

УДК 539.374+376

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. А. Банщикова, Б. В. Горев, И. В. Сухоруков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматриваются прямые и обратные задачи формообразования при ползучести длинномерных профилей двойной кривизны и заданного угла закручивания. Предлагается конечно-разностная схема численного решения. Приводятся примеры решения задач с различными типами внешних воздействий для профиля прямоугольного сечения. Проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных кручения стержней с квадратным и круглым сечениями в режиме ползучести при температурах 725 и 740 °С для стали марки Ст. 45.

Введение. Длинномерные профили двойной кривизны переменного сечения (типа прямоугольника, тавра, двутавра и др.) из труднодеформируемых при обычной температуре сплавов используются в качестве подкрепляющих элементов обшивки корпусных конструкций самолетов, судов и других изделий машиностроения. Такие профили имеют следующие характерные размеры: длина порядка нескольких метров, высота стенки $0,02 \div 0,2$ м, толщина стенки порядка нескольких миллиметров. Одним из возможных способов формообразования указанных профилей из прямолинейных стержней является последовательное деформирование их участков. При этом каждый из формируемых участков подвергается температурно-силовым воздействиям в термокамере. Небольшая часть профиля деформируется в условиях ползучести, другая часть профиля, находящаяся вне камеры, не нагружена. При таких условиях в первом приближении можно считать, что для деформируемого участка задаются постоянные кривизны и постоянный погонный угол закручивания вдоль длины профиля. Тогда независимыми переменными будут две пространственные координаты в плоскости сечения и время. Далее под углом закручивания будем понимать угол поворота сечения профиля на единицу длины.

Вследствие большого (на порядок) различия размеров поперечного сечения и длины формируемого участка особенностью формообразования длинномерных профилей является значительное упругое восстановление. Поэтому заданные остаточные кривизны и угол закручивания могут значительно отличаться от кривизн и угла закручивания до снятия нагрузок. Процесс формообразования описывается следующей обратной задачей: требуется найти такие силовые и кинематические параметры формообразования, чтобы после снятия нагрузок и упругого восстановления получить требуемые остаточные кривизны и угол закручивания.

Аналогичные обратные задачи возникают при формообразовании гладких и подкрепленных монолитных панелей и арок [1]. Вопросы математической корректности некоторых обратных задач для гладких пластин рассмотрены в [2, 3]. Численное решение задач данного класса методом конечных элементов приведено в [4]. Одна из одномерных задач формообразования исследована в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00551, 00-15-96180, 00-01-96203).

В данной работе рассматриваются вопросы моделирования формообразования стержней заданной кривизны и угла закручивания в режиме ползучести с учетом упругих деформаций. Предполагается, что деформации и напряжения зависят только от двух пространственных координат и времени. До начала формообразования профиль находится в естественном недеформированном состоянии. Температура считается постоянной в течение всего процесса формообразования.

1. Постановка задачи. В общем виде прямая задача формулируется следующим образом. В течение времени $0 \leq t < t_*$ к стержню приложены заданные внешние силовые и кинематические воздействия (t — время; t_* — заданное время процесса формообразования). При этом предполагается, что воздействия таковы, что напряжения не превышают предела текучести. Требуется определить остаточные кинематические величины с учетом упругого восстановления в момент времени $t = t_*$.

Соответственно обратная задача формулируется следующим образом. Какие внешние воздействия необходимо приложить к стержню при $0 \leq t < t_*$, чтобы после его освобождения в момент времени $t = t_*$ и упругого восстановления получить заданные остаточные величины?

С практической точки зрения представляют интерес обратные задачи с тремя видами внешних воздействий.

1. При $t = 0$ в результате мгновенного упругого деформирования под действием искомых изгибающих и крутящего моментов и заданной продольной силы стержню сообщаются кривизны $\varkappa_{x0}, \varkappa_{y0}$, угол закручивания θ_0 и продольная деформация ε_0 . При $0 < t < t_*$ угол закручивания, кривизны, продольная деформация остаются фиксированными, при этом в стержне происходят релаксация напряжений и накопление необратимых деформаций ползучести. При $t = t_*$ стержень освобождается от всех внешних нагрузок и после упругого восстановления должен приобрести заданные остаточные кривизны $\varkappa_{x**}, \varkappa_{y**}$ и угол закручивания θ_{**} .

2. При $t = 0$ стержню мгновенно сообщаются заданные кривизны $\varkappa_{x0}, \varkappa_{y0}$, угол закручивания θ_0 , продольная деформация ε_0 , а при $0 < t < t_*$ — искомые постоянные скорости $\dot{\varkappa}_x, \dot{\varkappa}_y, \dot{\theta}, \dot{\varepsilon}_0$ (точка означает дифференцирование по времени). При $t = t_*$ после разгрузки и упругого восстановления стержень должен приобрести заданные остаточные кривизны $\varkappa_{x**}, \varkappa_{y**}$ и угол закручивания θ_{**} .

3. При $0 \leq t < t_*$ к стержню прикладываются искомые изгибающие и крутящий моменты и заданное продольное усилие. При $t = t_*$ после разгрузки и упругого восстановления стержень должен приобрести заданные остаточные кривизны $\varkappa_{x**}, \varkappa_{y**}$ и угол закручивания θ_{**} .

Выше приняты следующие обозначения: $\varepsilon_0(t)$ — осевая деформация; $\varkappa_x(t) = -v_{,zz}$, $\varkappa_y(t) = u_{,zz}$ — кривизны проекций $v(z, t)$ и $u(z, t)$ изогнутой оси стержня на плоскости yz и xz соответственно в декартовой системе координат xyz ; $\theta(t)$ — угол закручивания.

Для решения обратных задач 1, 2 используется итерационный процесс, аналогичный описанному в [6]. В основе итерационного алгоритма решения обратной задачи чистого кручения постоянным моментом (задача 3) лежит метод секущих.

Ось z декартовой системы координат направлена вдоль стержня, оси x и y лежат в плоскости поперечного сечения. Предположение о независимости деформаций и напряжений от координаты z позволяет существенно упростить систему основных определяющих уравнений. Аналогично [7, 8] для стержня предполагается

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (1)$$

Тогда упругие деформации связаны с напряжениями соотношениями

$$\varepsilon_x^e = -\frac{\nu}{E} \sigma_z, \quad \varepsilon_y^e = -\frac{\nu}{E} \sigma_z, \quad \varepsilon_z^e = \frac{1}{E} \sigma_z, \quad \gamma_{zx}^e = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \quad \gamma_{zy}^e = \frac{1}{G} \tau_{zy},$$

где E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. В этом случае упругие деформации

$$\varepsilon_z^e = \varepsilon_0 - \alpha_y x + \alpha_x y, \quad \varepsilon_x^e = -\nu \varepsilon_z^e, \quad \varepsilon_y^e = -\nu \varepsilon_z^e, \quad \gamma_{zx}^e = W_{,x} - \theta y, \quad \gamma_{zy}^e = W_{,y} + \theta x$$

совместны и соответствуют перемещениям

$$\begin{aligned} u &= -\nu(\varepsilon_0 x + \alpha_x x y + \alpha_y (y^2 - x^2)/2) + \alpha_y z^2/2 - \theta z y, \\ v &= -\nu(\varepsilon_0 y - \alpha_y x y + \alpha_x (y^2 - x^2)/2) - \alpha_x z^2/2 + \theta z x, \\ w &= \varepsilon_0 z + \alpha_x y z - \alpha_y x z + W. \end{aligned}$$

Здесь $W(x, y, t)$ — перемещения вдоль оси z , возникающие при кручении.

Если для описания ползучести материала использовать теорию течения с учетом накопления в материале повреждений [9]:

$$\eta_{kl}^c = \frac{3}{2(1-\omega)^m} \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} \sigma_{kl}^0, \quad \dot{\omega} = \frac{\Phi(\sigma_i)}{(1-\omega)^m}, \quad (2)$$

то полные скорости деформаций будут определяться по соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= -\nu \dot{\sigma}_z/E - \eta_{zz}^c/2, \quad \dot{\varepsilon}_y = -\nu \dot{\sigma}_z/E - \eta_{zz}^c/2, \quad \dot{\varepsilon}_z = \dot{\sigma}_z/E + \eta_{zz}^c, \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \dot{\tau}_{zx}/G + \eta_{zx}^c, \quad \dot{\gamma}_{zy} = \dot{\tau}_{zy}/G + \eta_{zy}^c. \end{aligned}$$

Здесь $\omega(x, y, t)$ — повреждаемость материала; η_{kl}^c — скорости деформаций ползучести; $\sigma_i = (3/2)(\sigma_{kl}^0 \sigma_{kl}^0)^{1/2}$ — интенсивность напряжений; σ_{kl}^0 — компоненты девиатора напряжений.

Соотношения (2) описывают несжимаемый при ползучести материал. При выполнении условия (1) и условия упругой несжимаемости материала ($\nu = 1/2$) полные скорости деформаций также совместны и справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(1/2)(\dot{\varepsilon}_0 x + \dot{\alpha}_x x y + \dot{\alpha}_y (y^2 - x^2)/2) + \dot{\alpha}_y z^2/2 - \dot{\theta} z y, \\ \dot{v} &= -(1/2)(\dot{\varepsilon}_0 y - \dot{\alpha}_y x y + \dot{\alpha}_x (y^2 - x^2)/2) - \dot{\alpha}_x z^2/2 + \dot{\theta} z x, \\ \dot{w} &= \dot{\varepsilon}_0 z + \dot{\alpha}_x y z - \dot{\alpha}_y x z + \dot{W}. \end{aligned}$$

В общем случае упругосжимаемого материала ($\nu \neq 1/2$) для скоростей полных деформаций $\dot{\varepsilon}_x$ и $\dot{\varepsilon}_y$ имеем

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_y = -\dot{\varepsilon}_z/2 + (1/2 - \nu)\dot{\sigma}_z/E,$$

тогда скорости деформаций могут быть несовместны из-за присутствия второго слагаемого, учитывающего упругую сжимаемость материала. Предполагается, что вклад этого слагаемого несуществен при развитых деформациях ползучести и стационарных внешних нагрузках.

Уравнения для полных скоростей деформаций имеют вид

$$\dot{\tau}_{zx}/G + \eta_{zx}^c = \dot{W}_{,x} - \dot{\theta} y, \quad \dot{\tau}_{zy}/G + \eta_{zy}^c = \dot{W}_{,y} + \dot{\theta} x, \quad \dot{\sigma}_z/E + \eta_{zz}^c = \dot{\varepsilon}_0 + \dot{\alpha}_x y - \dot{\alpha}_y x. \quad (3)$$

С учетом (1) и независимости напряжений от z из трех дифференциальных уравнений равновесия остается одно, причем $\sigma_{z,z} = 0$. Тогда

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0. \quad (4)$$

Напряжения $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ должны уравновешивать усилие и внешние моменты

$$N = \int_S \sigma_z dS, \quad M_x = \int_S \sigma_z y dS, \quad M_y = - \int_S \sigma_z x dS; \quad (5)$$

$$M_z = \int_S (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dS, \quad (6)$$

где N , M_x , M_y , M_z — продольная сила, изгибающие и крутящий моменты. Краевые условия на контуре сечения стержня следующие:

$$\tau_{zx}n_1 + \tau_{zy}n_2 = 0 \quad (7)$$

(n_k — компоненты нормали к контуру).

Уравнения (2)–(6) с краевыми условиями (7) образуют интегродифференциальную систему относительно напряжений, деформации, повреждаемости для задач 1–3, а также угла, кривизны и растягивающей деформации для задачи 3. При $t = 0$ деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^c(x, y, 0) = 0$, $\omega(x, y, 0) = 0$ и напряжения

$\tau_{zx}(x, y, 0) = G(W_{0,x} - \theta_0 y)$, $\tau_{zy}(x, y, 0) = G(W_{0,y} + \theta_0 x)$, $\sigma_z(x, y, 0) = E(\varepsilon_0^0 + \varkappa_{0x}y - \varkappa_{0y}x)$ определяются из уравнения равновесия (4) для задач 1–3 и соотношений (5), (6) для задачи 3 с учетом краевых условий (7). Здесь $W_0 = W(x, y, 0)$; $\theta_0 = \theta(0)$; $\varkappa_{0x} = \varkappa_x(0)$; $\varkappa_{0y} = \varkappa_y(0)$; $\varepsilon_0^0 = \varepsilon_0(0)$. При $t = t_*$ выполняются условия упругой разгрузки

$$\int_S (\tau_{zy^*}x - \tau_{zx^*}y) dS = \theta^e G D,$$

$$\int_S \sigma_{z^*} dS = \varepsilon_0^e E J, \quad \int_S \sigma_{z^*} y dS = \varkappa_x^e E J_x, \quad - \int_S \sigma_{z^*} x dS = \varkappa_y^e E J_y,$$

$$\tau_{zx^*} = \tau_{zx}^e + \rho_{zx}, \quad \tau_{zy^*} = \tau_{zy}^e + \rho_{zy}, \quad \sigma_{z^*} = \sigma_z^e + \rho_z,$$

$$\theta_* = \theta^e + \theta_{**}, \quad \varkappa_{x^*} = \varkappa_x^e + \varkappa_{x**}, \quad \varkappa_{y^*} = \varkappa_y^e + \varkappa_{y**}, \quad \varepsilon_{0^*} = \varepsilon_0^e + \varepsilon_{0**},$$

где ρ — остаточные напряжения после упругой разгрузки. Индексы “*”, “**” и e соответствуют величинам при $t = t_*$ до разгрузки, остаточным величинам и величинам упругого восстановления; D , J , J_x , J_y — геометрические характеристики сечения:

$$D = \int_S [(W_{,y}^e + x)x - (W_{,x}^e - y)y] dS, \quad J = \int_S dS, \quad J_x = \int_S y^2 dS, \quad J_y = \int_S x^2 dS.$$

Деформация сечения $W^e(x, y)$ пропорциональна осевому смещению точки сечения при упругом кручении $W = \theta W^e$ и полностью определяется геометрической формой поперечного сечения профиля.

Для решения системы дифференциальных уравнений (2)–(7) использован конечно-разностный метод. Как правило, уравнения, описывающие кручение стержня, сводятся к одному дифференциальному уравнению относительно деформации или функции напряжений с соответствующим преобразованием краевых условий. Тогда на каждом временном шаге решается соответственно задача Дирихле либо задача Неймана. По значениям деформации или функции напряжений в узлах сетки определяются неизвестные напряжения и деформации для следующего шага. Чтобы избежать дополнительного численного дифференцирования правых частей, используется разностная схема

$$\frac{\dot{\tau}_{zxij}}{G} - \frac{\dot{W}_{i+1j} - \dot{W}_{i-1j}}{2h_1} = -\eta_{zxij}^c - \dot{\theta}y_{ij}, \quad \frac{\dot{\tau}_{zyij}}{G} - \frac{\dot{W}_{ij+1} - \dot{W}_{ij-1}}{2h_2} = -\eta_{zyij}^c + \dot{\theta}x_{ij},$$

$$\frac{\dot{\tau}_{zxi+1j} - \dot{\tau}_{zxi-1j}}{2h_1} + \frac{\dot{\tau}_{zyij+1} - \dot{\tau}_{zyij-1}}{2h_2} = 0,$$

$$\frac{\dot{\sigma}_{zij}}{E} = -\eta_{zij}^c + \dot{\varepsilon}_0 + \dot{x}_x y_{ij} - \dot{x}_y x_{ij}, \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{\Phi_{ij}(\sigma_i)}{(1 - \omega_{ij})^m},$$

где $0 < i < K$; $0 < j < M$; $h_1 = a/K$; $h_2 = b/M$; a, b — ширина и длина прямоугольного сечения стержня; x_{ij}, y_{ij} — координаты узла (i, j) конечно-разностной сетки.

Для условия на левой границе $\tau_{zx} = 0$ при $x = -a/2$ используется аппроксимация [10]

$$\frac{-\dot{W}_{2j} + 4\dot{W}_{1j} - 3\dot{W}_{0j}}{2h_1} = \dot{\theta}y_{0j}, \quad 0 < j < \frac{b}{h_2}.$$

Аналогично выписываются уравнения на трех других границах сечения. Матрица коэффициентов в левой части при производных по времени для задач 1, 2 имеет ленточную структуру. Для задачи 3 уравнение (6) записывается в виде

$$\int_S (\dot{W}_{,yx} - \dot{W}_{,xy}) dS + \frac{\dot{\theta}ab(a^2 + b^2)}{12} = \frac{\dot{M}_z}{G} + \int_S (\eta_{zy}^c x - \eta_{zx}^c y) dS.$$

Здесь для аппроксимации производных по x и y используются описанные выше схемы. Для численного интегрирования по сечению применяется метод Симпсона [11]. Таким образом, добавляется еще одно дифференциальное уравнение и, следовательно, еще одна строка в матрице коэффициентов при производных по времени. В этом случае матрица уже не имеет ленточной структуры. Для ее обращения использован метод отражения [12], позволяющий получать решение с высокой точностью и являющийся устойчивым к вычислительной погрешности [10, с. 265–268]. Метод реализован как для матрицы общего вида, так и для матрицы с ленточной структурой. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени применялся метод Рунге — Кутты — Мерсона четвертого порядка с автоматическим выбором шага, что существенно сокращает время решения задачи [11]. Количество одновременно решаемых уравнений имеет порядок $N = 5 \times K \times M$.

2. Численное решение. Предложенная схема апробирована на численном решении линейной упругой задачи кручения стержня прямоугольного сечения $0,01 \times 0,02$ м. Модуль Юнга $E = 66,7$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ соответствуют сплаву ВТ9.

В табл. 1 приведены значения крутящего момента и максимального касательного напряжения для $\theta = 1,396$ рад/м, полученные конечно-разностным методом при разбиении сечения на 11×21 и 21×41 узлов, а также рассчитанные по формулам

$$M_z = k_1 G \theta a^3 b, \quad \tau_{\max} = M_z / (k_2 a^2 b), \quad (8)$$

где величины k_1 и k_2 зависят от отношения b/a [8] (здесь $k_1 = 0,229$, $k_2 = 0,246$).

Для упругого кручения на основе решения, приведенного в [7] для функции напряжений, получено решение для напряжений и деформации в виде ряда, которое из-за его громоздкости здесь не приводится. Сравнение значений напряжений и деформации, полученных в виде ряда и конечно-разностным методом, свидетельствует о достаточно высокой точности решения задачи, полученного конечно-разностным методом.

Таблица 1

Способ вычисления	M_z , Н·м	τ_{\max} , МПа
Численное решение:		
сетка 11×21	163,3	331,0
сетка 21×41	163,7	332,6
Решение (8)	164,0	332,8

Таблица 2

$\varepsilon_0 \cdot 10^3$	θ_0 , рад/м	\varkappa_{x0} , м ⁻¹
0	1,184	0,52
1	1,183	0,51
2	1,172	0,46
3	1,143	0,38
4	1,082	0,30

Ползучесть сплава ВТ9 описывается соотношениями

$$\eta_{kl}^c = B\sigma_i^{n-1}\sigma_{kl}^0/(1-\omega)^m, \quad \dot{\omega} = C\sigma_i^g/(1-\omega)^m. \quad (9)$$

При температуре 550 °С константы в соотношениях (9) имеют следующие значения: $n = 4$, $g = 5$, $m = 10$, $B = 1,1303 \cdot 10^{-17}$ МПа⁻ⁿ · с⁻¹, $C = 5,0105 \cdot 10^{-20}$ МПа^{-g}, предел текучести $\sigma_T = 608$ МПа [13].

В табл. 2 для задачи 1 приведены значения искомым начальных угла закручивания θ_0 и кривизны \varkappa_{x0} , необходимые для получения остаточных значений $\theta_{**} = 0,523$ рад/м, $\varkappa_{x**} = 0,2$ м⁻¹ при фиксированном растяжении ε_0 при $0 \leq t < t_*$. Время термофиксации $t_* = 3,6 \cdot 10^4$ с.

При расчете значения угла закручивания, кривизны и осевого растяжения подбирались таким образом, чтобы максимальное значение интенсивности напряжений при $0 \leq t < t_*$ не превышало предела текучести σ_T .

Деформирование стержня с фиксированным во времени продольным натяжением позволяет уменьшить искомые начальные значения угла закручивания и кривизны, а следовательно, и значения упругого восстановления при $t = t_*$.

Кручение и изгиб оказывают влияние друг на друга. Например, в случае чистого кручения для получения $\theta_{**} = 0,262$ рад/м за время $t_* = 3,6 \cdot 10^4$ с необходимо задать угол закручивания $\theta_0 = 1,232$ рад/м, в случае кручения с изгибом для достижения $\theta_{**} = 0,262$ рад/м и $\varkappa_{x**} = 0,15$ м⁻¹ за то же время необходим угол $\theta_0 = 1,05$ рад/м и $\varkappa_{x0} = 0,62$ м⁻¹.

На рис. 1 приведены результаты численного решения прямых задач чистого кручения для различных режимов деформирования стержня с размерами сечения $0,01 \times 0,02$ м при $t_* = 1,08 \cdot 10^4$ с. На рис. 1,а представлена зависимость крутящего момента M_z от

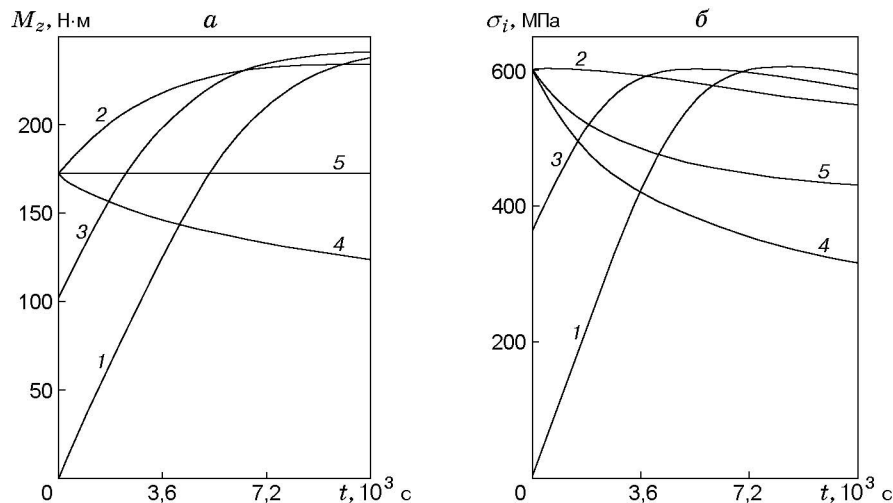


Рис. 1

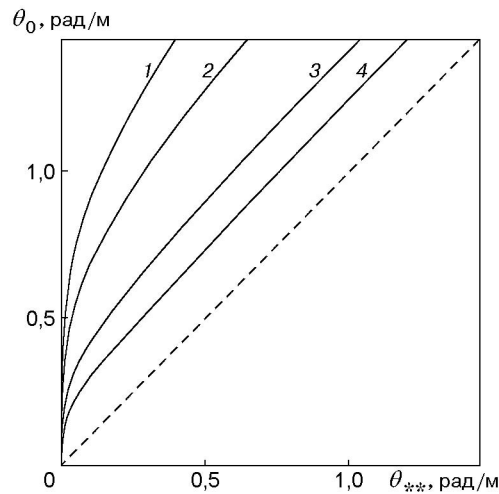


Рис. 2

времени, на рис. 1, б — зависимость максимальной интенсивности напряжения от времени (максимальная интенсивность достигается в середине границы сечения). Кривые 1–5 соответствуют следующим режимам: 1 — линейное увеличение угла закручивания от 0 до 3,227 рад/м при $0 \leq t < t_*$; 2 — мгновенное упругое деформирование в начальный момент времени до достижения угла закручивания 1,465 рад/м с его последующим линейным увеличением до 4,239 рад/м при $0 < t < t_*$; 3 — мгновенное упругое деформирование до достижения угла закручивания 0,872 рад/м с его дальнейшим линейным увеличением до 4,047 рад/м за время t_* ; 4 — мгновенное упругое нагружение до достижения угла закручивания 1,465 рад/м с последующей термофиксацией (при $0 < t < t_*$ угол закручивания остается неизменным и происходит релаксация напряжений); 5 — кручение постоянным моментом при $0 \leq t < t_*$. Для режимов деформирования, соответствующих кривым 1–5, получены следующие значения остаточных углов θ_{**} : 1,195; 2,243; 1,987; 0,412; 0,801 рад/м.

На рис. 2 представлена зависимость начального угла закручивания от заданного остаточного (задача 1). Кривые 1–4 соответствуют времени термофиксации $t_* = 1,08 \cdot 10^4$; $3,6 \cdot 10^4$; $36 \cdot 10^4$; $180 \cdot 10^4$ с. Штриховая линия — асимптота для $t_* \rightarrow \infty$.

В табл. 3 представлены результаты решения задачи 2. При $t = 0$ стержень мгновенно нагружается до достижения угла закручивания $\theta_0 = 1,047$ рад/м и кривизны $\varepsilon_{x0} = 0,5$ м⁻¹, которые затем линейно увеличиваются при $0 < t < t_*$ до искомого угла θ_* и кривизны ε_{x*} , необходимых для получения остаточного угла $\theta_{**} = 1,221$ рад/м и кривизны $\varepsilon_{x**} = 0,5$ м⁻¹.

Проведено также исследование влияния повреждаемости на результаты расчетов. Ниже приводятся данные для задачи чистого кручения (без изгиба и растяжения). При $t = 0$ стержень мгновенно нагружается до достижения угла закручивания $\theta_0 = 1,396$ рад/м, при $0 < t < t_*$ угол меняется с заданной постоянной скоростью $\dot{\theta}$. В табл. 4 приведены значения

Таблица 3

t_* , 10^3 с	θ_* , рад/м	ε_{x*} , м ⁻¹
7,2	2,936	1,35
10,8	2,742	1,25
18,0	2,529	1,14
36,0	2,283	1,02

Таблица 4

t_* , 10^3 с	$\dot{\theta}$, 10^{-4} рад/(м·с)	θ_{**-} , рад/м	θ_{**+} , рад/м	ω_{\max}
3,6	1,744	0,363	0,368	0,01
36,0	1,744	5,757	5,943	0,09
36,0	2,617	8,691	9,022	0,13
72,0	1,744	12,037	12,401	0,15

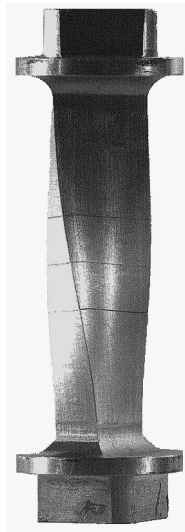


Рис. 3

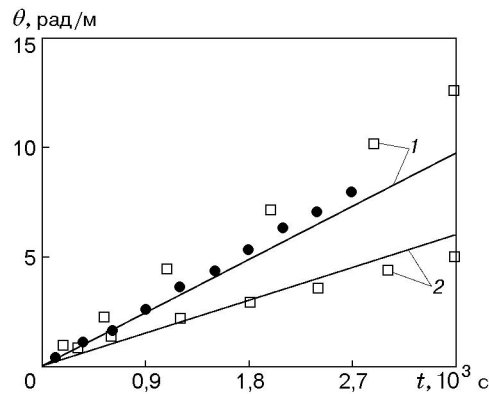


Рис. 4

остаточных углов после разгрузки для различных значений t_* и $\dot{\theta}$ без учета повреждаемости ($\theta_{**,-}$) ($m = 0$ в (9)) и с учетом повреждаемости ($\theta_{**,+}$), а также максимальное значение повреждаемости ω_{\max} в случае ее учета.

Из анализа полученных данных следует, что в задаче 2 повреждаемость необходимо учитывать в случае достаточно длительного процесса формообразования.

3. Экспериментальные данные. *Кручение стержней квадратного сечения.* Проводится сравнение экспериментальных данных, полученных при чистом кручении постоянным моментом (задача 3), с результатами численного решения для стержня квадратного сечения и близкого к квадратному. Квадратная форма поперечного сечения позволяет максимально уменьшить влияние на результаты экспериментов эффекта стеснения деформации на торцах образца.

На рис. 3 показан экспериментальный образец с размерами поперечного сечения $0,01 \times 0,02$ м и рабочей длиной l_0 порядка $0,07$ м. Видно неравномерное закручивание образца вдоль длины стержня: более сильное в центральной части и слабое у торцов. Такой характер закручивания подтверждается непосредственными замерами на инструментальном микроскопе.

На рис. 4 светлыми квадратами 1, 2 показаны экспериментальные зависимости угла закручивания θ от времени для стержней квадратного сечения из конструкционного материала Ст. 45 (изготовленных из прутка диаметром 120 мм) при температуре $T = 725$ °C ($l_0 = 0,051$ м, $a = b = 0,01815$ м, $M_z = 49,57$ Н·м) и $T = 740$ °C ($l_0 = 0,0497$ м, $a = 0,01813$ м, $b = 0,01861$ м, $M_z = 43$ Н·м) соответственно. Сплошные линии 1, 2 соответствуют результатам численных расчетов конечно-разностным методом при $T = 725$; 740 °C. Для расчетов при температуре 725 °C использовалась степенная зависимость для скоростей деформаций ползучести

$$\eta_{kl}^c = B \sigma_i^{n-1} \sigma_{kl}^0 \quad (10)$$

со следующими константами материала [14]: $n = 5,22$, $B = 3,5 \cdot 10^{-14}$ МПа $^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$, $E = 170$ ГПа, $\nu = 0,3$. Для расчетов при температуре 740 °C константы приведены ниже.

В [15] приведено решение задачи кручения стержня с квадратным поперечным сечением в предположении установившейся ползучести (пренебрегается изменением скоростей упругих деформаций) для степенной зависимости скоростей деформаций ползучести,

полученное приближенным аналитическим методом, основанным на принципе минимума дополнительного рассеяния:

$$\dot{\theta} = (3^{3(n+3)/2} B/a)(M/a^3)^n I(n). \quad (11)$$

Здесь $I(n)$ — интеграл, вычисляемый по методу Гаусса (в данном случае $I(5,22) \approx 0,809$). Различие скоростей, вычисленных по формуле (11) ($\dot{\theta} = 2,73 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с)) и конечно-разностным методом ($\dot{\theta} = 2,66 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с)), составляет менее 3 %.

На рис. 4 темные точки соответствуют экспериментальным значениям угла закручивания сплошного стержня круглого поперечного сечения при кручении моментом $M_z = 51,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при $T = 725 \text{ }^\circ\text{C}$ (радиус стержня $R = 9,988 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $l_0 = 0,0431 \text{ м}$). Скорость угла закручивания $\dot{\theta} = 2,73 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с), рассчитанная для этого стержня в предположении установившейся ползучести [15]:

$$\dot{\theta} = (\sqrt{3}B/R^{3n+1})(M\sqrt{3}(3 + 1/n)/(2\pi))^n, \quad (12)$$

совпадает с рассчитанной по формуле (11) для стержня квадратного сечения. Экспериментальные значения $\theta(t)$ для стержней квадратного (светлые квадраты 1 на рис. 4) и круглого (темные точки на рис. 4) поперечных сечений различаются незначительно. Следует отметить, что хорошее соответствие экспериментальных данных при кручении стержней с сечением квадратной формы экспериментальным данным при кручении стержней с сечением круглой формы является важным с точки зрения планирования эксперимента (выбора крутящего момента, размеров образца, продолжительности эксперимента и т. п.).

Анализ формул (11), (12) показывает, что скорость угла закручивания существенно зависит от размеров поперечного сечения: $\dot{\theta} \sim 1/a^{3n+1}$. Уменьшение размера a на 1 % при $n = 5,22$ приводит к увеличению $\dot{\theta}$ примерно на 20 %.

Для расчетов при $T = 740 \text{ }^\circ\text{C}$ (сплошная линия 2 на рис. 4) использовалась зависимость

$$\eta_{kl} = A(\exp(\alpha\sigma_i) - 1)\sigma_{kl}^0/\sigma_i, \quad (13)$$

где $\alpha = 0,12563 \text{ МПа}^{-1}$; $A = 8,0451 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона те же, что и при температуре $T = 725 \text{ }^\circ\text{C}$. Скорость угла закручивания $\dot{\theta} = 1,67 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с), полученная конечно-разностным методом, меньше экспериментальной примерно на 25 %.

С учетом разброса экспериментальных данных, полученных при определении характеристик ползучести, а также сильной зависимости результатов расчетов от размеров поперечного сечения образца, соответствие экспериментальных данных расчетным можно считать удовлетворительным.

Определение характеристик ползучести. В работе [14] приведены значения констант для степенного закона ползучести (10), полученные на основе экспериментальных данных рассеянной энергии в зависимости от времени в экспериментах на растяжение и сжатие для материала Ст. 45 при $T = 725 \text{ }^\circ\text{C}$. При этом предполагалось, что материал ведет себя как изотропная среда без упрочнения с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие.

На рис. 5 представлены результаты экспериментов при чистом растяжении и сжатии в осевом направлении (темные и светлые точки соответственно), растяжении под углом 45° к оси прутка (треугольники) при постоянном напряжении и $T = 725 \text{ }^\circ\text{C}$. Эти данные подтверждают изотропию материала. Экспериментальные зависимости 1–5 соответствуют напряжениям $\sigma = 55, 50, 44, 40, 26 \text{ МПа}$. Квадраты соответствуют экспериментальным значениям интенсивности деформаций в характеристической точке $\hat{\epsilon}_i$ при кручении сплошных образцов с круглым сечением под действием постоянного момента M_z [16]. Экспериментальные данные, полученные при кручении, соответствуют интенсивности напряжений в характеристической точке, равной напряжению при чистом

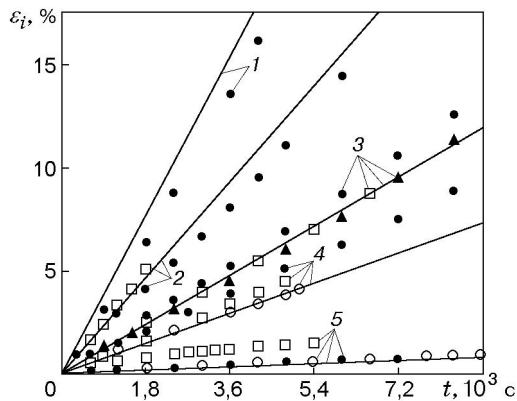


Рис. 5

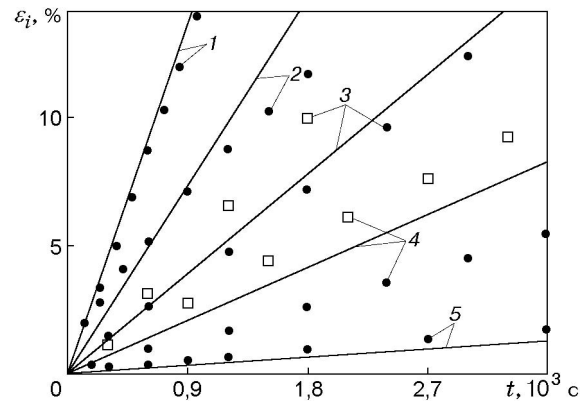


Рис. 6

растяжении: $\hat{\sigma}_i = \sigma = 26, 40, 44, 50$ МПа ($M_z = 31,2; 42,8; 53,1; 60,3$ Н·м; $R = 9,975 \cdot 10^{-3}; 9,988 \cdot 10^{-3}; 0,01; 9,995 \cdot 10^{-3}$ м). Длина образцов 0,047 м. Знак “^” соответствует величинам в характеристической точке.

Положение характеристической точки определяется как координата пересечения эпюр, соответствующих упругому и установившемуся распределениям напряжений [16]. Применительно к кручению сплошных стержней круглого сечения постоянным моментом, когда неизвестен показатель ползучести n , с достаточной точностью для построения диаграмм кручения в качестве координаты характеристической точки можно использовать координату пересечения эпюр, соответствующих упругому и идеально пластическому распределениям ($\hat{R} = 3R/4$). При этом $\hat{\varepsilon}_i = 3R\theta/4$, $\hat{\sigma}_i = \sqrt{3} 3M_z/(2\pi R^3)$.

На рис. 6 приведены экспериментальные зависимости (точки) интенсивности деформаций при чистом растяжении в осевом направлении от времени при $T = 740$ °С. Экспериментальные значения, отмеченные цифрами 1–5, соответствуют значениям $\sigma = 60, 55, 50, 45, 30$ МПа. На рис. 6 квадраты 3, 4 соответствуют значениям интенсивности деформаций в характеристической точке, полученным из эксперимента при кручении сплошного образца с круглым сечением с интенсивностью напряжений в характеристической точке $\hat{\sigma}_i = 50, 45$ МПа ($M_z = 60,4; 54,4$ Н·м, $R = 9,996 \cdot 10^{-3}$ м).

Сплошные линии на рис. 5, 6 — аппроксимации экспериментальных данных с использованием степенной зависимости (10) при $T = 725$ °С и экспоненциальной зависимости (13) при $T = 740$ °С соответственно. Из представленных на рис. 5, 6 результатов следует, что при одной и той же интенсивности напряжений $\sigma_i = \hat{\sigma}_i$ экспериментальные точки группируются вдоль прямой, что подтверждает гипотезу “единой кривой” и выбор эквивалентного напряжения.

Таким образом, предложенная методика моделирования и расчета параметров формообразования стержней в условиях ползучести на основе конечно-разностного метода удовлетворительно подтверждается экспериментально для задачи определения крутящего момента, необходимого для получения требуемого угла закручивания для стержня с поперечным сечением, близким к квадратному.

Расчет конечно-разностным методом позволяет анализировать чувствительность скоростей деформирования к изменению геометрических размеров образца, что важно для планирования и проведения экспериментов.

Необходимо дальнейшее экспериментальное исследование кручения стержней более сложных сечений (в том числе при больших деформациях) с целью апробации методики расчета формообразования стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сухоруков И. В., Горев Б. В., Клопотов И. Д., Веричев С. Н.** Формообразование подкрепленных панелей двойной кривизны в условиях ползучести // Тр. XXVI Междунар. конф. по теории пластин и оболочек, Нижний Новгород, сент. 1993 г. Н. Новгород: Б. и., 1994. Т. 3. С. 199–207.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи формоизменения неупругих пластин при ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1996. № 1. С. 96–106.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 5. С. 126–134.
4. **Банщикова И. А.** Обратная задача для вязкоупругой пластины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд.-ние. Ин-т гидродинамики. 1998. Вып. 113. С. 13–18.
5. **Сухоруков И. В.** Одномерные задачи формоизменения // Там же. С. 150–155.
6. **Сухоруков И. В., Цвелодуб И. Ю.** Итерационный метод решения релаксационных обратных задач // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 93–101.
7. **Биргер И. А.** Стержни, пластины, оболочки. М.: Наука. Издат. фирма. Физ.-мат. лит., 1992.
8. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
9. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
10. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П.** Численные методы. М.: Наука, 1987.
11. **Мудров А. Е.** Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП "РАСКО", 1992.
12. **Коновалов А. Н.** Введение в вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: Наука. Сиб. отд.-ние, 1993.
13. **Никитенко А. Ф., Сухоруков И. В.** Приближенный метод решения релаксационных задач с учетом повреждаемости материала при ползучести // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 136–142.
14. **Любашевская И. В., Соснин О. В.** О приближенных оценках внешних нагрузок при установившейся ползучести в элементах конструкций // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд.-ние. Ин-т гидродинамики. 1999. Вып. 114. С. 183–185.
15. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
16. **Горев Б. В.** К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. 1 // Пробл. прочности. 1979. № 4. С. 30–36.

Поступила в редакцию 4/XII 2001 г.
