механическую систему в фиксированный момент времени, равна нулю. Использование эйлеровой формы нерационально, так как варьирование перемещений обусловливает варьирование оператора $\nabla = \boldsymbol{\epsilon}^i\, \partial/\partial x^i$, поскольку векторы $\boldsymbol{\epsilon}^i$ взаимного локального базиса при варьировании текущего состояния системы изменяются. При этом, например, $\nabla \cdot \delta \boldsymbol{u} \neq \delta \nabla \cdot \boldsymbol{u}$. Оператор $\overset{\circ}{\nabla} = \boldsymbol{e}^i\, \partial/\partial x^i$ не изменяется при варьировании перемещений, поскольку векторы $\boldsymbol{e}^i$ остаются неизменными при варьировании перемещений. В этом случае операции дифференцирования и варьирования коммутативны и $\overset{\circ}{\nabla} \cdot \delta \boldsymbol{u} = \delta \overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}$. Поэтому вариационный принцип Лагранжа удобнее записать в следующем виде:

$$\int\limits_{V_0} (\overset{\circ}{\nabla} \cdot P + \rho_0 \boldsymbol{F}) \cdot \delta \boldsymbol{u}\, dV_0 = 0.$$

Еще одна вариационная форма записи уравнений движения может быть получена при использовании принципа Журдена [4]. Согласно данному принципу возможная мощность активных нагрузок, действующих на частицу среды в фиксированный момент времени t, равна нулю. Возможная мощность вычисляется для поля возможных в данный момент скоростей:

$$\int\limits_V (\nabla \cdot S + \rho \boldsymbol{F}) \cdot \delta \boldsymbol{v}\, dV = 0.$$

При этом целесообразно использовать представление $d'\boldsymbol{R}$ в форме Эйлера, так как в случае варьирования скоростей, в отличие от случая варьирования перемещений, оператор ∇ не изменяется.

Дифференцируя по времени t выражение для суммарной силы $d'\boldsymbol{R}$, записанное в лагранжевом представлении, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\big[(\mathring{\nabla} \cdot P + \rho_0 \boldsymbol{F})\, dV_0\big] = (\mathring{\nabla} \cdot \dot{P} + \rho_0 \dot{\boldsymbol{F}})\, dV_0 = 0. \tag{1.2}$$

Умножим выражение (1.2) на вариацию скорости $\delta\boldsymbol{v}$, отличную от нуля во всех точках рассматриваемого материального объема, и проинтегрируем по начальному объему:

$$\int\limits_{V_0} (\mathring{\nabla} \cdot \dot{P} + \rho_0 \dot{\boldsymbol{F}}) \cdot \delta \boldsymbol{v}\, dV_0 = 0.$$

После преобразований с использованием теоремы Остроградского — Гаусса получаем условие равновесного протекания процесса деформирования в вариационной форме

$$\int\limits_{V_0} \dot{P} \cdot\cdot\, \delta\, (\boldsymbol{v}\mathring{\nabla})\, dV_0 = \int\limits_{\Sigma_0} \dot{\boldsymbol{P}}_0 \cdot \delta\boldsymbol{v}\, d\Sigma_0 + \int\limits_{V_0} \rho_0 \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \delta \boldsymbol{v}\, dV_0, \tag{1.3}$$

где $\dot{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{n}_0 \cdot \dot{P}$ — скорость изменения вектора внешней нагрузки, приложенной на внешней поверхности Σ_0 с вектором единичной нормали $\boldsymbol{n}_0$.

В работах [5, 6] предложен вариационный принцип, подобный соотношению (1.3) и полученный в результате обобщения вариационного принципа нелинейной теории упругости на случай, когда тензор $\dot{P}$ линейно зависит от тензора $\nabla\boldsymbol{v}$ и является его потенциальной тензорной функцией. Соотношение (1.3) содержит абсолютные производные по времени от тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, скорости точек тела. Следовательно, с помощью этого соотношения описывается квазистационарное движение сплошной среды при произвольных определяющих соотношениях и заданных законах изменения внешних нагрузок и скоростей точек, расположенных на соответствующих материальных поверхностях, ограничивающих рассматриваемую среду.

В вариационное соотношение (1.3) входит производная тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа по времени $\dot{P}$, которая зависит от жесткого поворота, сопровождающего деформацию, поскольку в соответствии с определением (1.1)

$$\dot{P} = \Big(\frac{dV}{dV_0}\, S\Big)^{\cdot} \cdot R^{-1} \cdot U^{-1} + \frac{dV}{dV_0}\, S \cdot \big((R^{-1})^{\cdot} \cdot U^{-1} + R^{-1} \cdot (U^{-1})^{\cdot}\big),$$

где R — ортогональный тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций $\Phi = U \cdot R$; $U = U^{\mathrm{т}}$ — левая мера искажения [7, 8].

Таким образом, получим связь между тензором $\dot{P}$ и производной от "повернутого" обобщенного тензора напряжений Коши

$$\Sigma_R = \frac{dV}{dV_0}\, R \cdot S \cdot R^{-1}, \tag{1.4}$$

который инвариантен относительно жесткого поворота. Из определений (1.1), (1.4) после дифференцирования по времени находим

$$\dot{P} = (R^{-1})^{\cdot} \cdot \Sigma_R \cdot U^{-1} + R^{-1} \cdot \dot{\Sigma}_R \cdot U^{-1} + R^{-1} \cdot \Sigma_R \cdot (U^{-1})^{\cdot}.$$

Подставим выражение для $\dot{P}$ в вариационное соотношение (1.3):

$$\int\limits_{V_0} \left[(R^{-1})^{\cdot} \cdot \Sigma_R \cdot U^{-1} + R^{-1} \cdot \dot{\Sigma}_R \cdot U^{-1} + R^{-1} \cdot \Sigma_R \cdot (U^{-1})^{\cdot}\right] \cdot\cdot\, \delta(\boldsymbol{v}\overset{\circ}{\nabla})\, dV_0 =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_0} \dot{\boldsymbol{P}}_0 \cdot \delta \boldsymbol{v}\, d\Sigma_0 + \int\limits_{V_0} \rho_0 \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \delta \boldsymbol{v}\, dV_0. \qquad (1.5)$$

Соотношение (1.5) является условием равновесного протекания процесса деформирования, записанным через “повернутый” обобщенный тензор Σ_R в отсчетной конфигурации.

2. Вариационная форма уравнения теплопроводности. Тепловое воздействие на тело определяется притоком тепловой энергии через поверхность Σ, ограничивающую объем V, и местными источниками тепла, которые имеют физико-химическую природу и в дальнейшем не учитываются. Выражение для общего теплового потока через поверхность Σ за время Δt представим в виде

$$\Delta Q = -\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}\, d\Sigma\, \Delta t = -\int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}_0\, d\Sigma_0\, \Delta t, \qquad (2.1)$$

где $\boldsymbol{q}$ — вектор теплового потока, характеризующий приток тепла через единичную поверхность в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ к текущей поверхности Σ в единицу времени; $\boldsymbol{q}_0$ — вектор теплового потока, характеризующий приток тепла через единичную поверхность в направлении нормали $\boldsymbol{n}_0$ к начальной поверхности Σ_0 в единицу времени.

Используя теорему Остроградского — Гаусса, из выражения (2.1) получаем

$$\Delta Q = -\iiint\limits_{V_0} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{q}_0\, dV_0\ \Delta t. \qquad (2.2)$$

Вектор теплового потока полагаем связанным с неоднородным температурным полем с помощью соотношения

$$\boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{x}, t) = -\Lambda_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} T, \qquad (2.3)$$

где Λ_0 — тензор теплопроводности, определяемый физическими свойствами вещества; $\overset{\circ}{\nabla} T$ — градиент температуры.

Для изотропного материала запишем тензор теплопроводности в виде $\Lambda_0 = \lambda\sqrt{G/g}\, G^{-1}$, где $G^{-1} = (\Phi \cdot \Phi^{\mathrm{T}})^{-1}$ — обратный метрический тензор. В этом случае закон теплопроводности (2.3) преобразуется в закон Фурье $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) = -\lambda \nabla T$, используемый в механике сплошных сред [9, 10]. Для анизотропного материала тензор Λ_0 определяется присущей данному материалу симметрией свойств.

С помощью соотношения (2.2) определяется скорость притока тепла к единице объема материала в виде $\dot{Q} = -\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{q}_0$, выражение для которой с учетом соотношения для теплового потока (2.3) принимает вид

$$\dot{Q} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \left(\Lambda_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} T\right). \qquad (2.4)$$

В случае изотропного материала $\dot{Q} = \lambda \nabla^2 T$, где оператор $\nabla^2 = \sqrt{G/g}\, \overset{\circ}{\nabla} \cdot G^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$.

Определим скорость притока тепла $\dot{Q}$ исходя из второго закона термодинамики, который в дифференциальной форме записывается в виде $T\dot{\eta} = \dot{Q}/\rho_0 + \dot{w}$, где $\dot{\eta}$, $\dot{w} \geqslant 0$ — скорость изменения удельной энтропии и скорость диссипации соответственно [9]. Тогда

$$\dot{Q} = \rho_0(T\dot{\eta} - \dot{w}). \tag{2.5}$$

Приравнивая правые части выражений (2.4) и (2.5), получаем уравнение теплопроводности в общем виде

$$\rho_0(T\dot{\eta} - \dot{w}) = \mathring{\nabla} \cdot \big(\Lambda_0 \cdot \mathring{\nabla} T\big). \tag{2.6}$$

Это уравнение необходимо конкретизировать на основе представлений для энтропии η и скорости диссипации $\dot{w}$ в рассматриваемой модели материала.

Умножая левую и правую части уравнения (2.6) на отличную от нуля во всех точках рассматриваемого материального объема вариацию скорости изменения температуры $\delta\dot{T}$ и интегрируя по начальному объему, после преобразований получаем следующее уравнение теплопроводности в вариационной форме:

$$\int\limits_{V_0} \rho_0(T\dot{\eta} - \dot{w})\,\delta\dot{T}\,dV_0 = -\int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0\,\delta\dot{T}\,d\Sigma_0 - \int\limits_{V_0} (\Lambda_0 \cdot \mathring{\nabla} T) \cdot \delta(\mathring{\nabla}\dot{T})\,dV_0. \tag{2.7}$$

На основе данного уравнения можно получить решение связанных термомеханических краевых задач. Для определенной модели материала необходимо задать выражения для энтропии и скорости диссипации.

3. Система уравнений связанной задачи обратимого конечного деформирования. Рассмотрим процесс нелинейного обратимого деформирования, не сопровождающийся производством диссипации. При этом основное термомеханическое соотношение [9, 11] имеет вид

$$\dot{\Psi} + \eta\dot{T} = \frac{1}{\rho_0}\,\Sigma_R \cdot\cdot\, \dot{M} + \dot{w}, \qquad \dot{w} = 0, \tag{3.1}$$

где $\Psi = \Psi(M, T)$ — удельная свободная энергия, которая полагается функцией меры деформаций M и абсолютной температуры T.

Мера деформаций M, введенная в работах [11, 12], определяется как решение дифференциального уравнения

$$\dot{M} \equiv \frac{dM}{dt} = W_R = R \cdot W \cdot R^{-1}, \tag{3.2}$$

где $W = (\nabla v + v\nabla)/2$ — тензор деформации скорости. В [11, 12] показано, что неголономная мера деформаций M является энергетически сопряженной с обобщенным тензором напряжений, поэтому выражение $\rho_0^{-1}\Sigma_R \cdot\cdot\, \dot{M}$ представляет собой удельную мощность напряжений.

Квадратичное представление для свободной энергии представим в виде

$$\rho_0\Psi(M, T) = M \cdot\cdot\, N \cdot\cdot\, M - B \cdot\cdot\, M(T - T_0) + \rho_0\Psi_0(T), \tag{3.3}$$

где N, B — постоянные тензоры, характеризующие механические и термические свойства материала; $\Psi_0(T)$ — составляющая свободной энергии, зависящая только от температуры, причем $d\Psi_0/dT = -c_\varepsilon \ln{(T/T_0)}$ (c_ε — удельная теплоемкость материала) [11, 13, 14].

Из соотношения (3.1) следует, что

$$\Sigma_R = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial M}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}. \tag{3.4}$$

Тогда с использованием представления (3.3) соотношения, определяющие связь между напряжениями, конечными деформациями и температурой анизотропного материала, записываются в виде [13]

$$\Sigma_R = N \cdot\cdot M - B \cdot (T - T_0). \tag{3.5}$$

В случае изотермических бесконечно малых деформаций соотношения (3.5) асимптотически совпадают с законом Гука, поэтому тензор N имеет смысл тензора упругости. При неизотермических бесконечно малых деформациях соотношения (3.5) совпадают с уравнениями состояния Дюамеля — Неймана [14], а тензор B определяет температурные напряжения в материале.

На основании соотношений (3.3) и (3.4) выражение для энтропии имеет вид [13]

$$\eta = \frac{1}{\rho_0} B \cdot\cdot M + c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0},$$

а скорость ее изменения равна

$$\dot\eta = \frac{1}{\rho_0} B \cdot\cdot \dot M + c_\varepsilon \frac{\dot T}{T}.$$

Тогда уравнение теплопроводности в вариационной форме (2.7) можно представить в виде

$$\int\limits_{V_0} (B \cdot\cdot \dot M T + c_\varepsilon \rho_0 \dot T)\, \delta \dot T \, dV_0 = -\int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0 \, \delta \dot T \, d\Sigma_0 - \int\limits_{V_0} (\Lambda_0 \cdot \mathring{\nabla} T) \cdot \delta(\mathring{\nabla} \dot T)\, dV_0. \tag{3.6}$$

Возможна конкретизация соотношений (3.5), (3.6) для изотропного материала, поскольку первый инвариант меры деформаций M, используемой в этих соотношениях, связан только с изменением объема, а девиатор этой меры изменяется только в процессах формоизменения [11, 12].

В случае изотропного материала определяющие соотношения (3.5) имеют вид

$$\Sigma_R = 3K(\theta - \alpha(T - T_0))E + 2G\tilde M,$$

где $\tilde M = M - (M \cdot\cdot E)E/3$ — девиатор тензора M; $\theta = M \cdot\cdot E = \ln(dV/dV_0)$ — первый инвариант тензора M, характеризующий изменение объема.

Поскольку в соответствии с (3.2) $\dot M = W_R$, в левой части уравнения теплопроводности (3.6) получаем $B \cdot\cdot \dot M T = 3\alpha K E \cdot\cdot W_R T = 3\alpha K \dot\theta T$, а в правой части — $(\Lambda_0 \cdot \mathring{\nabla} T) \cdot \delta(\mathring{\nabla} \dot T) = \lambda \nabla^2 T \delta \dot T$. Для изотропного материала уравнение теплопроводности в вариационной форме (3.6) принимает вид

$$\int\limits_{V_0} (3\alpha K \dot\theta T + c_\varepsilon \rho_0 \dot T)\, \delta \dot T \, dV_0 = -\int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0 \, \delta \dot T \, d\Sigma_0 - \int\limits_{V_0} \lambda \nabla^2 T \, \delta \dot T \, dV_0.$$

Эволюционные соотношения для перемещений, напряжений и температуры имеют вид

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{dt}, \quad \dot S(\boldsymbol{x}, t) = \frac{dS(\boldsymbol{x}, t)}{dt}, \quad \dot T(\boldsymbol{x}, t) = \frac{dT(\boldsymbol{x}, t)}{dt} \quad \forall \boldsymbol{x} \in V_0. \tag{3.7}$$

Начальные условия, характеризующие состояние тела в начальный момент времени t_0, следующие:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \qquad S(\boldsymbol{x}, t_0) = S_0(\boldsymbol{x}), \qquad T(\boldsymbol{x}, t_0) = T_0(\boldsymbol{x}). \tag{3.8}$$

Согласно граничным условиям статического типа необходимо задание в каждой точке поверхности Σ_p закона изменения внешних сил как функции времени

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}_0^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_p, \quad \forall t > t_0. \tag{3.9}$$

При задании граничных условий кинематического типа в каждой точке поверхности Σ_u определяется закон изменения перемещений материальных точек

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0. \tag{3.10}$$

В каждой точке поверхности Σ_{pu} могут быть заданы граничные условия смешанного типа, т. е. следующие разноименные составляющие векторов:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{P}_0 = P_{i0}^*(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{u} = u_j^*(\boldsymbol{x}, t), \quad i \neq j \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_{pu}, \quad \forall t > t_0. \tag{3.11}$$

Поверхности Σ_p, Σ_u, Σ_{pu} не пересекаются: $\Sigma_0 = \Sigma_p \cup \Sigma_u \cup \Sigma_{pu}$.

Также на части поверхности Σ_T необходимо задать закон изменения температуры

$$T = T^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_T, \quad \forall t > t_0, \tag{3.12}$$

на части поверхности Σ_q — закон изменения теплового потока

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_q, \quad \forall t > t_0. \tag{3.13}$$

На части поверхности Σ_c может происходить свободный теплообмен с окружающей средой, температура которой $T_c(\boldsymbol{x}, t)$ известна. Закон теплообмена очень сложен, но для упрощения задачи во многих случаях он может быть принят в виде закона Ньютона [9], в соответствии с которым количество тепла, передаваемого в окружающую среду в единицу времени с единицы площади поверхности тела, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды. Таким образом, получаем граничное условие

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \Lambda_0 \cdot \mathring{\nabla} T + \alpha_0 (T - T_c) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_c, \quad \forall t > t_0, \tag{3.14}$$

где α_0 — коэффициент теплообмена, который в общем случае зависит от разности температур $T - T_c$ и характера поверхности и окружающей среды, т. е. от радиус-вектора $\boldsymbol{x}$. В случае если материал рассматриваемого тела изотропный и коэффициент теплообмена не изменяется, не зависит от температуры и одинаков во всех точках поверхности тела, условие (3.14) можно представить в виде

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n_0} + \alpha_0 (T - T_c) = 0.$$

Поверхности Σ_T, Σ_q, Σ_c не пересекаются: $\Sigma_0 = \Sigma_T \cup \Sigma_q \cup \Sigma_c$.

При задании граничных условий полагаем, что функции (3.9)–(3.13) являются дифференцируемыми функциями времени. Тогда условия (3.9)–(3.13) соответственно можно представить в виде

$$\dot{\boldsymbol{P}}_0 = \dot{\boldsymbol{P}}_0^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_p, \quad \forall t > t_0; \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0; \tag{3.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_0 = \dot{\boldsymbol{P}}_0^*(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_{pu}, \quad \forall t > t_0; \tag{3.17}$$

$$\dot{T} = \dot{T}^*(\boldsymbol{x}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_T, \quad \forall t > t_0. \tag{3.18}$$

Таким образом, постановка связанной краевой задачи включает определение мер деформаций и кинематические соотношения (3.2), уравнение равновесия сплошной среды в вариационной форме (1.5), уравнение теплопроводности в вариационной форме (3.6), соотношения, определяющие связь между напряжениями, конечными деформациями и температурой (3.5), эволюционные соотношения (3.7), начальные условия (3.8) и граничные условия (3.14)–(3.18).

4. Результаты решения некоторых краевых задач. Постановка связанной краевой задачи, приведенная в данной работе, позволяет естественным образом перейти от вариационных принципов к численному решению методом конечных элементов. При этом используется разностная схема аппроксимации перемещений и температуры первого порядка по времени.

На рис. 1 представлены результаты расчетов для изотропного цилиндра с закрепленными торцами при изотермическом воздействии на него внутреннего давления. Показаны формы продольного сечения цилиндра при различных степенях деформации с характерным развитием "бочкообразности", степень которой зависит от геометрических размеров цилиндра и от механических характеристик его материала.

Решена также задача о равновесии тонкостенного анизотропного цилиндра под действием внутреннего давления в однородном температурном поле. Внешняя боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок, его торцы свободны для перемещений в радиальном направлении. Один торец закреплен, а другой свободен в окружном и осевом направлениях, т. е. осевая сила и крутящий момент, приложенные к цилиндру, полагались равными нулю. Начальная температура цилиндра была равна 273 K. Проведены расчеты при различных значениях конечной температуры и углах ориентации главных осей анизотропии материала цилиндра относительно ортов цилиндрической системы координат γ. С использованием такого анизотропного цилиндра моделируется один слой ленточного или намотанного композита.

Одной из интегральных характеристик деформированного состояния цилиндра является относительный угол закручивания, который вычисляется по формуле $\psi = (\varphi - \varphi_0)/L$, где φ, φ_0 — углы между радиусами цилиндра, проходящими на торцах, в деформированном и начальном состояниях; L — длина цилиндра в деформированном состоянии.

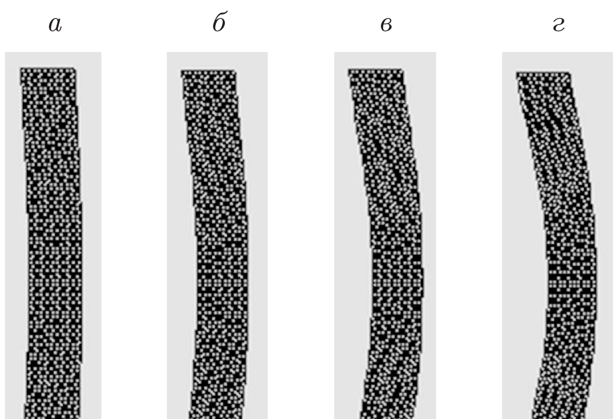

Рис. 1. Формы расчетной области для короткого цилиндра при различных значениях степени деформации ε:
а — $\varepsilon = 5$ %; *б* — $\varepsilon = 10$ %; *в* — $\varepsilon = 15$ %; *г* — $\varepsilon = 20$ %

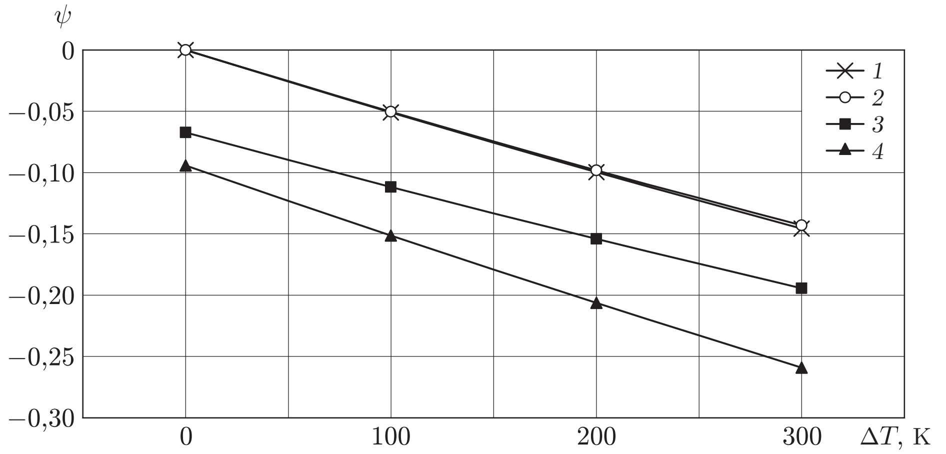

Рис. 2. Зависимости $\psi(\Delta T)$ при $p = 0$ (*1, 2*) и $p = 0{,}1$ МПа (*3, 4*) при $\varepsilon < 11$ %:
1, 3 — линейное решение (*1* — классическая постановка задачи, *3* — постановка задачи, предложенная в данной работе); *2, 4* — нелинейное решение (*2* — классическая постановка задачи, *4* — постановка задачи, предложенная в данной работе)

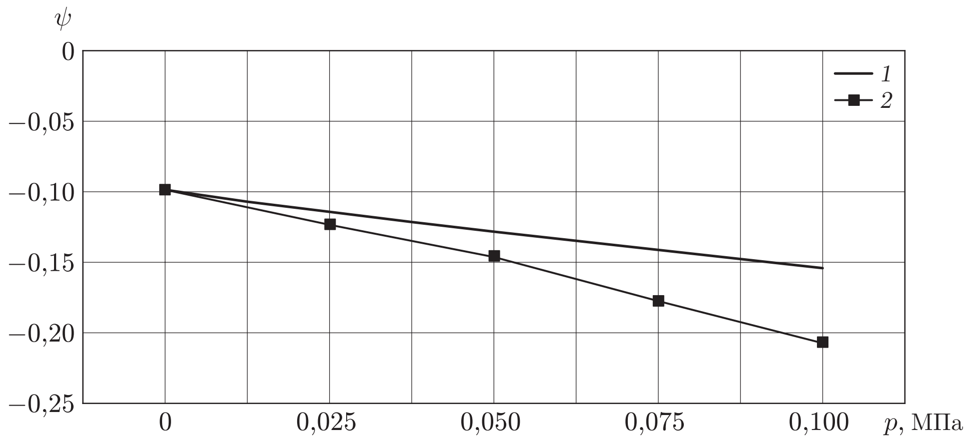

Рис. 3. Зависимости $\psi(p)$ при $\varepsilon < 11$ % и $T = 473$ К:
1 — линейное решение задачи; *2* — нелинейное решение задачи

На рис. 2 представлены зависимости относительного угла закручивания ψ от разности конечной и начальной температур $\Delta T = T - T_0$ при значениях давления, равных 0 и 10^5 Па, и угле $\gamma = 45^\circ$; на рис. 3 — зависимости ψ от давления при конечной температуре $T = 473$ К и угле $\gamma = 45^\circ$; на рис. 4 — зависимости ψ от угла ориентации главных осей анизотропии γ при значениях давления, равных 0 и 10^5 Па, и конечной температуре $T = 473$ К. Все зависимости получены при конечных деформациях ($\varepsilon < 11$ %).

Проведено сравнение результатов решения задачи в предложенной постановке (кривые *3, 4* на рис. 2, 4) и в классической постановке линейной термоупругости (кривые *1, 2*). Таким образом, в ряде случаев результаты различаются на 30–40 %. Вследствие увеличения давления при постоянной разности конечной и начальной температур, а также увеличения разности температур при постоянном давлении увеличиваются различия результатов, полученных по линейной и нелинейной теориям.

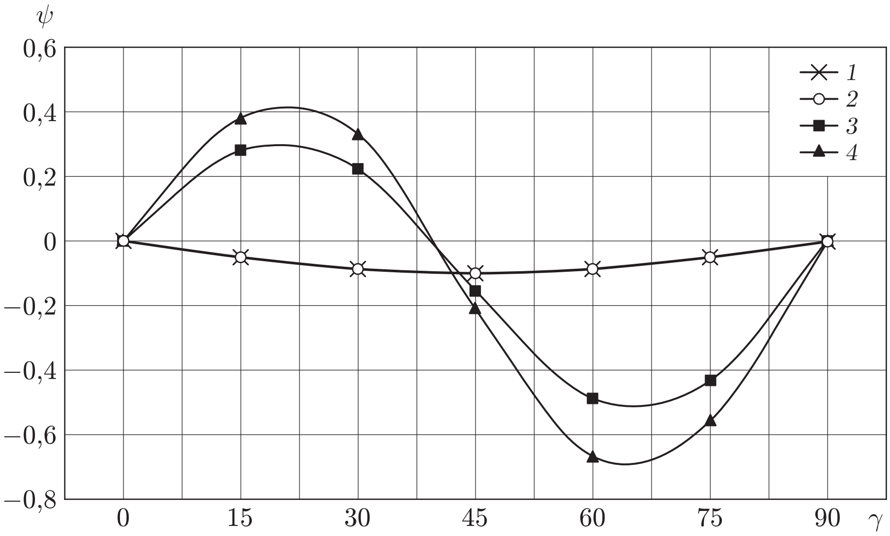

Рис. 4. Зависимости $\psi(\gamma)$ при $p = 0$ (*1, 2*) и $p = 0{,}1$ МПа (*3, 4*) при $\varepsilon < 11$ %: *1, 3* — линейное решение (*1* — классическая постановка задачи, *3* — постановка задачи, предложенная в данной работе); *2, 4* — нелинейное решение (*2* — классическая постановка задачи, *4* — постановка задачи, предложенная в данной работе)

С помощью решения краевых задач в предложенной постановке можно не только описать процессы изотермического деформирования, но и учесть взаимное влияние напряженно-деформированного состояния и температурного поля при конечных (в рассмотренных примерах — при $\varepsilon < 11$ %) деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Адамов В. И., Маркин А. А.** Моделирование процессов обработки давлением осесимметричных изделий // Изв. вузов. Машиностроение. 1989. № 12. С. 104–108.
2. **Толоконников О. Л., Маркин А. А., Астапов В. Ф.** Исследование процесса формоизменения с учетом конечности деформаций // Прикл. механика. 1983. Т. 19, № 10. С. 122–125.
3. **Био М. А.** Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975.
4. **Ланцош К.** Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
5. **Зубов Л. М.** Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 5. С. 848–852.
6. **Зубов Л. М.** Вариационные принципы нелинейной теории упругости // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 3. С. 406–410.
7. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
8. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
9. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990.
10. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды: Учеб. для ун-тов. В 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 1.
11. **Маркин А. А.** Термомеханические модели обратимого конечного деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. Тула: Тул. гос. ун-т, 2010.

12. **Маркин А. А.** Теория процессов А. А. Ильюшина и термомеханика конечного равновесного деформирования // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп., Москва, 20–21 янв. 2001 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2001. С. 51–61.
13. **Маркин А. А., Соколова М. Ю.** Вариант определяющих соотношений нелинейной термоупругости для анизотропных тел // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 170–175.
14. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 16/IV 2010 г.,
в окончательном варианте — 18/V 2011 г.