УДК 532.516

ТЕЧЕНИЯ СТОКСА В ШАРЕ

В. М. Быков

(*Челябинск*)

1. Пара функций тока пространственного течения. Пусть Ω — шар радиуса R с центром в начале координат, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат (r, θ, φ), $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Обозначим через V пространство бесконечно дифференцируемых в замкнутом шаре $\overline{\Omega}$ соленоидальных векторных полей. Выделим в V подпространства

$$V^- = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r = 0\},\ V^+ = \{\mathbf{v} \in V | \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r = 0\}.$$

Всякой функции $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно сопоставить поле $\mathbf{v}^-(F) = \mathrm{rot}\,F\mathbf{r} \in V^-$. Обратно, если дано поле $\mathbf{v}^- \in V^-$, из условия $\mathrm{div}\,\mathbf{v}^- = 0$ следует

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta^- \sin\theta\right) + \frac{\partial v_\varphi^-}{\partial\varphi} = 0,$$

и потому существует функция $F^- \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что

$$\frac{\partial F^-}{\partial\varphi} = v_\theta^- \sin\theta,\quad \frac{\partial F^-}{\partial\theta} = -v_\varphi^-.$$

Проверяется, что $\mathbf{v}^- = \mathbf{v}^-(F^-) = \mathrm{rot}\,F^-\mathbf{r}$.

Всякой функции $F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно также сопоставить поле $\mathbf{v}^+(F) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,F\mathbf{r} \in V^+$. Если дано поле $\mathbf{v}^+ \in V^+$, то из условия $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^+\cdot\mathbf{e}_r = 0$ следует

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\varphi^+ \sin\theta\right) - \frac{\partial v_\theta^+}{\partial\varphi} = 0,$$

и потому существует функция $G \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi} = v_\varphi^+ \sin\theta,\quad \frac{\partial G}{\partial\theta} = v_\theta^+.$$

Определив $F^+(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \rho G(\rho, \theta, \varphi)\, d\rho$, можно проверить, что угловые компоненты поля $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,F^+\mathbf{r}$ совпадают с соответствующими компонентами $\mathbf{v}^+$, а так как радиальная компонента поля $\mathbf{v}$ без особенности в начале координат однозначно выражается через угловые из условия $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, то $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^+(F^+) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,F^+\mathbf{r}$.

Определенные выше соответствия $F \to \mathbf{v}^-(F)$ и $F \to \mathbf{v}^+(F)$ согласованы со взятием ротора и переводят скалярный оператор Лапласа $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$: $C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ в векторный $\Delta = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$: $V \to V$. Именно справедливы формулы $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^-(F) = \mathbf{v}^+(F)$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^+(F) = -\mathbf{v}^-(\Delta F)$, $\Delta\mathbf{v}^\pm(F) = \mathbf{v}^\pm(\Delta F)$. Так как $\mathbf{v}^-(F) = \mathrm{rot}\,F\mathbf{r} = \mathrm{grad}\,F \times \mathbf{r}$, то линии тока поля $\mathbf{v}^-(F)$ являются пересечениями поверхностей $F = \mathrm{const}$ со сферами $r = \mathrm{const}$, F — функция тока для $\mathbf{v}^-(F)$. Если поле $\mathbf{v}^+(F)$ безвихревое, то $\frac{\partial}{\partial r}(rF)$ — его потенциал. Если $\mathbf{v}^+(F)$ обладает осевой симметрией, то его функция тока имеет вид $\Psi = -r\sin\theta\partial F/\partial\theta$. Так как все потенциальные поля и все осесимметричные поля без закрутки при условии соленоидальности принадлежат V^+, то F обобщает одновременно функцию тока и потенциал поля $\mathbf{v}^+(F)$.

Покажем, что всякое поле $\mathbf{v} \in V$ единственным образом представляется в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+$, где $\mathbf{v}^- \in V^-$, $\mathbf{v}^+ \in V^+$. Определим функцию $F^+(r, \theta, \varphi)$ при каждом фиксированном r, $0 < r \leqslant R$, как решение уравнения $\Delta_{\theta\varphi} F = -rv_r$, удовлетворяющее условию

$$\iint\limits_{S_r} F^+ dS = 0, \tag{1.1}$$

где S_r — сфера радиуса r, концентричная Ω,

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

— угловая часть оператора Лапласа. Условие разрешимости этого уравнения выполнено:

$$\iint\limits_{S_r} rv_r dS = r\iint\limits_{S_r} v_r dS = r\iiint\limits_{\Omega_r} \operatorname{div}\mathbf{v}d\Omega = 0.$$

Из интегральной формулы для решения ([1], дополнение II) следует $F^+ \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Проверяется, что радиальная компонента поля $\mathbf{v}^+ = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F^+\mathbf{r} \in V^+$ совпадает с v_r, поэтому $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} - \mathbf{v}^+ \in V^-$, и искомое разложение $\mathbf{v} = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+$ получено. Для доказательства его единственности достаточно проверить, что $V^- \cap V^+ = \{0\}$. Пусть $\mathbf{v} \in V^- \cap V^+$. Из $\mathbf{v} \in V^+$ следует, что $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F\mathbf{r}$, а из $\mathbf{v} \in V^-$, что $v_r = -\frac{1}{r}\Delta_{\theta,\varphi}F = 0$, откуда $F = F(r)$ и $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F\mathbf{r} = 0$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для любого векторного поля $\mathbf{v} \in V$ существуют две функции F^-, $F^+ \in C^\infty(\bar{\Omega})$ такие, что

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} F^-\mathbf{r} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} F^+\mathbf{r}.$$

Функции F^- и F^+ определены с точностью до прибавления произвольных функций от r. Если потребовать для обеих функций $F^\pm$ выполнения условия (1.1), то они определятся однозначно. Для таких функций $F^\pm$ условие непроницаемости границы S шара Ω имеет вид $F^+|_{r=R} = 0$, а условие прилипания к S есть $F^-|_{r=R} = F^+|_{r=R} = \left.\frac{\partial F^+}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$.

Последние утверждения теоремы проверяются непосредственно. Введенные функции $F^\pm$ позволяют найти все однородные винтовые потоки в шаре, т. е. решения уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ с условием непроницаемости сферы S. Для такого $\mathbf{v}$ функция F^- удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta F^- = -\lambda^2 F^-$ и граничному условию $F^-|_{r=R} = 0$, откуда F^- легко находится [2]. Функция F^+ определяется из соотношения $F^- = \lambda F^+$. Этот путь отыскания всех однородных винтовых потоков в шаре значительно короче первоначального [3].

2. Собственные векторы оператора $\tilde{\Delta}$. Определение оператора $\tilde{\Delta}$ и гильбертова пространства $J^\circ(\Omega)$, в котором он действует, можно найти в [4]. Для наших целей существенно, что собственные векторы этого оператора являются полями $\mathbf{v} \in V$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\tilde{\Delta}\mathbf{v} = \nu\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad} H = -\lambda\mathbf{v} \tag{2.1}$$

к условию прилипания

$$\mathbf{v}|s = 0. \tag{2.2}$$

Найдем сначала собственные векторы $\mathbf{v} \in V^-$. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}^-(F) = \operatorname{rot} F\mathbf{r}$, где F удовлетворяет условию (1.1). Так как $\Delta\mathbf{v}^-(F) = \mathbf{v}^-(\Delta F) \in V^-$, то $\operatorname{grad} H = \nu\Delta\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} \in V^-$. С другой стороны, $\operatorname{grad} H \in V^+$, и по доказанному в п. 1 $\operatorname{grad} H = 0$. Поэтому (2.1) принимает вид $\nu\Delta\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}$. В силу однозначности восстановления F по $\mathbf{v}$ при условии (1.1) и тождества $\Delta\mathbf{v}^-(F) = \mathbf{v}^-(\Delta F)$ имеем

$$\nu\Delta F = -\lambda F. \tag{2.3}$$

Условие прилипания (2.2) имеет вид

$$F|_{r=R} = 0. \tag{2.4}$$

Хорошо известно [2], что задача (2.3), (2.4) может иметь нетривиальные решения, непрерывные в начале координат, лишь при $\lambda = \lambda_{kn}^- = \nu\left(\frac{\mu_{kn}}{R}\right)^2$ и каждому значению λ_{kn}^- соответствует $2n+1$ линейно-независимое решение, в качестве которых можно взять

$$F_{kn}^{m-} = \frac{C_{kn}^{m-}}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad k, n \geqslant 1, \quad |m| \leqslant n \tag{2.5}$$

(значение $n = 0$ исключается в силу (1.1)), где μ_{kn} — k-й по величине нуль функции Бесселя $J_{n+1/2}(z)$,

$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ при $0 \leqslant m \leqslant n$,

$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi$ при $-n \leqslant m < 0$,

$$C_{kn}^{m-} = \frac{1}{RJ_{n+\frac{3}{2}}(\mu_{kn})} \sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_m}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_m = 1 \text{ при } m \neq 0.$$

Последняя константа вычисляется из условия нормировки $\iiint\limits_{\Omega} v^2 d\Omega = 1$, где $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \operatorname{rot} F_{kn}^{m-}\mathbf{r}$.

Вычислим теперь собственные векторы $\mathbf{v} \in V^+$. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+(F) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F\mathbf{r}$, где F удовлетворяет условию (1.1). Применив к обеим частям (2.1) оператор rot, получим $\nu\Delta\boldsymbol{\omega} = -\lambda\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v}^+(F) = -\mathbf{v}^-(\Delta F)$. Так как вместе с F функция $G = \Delta F$ также удовлетворяет условию (1.1), то аналогично уравнению (2.3) получаем (2.6) $\nu\Delta G = -\lambda G$. Так как $G \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то G разлагается в равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$G = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} g_n^m(r)Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} G_n^m \tag{2.7}$$

(слагаемое с $n = 0$ отсутствует в силу (1.1)). Пространство функций вида $g(r)Y_n^m(\theta, \varphi)$ инвариантно относительно оператора Лапласа, поэтому каждый член ряда (2.7) является решением уравнения (2.6) и, следовательно, равен

$$G_n^m = \frac{C_n^m}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\, r\right) Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Пусть $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n} F_n^m$ — разложение, аналогичное (2.7). Из уравнения (2.6) следует, что функция $H_n^m = \frac{\lambda}{\nu}F_n^m + G_n^m$ гармонична. Условие прилипания (2.2) имеет вид

(2.8) $$F|_{r=R} = \partial F/\partial r|_{r=R} = 0.$$

Из однозначности разложения F и $\partial F/\partial r$ по сферическим функциям при $r = R$ следует, что условие (2.8) справедливо и для каждого F_n^m. Имеем

$$H_n^m|_{r=R} = G_n^m|_{r=R} = \frac{C_n^m}{\sqrt{R}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}} R\right) Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Гармоническую функцию H_n^m, удовлетворяющую этому условию, можно подобрать в виде

$$H_n^m = \frac{C_n^m}{\sqrt{R}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}} R\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^m(\theta, \varphi).$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа эта функция определена однозначно. Условие $\left.\frac{\partial F_n^m}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$ дает $J_{n+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}} R\right) = 0$, откуда $\lambda = \lambda_{kn}^{+} = \nu\left(\frac{\mu_{k,n+1}}{R}\right)^2$,

(2.9) $$F_{kn}^{m+} = \frac{\nu}{\lambda}(H_n^m - G_n^m) = \left(\frac{R}{\mu_{k,n+1}}\right)^2 C_{kn}^{m+}\left[\frac{1}{\sqrt{R}} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{k,n+1})\left(\frac{r}{R}\right)^n - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{k,n+1} r}{R}\right)\right] Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Так как функции $J_{n+3/2}(z)$ при различных n не имеют общих нулей, то в разложении (2.7) и аналогичном разложении для F может участвовать лишь $2n + 1$ слагаемое, соответствующее фиксированному n. Итак, каждому значению λ_{kn}^{+} соответствует $2n + 1$ линейно-независимое решение задачи (2.1), (2.2), в качестве которых можно взять поля $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F_{kn}^{m+}\mathbf{r}$, где F_{kn}^{m+} задается формулой (2.9) при $k,\ n \geqslant 1,\ |m| \leqslant n$,

$$C_{kn}^{m+} = \frac{\mu_{k,n+1}}{R^2 J_{n+\frac{5}{2}}(\mu_{k,n+1})}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_m}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}.$$

Рассмотрим теперь произвольный собственный вектор $\mathbf{v} \in V$. Имеем $\mathbf{v} = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+$, и в силу инвариантности подпространств V^- и V^+ относительно оператора $\tilde{\Delta}$ поля $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ сами являются собственными векторами с одним и тем же собственным значением. При $n > 1$ это значение равно $\lambda_{kn}^{-} = \nu\left(\frac{\mu_{kn}}{R}\right)^2 = \lambda_{k,n-1}^{+}$. В этом случае при каждом $k \geqslant 1$ $\mathbf{v}$ является линейной комбинацией уже построенных $4n$ полей вида $\operatorname{rot} F_{kn}^{m-}\mathbf{r}$, $|m| \leqslant n$, и $\operatorname{rot}\operatorname{rot} F_{k,n-1}^{m+}\mathbf{r}$, $|m| \leqslant n - 1$. При $n = 1$ и произвольном k $\mathbf{v}^+ = 0$, а $\mathbf{v}^-$ — линейная комбинация трех полей вида $\operatorname{rot} F_{k1}^{m-}\mathbf{r}$, $m = -1, 0, 1$. Заметим еще, что пространства V^- и V^+ ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{W}\rangle = \iiint_{\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{W}\, d\Omega.$$

Используя свойства оператора $\tilde{\Delta}$, доказанные в [4], получаем следующий результат.

Теорема 2. Поля вида $\mathbf{v}_{kn}^{m-} = \operatorname{rot} F_{kn}^{m-}\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}_{kn}^{m+} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} F_{kn}^{m+}\mathbf{r}$, где $k,\ n \geqslant 1,\ |m| \leqslant n$, а функции $F_{kn}^{m\pm}$ заданы соответственно формулами (2.5), (2.9), образуют ортонормированный базис в пространстве $J^\circ(\Omega)$.

3. Решение системы уравнений Стокса. Рассмотрим сначала случай потенциальных массовых сил $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$. Уравнения Стокса в векторной форме имеют вид

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = \nu\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad} H, \tag{3.1}$$

где $H = p/\rho + v^2/2 + U$ — функция Лэмба. К системе (3.1) следует добавить уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{3.2}$$

условие прилипания

$$\mathbf{v}|_S = 0 \tag{3.3}$$

и начальное условие

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \tag{3.4}$$

Задачу (3.1)—(3.4) можно рассматривать как задачу нахождения поля $\mathbf{v}$, принадлежащего области определения оператора $\tilde{\Delta}$, удовлетворяющего уравнению

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = \tilde{\Delta}\mathbf{v} \tag{3.5}$$

и начальному условию (3.4) (см. [4]). Решение последней задачи представляется рядом Фурье

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k,n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a_{kn}^{m}\exp\left(-\lambda_{kn}^{-}t\right)\mathbf{v}_{kn}^{m-} + b_{kn}^{m}\exp\left(-\lambda_{kn}^{+}t\right)\mathbf{v}_{kn}^{m+}\right], \tag{3.6}$$

где $a_{kn}^{m} = \langle\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{kn}^{m-}\rangle = \int\int_\Omega\int \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_{kn}^{m-}d\Omega$; $b_{kn}^{m} = \langle\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{kn}^{m+}\rangle = \int\int_\Omega\int \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_{kn}^{m+}d\Omega$.

В [4] показано, что ряд (3.6) удовлетворяет уравнениям (3.1), (3.2) и граничному условию (3.3) при $t > 0$ для любого $\mathbf{v}_0 \in J^\circ(\Omega)$, при этом начальное условие (3.4) выполняется в смысле стремления $\mathbf{v}(t)$ к $\mathbf{v}_0$ при $t \to +0$ по норме пространства $J^\circ(\Omega)$. Для того чтобы ряд (3.6) представлял классическое решение задачи (3.1)—(3.4), достаточно, чтобы поле $\mathbf{v}_0$ было дважды непрерывно дифференцируемо вплоть до границы Ω и удовлетворяло условиям (3.2), (3.3).

В случае произвольного поля массовых сил, зависящего, вообще говоря, от времени, в предположении однократной непрерывной дифференцируемости этого поля в $\bar{\Omega}$ представим его в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \operatorname{grad} U$, где U — решение задачи Неймана

$$\Delta U = -\operatorname{div}\mathbf{F}; \tag{3.7}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}, \tag{3.8}$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S. При этом к правым частям уравнений (3.1), (3.5) добавится слагаемое $\mathbf{F}_1$, удовлетворяющее в силу (3.7), (3.8) условиям $\operatorname{div}\mathbf{F}_1 = 0$, $\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{n} = 0$ и потому принадлежащее $J^\circ(\Omega)$. Решая полученные уравнения вместе с условиями (3.2)—(3.4) так же, как краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности в [1] или [2], находим, что к ряду (3.6) нужно прибавить ряд

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{\left(\int_0^t \exp\left[-\lambda_{kn}^{-}(t-\tau)\right]f_{kn}^{m}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{v}_{kn}^{m-} + \right.$$

$$+\left(\int_0^t \exp\left[-\lambda_{kn}^{+}(t-\tau)\right] g_{kn}^{m}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{v}_{kn}^{m+}\Big\},$$

$$\text{где}\quad f_{kn}^{m}(t)=\langle \mathbf{F}_1,\mathbf{v}_{kn}^{m-}\rangle=\iint_{\Omega}\int \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{v}_{kn}^{m-}d\Omega;\quad g_{kn}^{m}(t)=$$

$$=\langle \mathbf{F}_1,\mathbf{v}_{kn}^{m+}\rangle=\iint_{\Omega}\int \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{v}_{kn}^{m+}d\Omega.$$

Из разложения (3.6) видно, что в случае потенциальных массовых сил через некоторое время после начала течения независимо от начального условия в нем будет преобладать низшая гармоника

$$\sum_{m=-1}^{1} a_{11}^{m}\exp\left(-\lambda_{11}^{-}t\right)\mathbf{v}_{11}^{m-},$$

которая представляет собой дифференциальное вращение вокруг некоторой оси, пропорциональное азимутальной компоненте винтового вихря Хилла, описанного в [5], и затухающее пропорционально $\exp(-20{,}19\nu R^{-2}t)$.

Поступила 24 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
2. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. М., Высш. школа, 1970.
3. **Быков В. М.** Винтовые потоки в шаре.— ПМТФ, 1979, № 2.
4. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Наука, 1970.
5. **Ярмицкий А. Г.** Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла).— ПМТФ, 1974, № 5.

УДК 532.5 : 532.135

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ПОДЖАТИИ СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Ю. В. Казанков, В. Е. Первушин

(*Москва*)

При литье под давлением тонкостенных изделий расплав полимера вспрыскивается в полость, образованную не полностью сомкнутыми полуформами. Следующим этапом является смыкание полуформ, в течение которого расплав растекается, заполняя оформляющую полость, и в конце этого процесса затвердевает.

В данной работе рассматривается задача о неизотермическом течении, возникающем в слое расплавленного полимера, заключенного между двумя параллельными пластинками (полуформами), которые сближаются