ПМТФ, № 2, 1970

О НЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Суязов

(Воронеж)

Примерами сред, где необходимо учитывать внутреннее вращение частиц, несимметричность тензора напряжений и наличие моментных напряжений (см. [1, 2]), являются жидкие диэлектрики, искусственно синтезированные ферромагнитные и сегнетоэлектрические жидкости [3].

Ферромагнитные жидкости [3] представляют собой однородные коллоидные суспензии ферромагнитных частиц в жидком носителе (например, керосине). Типичный размер ферромагнитных частиц порядка 25—100 Å, и поэтому они являются «однодоменными» однородно намагниченными образованиями [3]. Концентрация таких частиц достигает величины 10^{18} *см*$^{-3}$. Броуновское движение и наличие в жидкости диспергирующего агента (например, олеиновой кислоты) препятствует слипанию частиц.

Физический механизм макроскопического намагничивания магнитных жидкостей внешним полем существенно связан с наличием вращательных степеней свободы у магнитных частиц. При воздействии магнитного поля в жидкости возникает объемная электромагнитная сила и объемный момент, который ориентирует магнитные диполи частиц по полю. Ориентирующее действие магнитного поля сопровождается диссипацией энергии поля на работу, совершаемую объемным магнитным моментом на перемещениях вращения частиц, против сил вязкого сопротивления их вращательному движению. В процессе ориентируемого поворота частиц, находящихся в физически бесконечно малом объеме, происходит изменение вектора намагниченности единицы объема. Изменение вектора намагниченности в таких жидкостях может вызываться также, например, взаимодействием вращательного движения частиц с гидродинамическим движением их центров инерции, тепловым движением, изменением внутреннего состояния самих частиц [3].

Из рассмотренного физического механизма намагничивания магнитных жидкостей ясно, что при одновременном механическом, электромагнитном, тепловом воздействии в них будут происходить сложные физико-механические процессы, которые являются причинами своеобразного макроскопического поведения таких жидкостей [3].

Для макроскопического описания поведения магнитных, сегнетоэлектрических жидкостей естественной необходимостью является привлечение моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы [1], учитывающих влияние осредненного движения микроструктуры среды на ее макроскопическое поведение. Наличие дополнительных степеней свободы в таких моделях позволяет выявить различные новые эффекты взаимосвязей между механическими, термическими и электромагнитными явлениями.

Отметим, что в работе [3] построена модель ферромагнитной жидкости при использовании ряда упрощающих предположений. В частности, в [3] принимается, что частицы мгновенно ориентируются по полю и движение среды не влияет на приложенное поле.

Ниже рассматривается неизотермическая модель изотропной, проводящей, диэлектрически и парамагнитно поляризуемой жидкости, обладающей внутренними вращениями частиц [2].

При феноменологическом описании намагниченных сред в литературе часто (на основании гироскопического свойства магнитного момента) допускается пропорциональность вектора намагниченности вектору плотности внутреннего макроскопического момента импульса [4]. Допущение связи подобного типа в качестве исходной гипотезы обосновано при описании сред, у которых магнитный момент обусловлен, например, вектором внутреннего вращения молекул, спинами электронов, орбитальным движением электронов и т. п. При рассмотрении суспензий [3], содержащих магнитные частицы, вектор внутреннего вращения описывает поворот этих частиц, ориентируя их моменты по полю. В связи с этим допущение о пропорциональности вектора намагниченности вектору внутреннего вращения частиц суспензий не может быть использовано.

В данной работе при построении модели используются методы термодинамики необратимых процессов, которые позволяют при весьма простых и общих предположениях [12] учесть диссипацию энергии электромагнитного поля на релаксационные процессы, связанные с явлениями поляризации и намагничиваемости среды. Учет диссипации энергии поля осуществляется при помощи рассмотрения инвариантных производных по времени от векторов поляризации и намагниченности среды в качестве определяющих параметров [5].

В работе обсуждается вид зависимости функции свободной энергии от независимых определяющих параметров, число и вид которых определяется с помощью аксиомы равной представительности, аксиомы объективности [6] и локального неравенства Клаузиуса — Дюгема. При получении полной системы линейных определяющих уравнений относительно термодинамических сил в работе не принимается во внимание возможная зависимость феноменологических коэффициентов от магнитного поля. Учет такой зависимости в определяющих электромеханических уравнениях приводит к уравнениям, которые являются гидродинамическим обобщением уравнений Блоха — Бломбергена [7] и Фойхта [8].

Описываемая модель жидкости характеризуется различного рода перекрестными эффектами между механическими, термическими, электромагнитными явлениями.

В одном из предельных случаев, когда отсутствует взаимодействие сплошной среды с электромагнитным полем, описываемая модель совпадает с неизотермической моделью Грэда [2]. В другом предельном случае, когда можно пренебречь диссипативными явлениями, связанными с намагниченностью, поляризацией среды, внутренним вращением частиц,— с моделью работы [3].

1. Основные равнения электродинамики, механики и термодинамики. Уравнения электродинамики движущейся среды в форме Чу (поляризационная модель) в системе **СИ** имеют вид [9]

$$\nabla\times\mathbf{h}-\frac{\partial\varepsilon_0\mathbf{e}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t}+\nabla\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v})+\mathbf{i},\qquad \nabla\cdot\mu_0\mathbf{h}=-\nabla\cdot\mu_0\mathbf{m}$$

$$\nabla\times\mathbf{e}+\frac{\partial\mu_0\mathbf{h}}{\partial t}=-\frac{\partial\mu_0\mathbf{m}}{\partial t}-\nabla\times(\mu_0\mathbf{m}\times\mathbf{v}),\qquad \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbf{e}=-\nabla\cdot\mathbf{p}\qquad(1.1)$$

Здесь $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ — векторы электрической и магнитной напряженности, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$ — векторы поляризации и намагниченности, $\mathbf{i}$ — вектор плотности электрического тока, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости в вакууме, ∇ — оператор Гамильтона [10], операция ($\times$) означает векторное умножение.

Отметим, что уравнения электродинамики (1.1) справедливы для сред, скорости движения которых значительно меньше скорости света в вакууме $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

Плотности импульса и энергии электромагнитного поля имеют вид

$$\mathbf{g}=\mathbf{S}/c^2,\quad w={}^1/_2(\varepsilon_0\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}+\mu_0\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}),\qquad \mathbf{S}=\mathbf{e}\times\mathbf{h}\qquad(1.2)$$

Здесь $\mathbf{S}$ — вектор Пойтинга.

Из (1.2) с учетом (1.1) получим законы сохранения плотности импульса и энергии электромагнитного поля в форме, удобной для термодинамического описания поляризуемой и намагниченной среды

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\varphi},\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\mathbf{v}-\mathbf{S})-\Pi$$

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{\tau}_1,\quad \boldsymbol{\tau}_0=\varepsilon_0\mathbf{e}\mathbf{e}+\mu_0\mathbf{h}\mathbf{h}-w\mathbf{I},\qquad \boldsymbol{\tau}_1=\mathbf{m}\boldsymbol{\eta}+\mathbf{p}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{i}\times\mu_0\mathbf{h}+\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{e}+\mu_0\mathbf{m}\cdot\nabla\mathbf{h}+\rho\boldsymbol{\pi}^{\cdot}\times\mu_0\mathbf{h}-\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^{\cdot}\times\varepsilon_0\mathbf{e}+$$

$$+\mathbf{v}\times(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mu_0\mathbf{h}-\mathbf{v}\times(\mu_0\mathbf{m}\cdot\nabla)\varepsilon_0\mathbf{e},\quad \boldsymbol{\pi}=\mathbf{p}/\rho,\quad \boldsymbol{\mu}=\mathbf{m}/\rho$$

$$\Pi=\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}+\rho\boldsymbol{\pi}^{\cdot}\cdot\mathbf{e}+\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^{\cdot}\cdot\mathbf{h}+\mathbf{v}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{e}-\mu_0\mathbf{m}\cdot\nabla\mathbf{h})$$

$$\rho\boldsymbol{\pi}^{\cdot}=d\mathbf{p}/\partial t+\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{p}),\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{e}+\mathbf{v}\times\mu_0\mathbf{h},\quad \boldsymbol{\eta}=\mathbf{h}-\mathbf{v}\times\varepsilon_0\mathbf{e}\qquad(1.3)$$

Здесь ρ — массовая плотность; $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — электрическая и магнитная поляризации на единицу массы; $\boldsymbol{\tau}$ — электромагнитный тензор натяжений, который ради удобства термодинамического описания поляризованной среды представлен в виде суммы вакуумного тензора натяжений τ_0 и материального тензора натяжений τ_1; φ — пондеромоторная сила взаимодействия электромагнитного поля с материальной средой; Π — плотность электродинамического расхода мощности, связанного с явлениями проводимости, электрической и магнитной поляризации среды; ε и η — векторы напряженности электрического и магнитного эффективного поля [9]; I — единичная диада. Операция $(\dot{})$ означает полную производную по времени.

Отметим, что вывод выражения для пондеромоторной силы (1.3) можно найти в работе [11], где выражение плотности силы получено, исходя из обобщенного принципа виртуальных перемещений. Интерпретацию различных членов в выражении силы (1.3) можно найти в [11].

Рассмотрим структурный материальный континуум, в каждой точке которого определим вектор скорости трансляции $\mathbf{v}$ и вектор угловой скорости вращения частиц $\boldsymbol{\omega}$, из которых состоит его точка. Предположим также, что в каждой точке произвольного материального объема V приложен вектор массовой силы $\mathbf{f}$, на поверхности S объема V действует вектор силового напряжения $\mathbf{t}_n$, вектор моментного напряжения $\mathbf{s}_n$ и вектор электромагнитного натяжения $\boldsymbol{\tau}_n$. Уравнение сохранения массы, уравнения изменения количества движения, момента количества движения, уравнение изменения энергии и неравенство Клаузиуса — Дюгема для производства энтропии [6] в интегральной форме запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int_V (\rho\mathbf{v} + \mathbf{g})\, dV = \int_S (\boldsymbol{\tau}_n + \mathbf{t}_n + v_n\mathbf{g})\, dS + \int_V \rho\mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V [(\mathbf{r}\times\mathbf{v} + J\boldsymbol{\omega})\rho + \mathbf{r}\times\mathbf{g}]\, dV = \int_S [\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\tau}_n + \mathbf{t}_n + v_n\mathbf{g}) + \mathbf{s}_n]\, dS + \int_V \mathbf{r}\times\rho\mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left[\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + u + J\frac{\omega^2}{2}\right)\rho + w\right] dV = \int_S [(\mathbf{t}_n + \boldsymbol{\tau}_n + v_n\mathbf{g})\cdot\mathbf{v} + \mathbf{s}_n\cdot\boldsymbol{\omega}]\, dS -$$

$$-\int_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{q} + \mathrm{S}^\circ)\, dS + \int_V (\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + r)\, dV \qquad (1.4)$$

$$\int_V \rho\gamma\, dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho\eta\, dV - \int_V \rho\frac{r}{T}\, dV + \int_V \frac{\mathbf{q}}{T}\cdot\mathbf{n}\, dS \geqslant 0$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки материального континуума, $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока, r — скалярная плотность теплового источника на единицу массы и в единицу времени [6], u — плотность внутренней энергии на единицу массы, $\mathrm{S}^\circ = \varepsilon \times \eta$ — вектор потока электромагнитной энергии через движущуюся поверхность S, J — среднее значение момента инерции единицы массы, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S, v_n — проекция скорости на нормаль $\mathbf{n}$, η — плотность энтропии на единицу массы, γ — плотность производства энтропии на единицу массы, T — температура. Уравнение изменения энергии (1.4) написано в предположении, что моментные напряжения производят работу только на перемещениях внутреннего вращения [2].

Воспользуемся соотношениями, связывающими диаду $\mathbf{s}$ моментных напряжений, диаду $\mathbf{t}$ силовых напряжений и диаду $\boldsymbol{\tau}$ электромагнитных натяжений с вектором $\mathbf{s}_n$ моментных напряжений, вектором $\mathbf{t}_n$ силовых напряжений и вектором $\boldsymbol{\tau}_n$ электромагнитных натяжений [2, 13]

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t}, \quad \mathbf{s}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad (1.5)$$

Принимая во внимание формулы диадного исчисления [10], связывающие интегрирование по поверхности S с интегрированием по непрерывному объему V, получаем из (1.4) с учетом (1.3), (1.5) соотношения

$$\rho^{\cdot} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\ \rho\mathbf{v}^{\cdot} = \nabla\cdot\mathbf{t} + \rho\mathbf{f} + \boldsymbol{\varphi},\quad \nabla\cdot\mathbf{s} + \boldsymbol{\tau}\times\mathbf{I} + \mathbf{t}\times\cdot\mathbf{I} = \rho J\boldsymbol{\omega}^{\cdot} \quad (1.6)$$
$$\rho u^{\cdot} - (\rho r - \nabla\cdot\mathbf{q}) = \mathbf{t}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{s}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}\times\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{\eta} + \rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\rho T\gamma = \rho T\eta^{\cdot} - (\rho r - \nabla\cdot\mathbf{q}) - T^{-1}\mathbf{q}\cdot\nabla T \geqslant 0,\ \rho\boldsymbol{\pi}^* = \rho\boldsymbol{\pi}^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p},\ \rho\boldsymbol{\mu}^* = \rho\boldsymbol{\mu}^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{m}$$

Здесь операция $(\times\cdot)$ означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно, операция $(\cdot\ \ \cdot)$ означает, что левые и правые множители диад перемножаются скалярно.

Воспользуемся функцией удельной свободной энергии

$$\varphi = u - T\eta \quad (1.7)$$

Локальное неравенство Клаузиуса — Дюгема (1.6) с учетом (1.7) и уравнения изменения энергии (1.6) преобразуем к виду

$$\rho T\gamma = \mathbf{t}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{s}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}\times\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{\eta} + \rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \rho(\varphi^{\cdot} - \eta T^{\cdot}) - $$
$$- \frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T \geqslant 0 \quad (1.8)$$

2. Линейные определяющие уравнения. Рассмотрим определяющие уравнения для изотропной жидкости с внутренним вращением частиц с учетом явлений теплопроводности, электропроводности, диэлектрической и парамагнитной релаксации.

Допустим, что независимыми определяющими аргументами для рассматриваемой жидкости являются

$$\rho^{-1},\ T,\ \mathbf{v},\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{p},\ \mathbf{m},\ \nabla T,\ \nabla\mathbf{v},\ \nabla\boldsymbol{\omega},\ \rho\boldsymbol{\pi}^*,\ \rho\boldsymbol{\mu}^* \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) написано в предположении, что градиенты векторов поляризации и намагниченности не рассматриваются в качестве определяющих аргументов. Это означает, что в описываемой модели не учитываются неоднородности в намагничивании и поляризации среды [5, 13]. Такое допущение возможно [3, 13] вследствие равномерности в распределении ферромагнитных «однодоменных» однородно намагниченных частиц в жидком носителе. Рассмотрение в качестве независимых определяющих аргументов производных по времени от векторов поляризации и намагниченности позволяет описать явления электрической и магнитной релаксации среды [5]. При этом учитывается, как следует непосредственно из вида производных по времени (1.6), изменение векторов поляризации и намагниченности вследствие вращения частиц.

Принимая во внимание требование аксиомы объективности [6], можно показать, что объективными формами аргументов (2.1) будут выражения

$$\rho^{-1},\ T,\ \mathbf{p},\ \mathbf{m},\ \nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega},\ \nabla T,\ (\nabla\mathbf{v})^s,\ \nabla\boldsymbol{\omega},\ \rho\boldsymbol{\pi}^*,\ \rho\boldsymbol{\mu}^* \quad (2.2)$$

Здесь индексом s отмечена симметричная часть диады. При получении соотношений (2.2) была использована замена антисимметричной диады $(\nabla\mathbf{v})^a$ на эквивалентный ей вектор $\mathbf{c}$.

Связи между этими величинами имеют вид

$$(\nabla\mathbf{v})^a = -\mathbf{I}\times\mathbf{c},\quad \mathbf{c} = {}^1\!/_2(\nabla\mathbf{v})\times\cdot\mathbf{I} = {}^1\!/_2\,\nabla\times\mathbf{v} \quad (2.3)$$

Зависимыми термомеханическими, электромагнитными определяющими переменными для описываемой модели жидкости являются

$$\mathbf{t},\ \mathbf{s},\ \mathbf{q},\ \ \eta,\ \varphi,\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\eta},\ \mathbf{i} \quad (2.4)$$

Согласно аксиоме, равной представительности [6], все зависимые определяющие переменные (2.4) должны быть функциями одного и того же набора независимых определяющих аргументов (2.2), пока не будет установлено обратное. Следовательно, функция свободной энергии имеет вид

$$\varphi = \varphi(\rho^{-1}, T, \mathbf{p}, \mathbf{m}, \rho\boldsymbol{\mu}^*, \rho\boldsymbol{\pi}^*, \nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}, \nabla T, (\nabla\mathbf{v})^s, \nabla\boldsymbol{\omega}) \tag{2.5}$$

Рассмотрим ограничения на вид зависимости свободной энергии (2.5), которые следуют из локального неравенства Клаузиуса — Дюгема (1.8). После этого зависимые определяющие переменные $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{i}$ получим в линейном приближении с помощью методов термодинамики необратимых процессов [12]. Считая, что свободная энергия φ — дифференцируемая функция своих аргументов, из (1.8), (2.5) с учетом уравнения неразрывности (1.6) получаем

$$\rho T\gamma = \rho\left(\eta - \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt} + \left[\mathbf{t} + \left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\cdot\mathbf{p} + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{m}}\cdot\mathbf{m} - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho^{-1}}\right)\mathbf{I}\right]\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v} - \frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T +$$
$$+ \mathbf{s}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}\times\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{\eta} + \rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{\pi}} - \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{m}}\cdot\dot{\boldsymbol{\mu}} -$$
$$- \rho\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\mathbf{v})^s}\cdot\cdot\,\frac{d(\nabla\mathbf{v})^s}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\times\mathbf{v}-2\boldsymbol{\omega})}\cdot\frac{d(\nabla\times\mathbf{v}-2\boldsymbol{\omega})}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\boldsymbol{\omega})}\cdot\cdot\,\frac{d(\nabla\boldsymbol{\omega})}{dt} -$$
$$- \rho\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla T)}\cdot\frac{d(\nabla T)}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho\boldsymbol{\pi}^*}\cdot\frac{d\rho\boldsymbol{\pi}^*}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho\boldsymbol{\mu}^*}\cdot\frac{d\rho\boldsymbol{\mu}^*}{dt} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

В виду того что $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{i}$ не зависят от материальных производных по времени величин T, ∇T, $\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}$, $\rho\boldsymbol{\pi}^*$, $\rho\boldsymbol{\mu}^*$, $(\nabla\mathbf{v})^s$, $\nabla\boldsymbol{\omega}$ и неравенство (2.6) линейно относительно этих производных, необходимыми и достаточными условиями справедливости (2.6) для любых независимых вариаций этих производных являются соотношения [5,6]

$$\rho T\gamma = \left[\mathbf{t} + \left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\cdot\mathbf{p} + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{m}}\cdot\mathbf{m} - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho^{-1}}\right)\mathbf{I}\right]\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v} - \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{\pi}} - \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{m}}\cdot\dot{\boldsymbol{\mu}} +$$
$$+ \mathbf{s}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}\times\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{\eta} + \rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T \geqslant 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\mathbf{v})^S} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\times\mathbf{v}-2\boldsymbol{\omega})} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\boldsymbol{\omega})} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla T)} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho\boldsymbol{\pi}^*} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho\boldsymbol{\mu}^*} = \eta - \frac{\partial\varphi}{\partial T} = 0$$

В итоге для функций свободной энергии имеем выражение

$$\varphi = \varphi(\rho^{-1}, T, \mathbf{p}, \mathbf{m}), \quad \eta = \partial\varphi/\partial T \tag{2.8}$$

В соответствии с аксиомой объективности [6] функция свободной энергии φ должна быть форминвариантной по отношению к движению пространственной системы отсчета как жесткого целого. Принимая во внимание теорему Коши [14, стр. 144] и теорему Кюри [12], можно показать, что в этом случае функция должна быть функцией следующих независимых скалярных инвариантов:

$$\rho^{-1}, T, J_1 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}, \quad J_2 = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} \tag{2.9}$$

Локальное неравенство Клаузиуса — Дюгема (2.7) с учетом (2.9) и тождества $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$ представим в виде

$$\rho T\gamma = (\mathbf{t} + p\mathbf{I})\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v} + \mathbf{s}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}\times\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot(\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}) +$$
$$+ \rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T \geqslant 0 \tag{2.10}$$

В соотношении (2.10) использованы следующие обозначения:

$$p = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho^{-1}} + 2\rho\frac{\partial\varphi}{\partial J_1}J_1 + 2\rho\frac{\partial\varphi}{\partial J_2}J_2, \quad {}_E\boldsymbol{\varepsilon} = 2\rho\frac{\partial\varphi}{\partial J_1}\mathbf{p}, \quad {}_E\boldsymbol{\eta} = \frac{2\rho}{\mu_0}\frac{\partial\varphi}{\partial J_2}\mathbf{m} \quad (2.11)$$

Здесь p — гидростатическое давление в поляризованной и намагниченной жидкости, ${}_E\boldsymbol{\varepsilon}$ и ${}_E\boldsymbol{\eta}$ — векторы напряженностей локального электрического и локального магнитного полей [8], $\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}$ — диссипативные части векторов электрической и магнитной напряженности, характеризующие релаксационные процессы в намагничивании и поляризации.

Для удобства выделения независимых сил и термодинамических потоков представим диады $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, $\nabla\mathbf{v}$, $\nabla\boldsymbol{\omega}$ в форме

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta} = (\beta^\circ - p)\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}^d + \boldsymbol{\beta}^a, \quad \mathbf{s} = s^\circ\mathbf{I} + \mathbf{s}^a + \mathbf{s}^d, \quad \beta^\circ = {}^1/_3\,\boldsymbol{\beta}\cdot\cdot\mathbf{I}$$
$$\nabla\mathbf{v} = {}^1/_3\,\nabla\cdot\mathbf{v}\mathbf{I} + (\nabla\mathbf{v})^a + (\nabla\mathbf{v})^d, \quad \nabla\boldsymbol{\omega} = {}^1/_3\,\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\mathbf{I} + (\nabla\boldsymbol{\omega})^a + (\nabla\boldsymbol{\omega})^d,$$
$$s^\circ = {}^1/_3\,\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{I} \quad (2.12)$$

Здесь индексом a отмечены антисимметричные диады, индексом d — девиаторные части симметричных диад.

Неравенство для производства энтропии (2.10) с учетом соотношений (2.12) представим в виде

$$-\frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T + \beta^\circ\nabla\cdot\mathbf{v} + s^\circ\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}^a\cdot(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{d}\cdot 2\mathbf{b} + \mathbf{s}^d\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^d +$$
$$+ \boldsymbol{\beta}^d\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^d + \mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*\cdot(\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}) + \rho\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon}) \geqslant 0 \quad (2.13)$$

При получении соотношения (2.13) были использованы замены [2] диад $\boldsymbol{\beta}^a$, $(\nabla\mathbf{v})^a$ и псевдодиад $(\nabla\boldsymbol{\omega})^a$, $\mathbf{s}^a$ на эквивалентные им соответственно псевдовекторы $\mathbf{P}^a$, ${}^1/_2\nabla\times\mathbf{v}$ и полярные векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$. Связи между этими величинами аналогичны соотношению (2.3).

Отметим, что в (2.13) величина $\nabla\cdot\mathbf{v}$ — скаляр, $(\nabla\mathbf{v})^d$ — диада, $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ псевдоскаляр, $(\nabla\boldsymbol{\omega})^d$ — псевдодиада. Величины ∇T, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\rho\boldsymbol{\pi}^*$ — полярные векторы, $\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}$, $\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*$ — псевдовекторы [13, 15]. Термодинамические силы $\nabla T\,/\,T$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*$ в выражении (2.13) являются четными функциями времени t, а силы $2\mathbf{b}$, $\rho\boldsymbol{\pi}^*$, $\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}$ — нечетными [12, 13].

Учитывая теорему Кюри и соотношения взаимности Онзагера [12], из (2.13) находим полную систему линейных относительно термодинамических сил феноменологических уравнений для скалярных, псевдоскалярных явлений вида

$$\beta^\circ = \alpha_1\nabla\cdot\mathbf{v}, \qquad s^\circ = \gamma_1\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} \quad (2.14)$$

для диадных и псевдодиадных явлений

$$\boldsymbol{\beta}^d = 2\alpha_2(\nabla\mathbf{v})^d, \quad \mathbf{s}^d = 2\gamma_2(\nabla\boldsymbol{\omega})^d \quad (2.15)$$

для псевдовекторных и векторных явлений

$$\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta} = h_1\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^* - \alpha_4(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega})$$
$$\mathbf{P}^a = \alpha_3(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + \alpha_4\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*$$
$$\mathbf{d} = 2\gamma_3\mathbf{b} + \varkappa_2\nabla T + \gamma_4\rho\boldsymbol{\pi}^* + \gamma_5\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$
$$\mathbf{q} = -\varkappa_1\nabla T + 2\varkappa_2 T\mathbf{b} + \varkappa_3 T\rho\boldsymbol{\pi}^* - \varkappa_4 T\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\mathbf{i} = \sigma_1\boldsymbol{\varepsilon} - l_2\rho\boldsymbol{\pi}^* + \varkappa_4\nabla T - 2\gamma_5\mathbf{b}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon} = l_1\rho\boldsymbol{\pi}^* + \varkappa_3\nabla T + 2\gamma_4\mathbf{b} + l_2\boldsymbol{\varepsilon}$$

Феноменологические коэффициенты в (2.14) — (2.16) являются скалярами, характеризующими изотропные свойства среды. Отметим, что феноменологические коэффициенты в (2.14) — (2.16) есть, вообще говоря, функции плотности и температуры.

Из (2.16) непосредственно видно, что описываемая модель характеризуется термомеханическим, термоэлектрическим, термополяризационным, электрополяризационным, электромеханическим, поляризационномеханическим, магнитомеханическим перекрестными эффектами. Величины вкладов перечисленных перекрестных эффектов в термодинамические потоки определяются феноменологическими коэффициентами соответственно $2\varkappa_2$, $\varkappa_4$, $\varkappa_3$, l_2, γ_5, α_4. Отметим, что в рамках данной модели, например, сдвиговое движение жидкости будет сопровождаться появлением намагниченности, поляризации жидкости, теплового потока и механоэлектрического тока.

Определяющие уравнения для диссипативных частей векторов электрической и магнитной напряженности (2.16) представляют собой уравнения молекулярного равновесия [8], записанные с учетом диссипативных сил сопротивления среды явлениям поляризации и намагниченности и пересечения термодинамических потоков. Эти уравнения можно рассматривать также как уравнения, описывающие изменение векторов поляризации и намагниченности со временем, обусловленное конвективным движением среды, внутренним вращением, процессом электрической и магнитной релаксации и перекрестными эффектами.

Отметим, что при получении соотношений (2.14) — (2.16) не принималась во внимание возможная зависимость феноменологических коэффициентов от магнитного поля [7,12]. Рассмотрение подобного типа зависимости приведет к появлению в (2.14) — (2.16) нелинейных относительно напряженности поля и термодинамических сил членов. Рассмотрим эту зависимость только лишь для коэффициентов электромеханических определяющих уравнений (2.16). Из чисто практических соображений будем рассматривать величину $\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}$ как независимую термодинамическую силу. Для термодинамических потоков $\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon}$, $\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*$ без учета пересечений их с другими потоками из (2.13) имеем линейные определяющие уравнения вида

$$\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\cdot\rho\boldsymbol{\pi}^*, \qquad \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{R}\cdot(\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}) \tag{2.17}$$

В соотношении (2.17) симметричные $\mathbf{L}^s$ и $\mathbf{R}^s$ и антисимметричные $\mathbf{L}^a$ и $\mathbf{R}^a$ части диад феноменологических коэффициентов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ удовлетворяют соотношениям взаимности Онзагера [7, 13]

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^s(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{L}^s(-\boldsymbol{\eta}), \qquad &&\mathbf{R}^s(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}^s(-\boldsymbol{\eta}) \\ &\mathbf{l}^a(\boldsymbol{\eta}) = -\,\mathbf{l}^a(-\boldsymbol{\eta}), \qquad &&\mathbf{r}^a(\boldsymbol{\eta}) = -\,\mathbf{r}^a(-\boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

При получении соотношений (2.18) были использованы замены антисимметричных диад $\mathbf{L}^a$ и $\mathbf{R}^a$ на эквивалентные им псевдовекторы $\mathbf{l}^a$ и $\mathbf{r}^a$. Из (2.18) видно, что симметричные части диад феноменологических коэффициентов являются четными функциями магнитного поля, а псевдовекторы — нечетными.

Для изотропной жидкости в линейном приближении по $\boldsymbol{\eta}$ соотношения (2.18) будут удовлетворены, если положить

$$\mathbf{L} = l_0\mathbf{I} - \mathbf{I}\times\lambda_1\boldsymbol{\eta}, \qquad \mathbf{R} = r_1\mathbf{I} - \mathbf{I}\times r_2\boldsymbol{\eta} \tag{2.19}$$

Из (2.17) с учетом (2.19) имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon} - {}_E\boldsymbol{\varepsilon} = l_1 \rho \boldsymbol{\pi}^* + \lambda_1 \rho \boldsymbol{\pi}^* \times \boldsymbol{\eta}, \quad \rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^* = r_1(\boldsymbol{\eta} - {}_E\boldsymbol{\eta}) - r_2 {}_E\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\eta} \tag{2.20}$$

Из (2.20) видно, что учет зависимости коэффициентов от магнитного поля приводит к появлению в определяющих уравнениях членов, которые учитывают изменение векторов поляризации и намагниченности, обусловленное гиротропными свойствами среды [13] со скалярным коэффициентом гиротропности λ_1 и гироскопическим свойством магнитного момента [13] с магнитомеханическим отношением r_2 соответственно.

Уравнение неразрывности, уравнения движения (1.6) и неравенство для производства энтропии (2.10) с учетом соотношений (2.3), (2.12), (2.14) — (2.16) представим в виде

$$\rho\mathbf{v}^{\boldsymbol{\cdot}} = -\nabla p + \nabla(\alpha_1 \nabla\cdot\mathbf{v}) + 2\nabla\cdot[\alpha_2(\nabla\mathbf{v})^d] + \nabla\times[\alpha_3(2\boldsymbol{\omega} - \nabla\times\mathbf{v})] -$$
$$- \nabla\times(\alpha_4\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*) + \rho\mathbf{f} + \boldsymbol{\varphi}, \qquad \rho^{\boldsymbol{\cdot}} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\rho J\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}} = \nabla(\gamma_1\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}) + 2\nabla\cdot[\gamma_2(\nabla\boldsymbol{\omega})^d] + 2\nabla\cdot[\gamma_3(\nabla\boldsymbol{\omega})^a] - \nabla\cdot(\varkappa_2\mathbf{I}\times\nabla T) -$$
$$- \nabla\cdot(\gamma_4\rho\mathbf{I}\times\boldsymbol{\pi}^*) - \nabla\cdot(\gamma_5\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\alpha_3(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + 2\alpha_4\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^* + \mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon} + \mu_0\mathbf{m}\times\boldsymbol{\eta}$$

$$\rho\gamma = \frac{1}{T}\varkappa_1(\nabla T)^2 + \alpha_1(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + \gamma_1(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})^2 + 4\gamma_3\mathbf{b}^2 + h_1(\rho\mu_0\boldsymbol{\mu}^*)^2 + l_1(\rho\pi^*)^2 +$$
$$+ \sigma_1\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \alpha_3(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega})^2 + 2\varkappa_4\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\nabla T + 4\gamma_4\rho\boldsymbol{\pi}^*\cdot\mathbf{b} +$$
$$+ 2\alpha_2(\nabla\mathbf{v})^d\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^d + 2\gamma_2(\nabla\boldsymbol{\omega})^d\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^d \tag{2.21}$$

Из условия положительности квадратичного по термодинамическим силам выражения для производства энтропии (2.21) имеем следующие ограничения на феноменологические коэффициенты:

$$\alpha_1,\ \gamma_1,\ \alpha_2,\ \gamma_2,\ h_1,\ \alpha_3,\ \gamma_3,\ \varkappa_1,\ \sigma_1,\ l_1 \geqslant 0,\ \varkappa_4{}^2 \leqslant \sigma_1\varkappa_1,\ 2\gamma_4{}^2 \leqslant l_1\gamma_3 \tag{2.22}$$

Члены с коэффициентами $\alpha_4, \varkappa_2, \gamma_5, \varkappa_3, l_2$, характеризующие перекрестные эффекты между термодинамическими силами различной четности относительно времени, не вносят вклада в производство энтропии, поэтому знаки у этих коэффициентов остаются неопределенными.

Система уравнений (1.1), (1.6), (2.16), (2.21) описывает движение неизотермической электропроводной поляризуемой и намагничиваемой жидкости с внутренним вращением частиц, с учетом явлений электрической и магнитной релаксации. Отметим, что система уравнений (1.1), (1.6), (2.16), (2.21) относительно неизвестных ρ, η, p, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, T незамкнута. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо воспользоваться уравнениями состояния (2.8), (2.11), которые связывают переменные ρ, η, p, $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$, T. Если, например, предположить [13], что свободная энергия является линейной функцией переменных J_1 и J_2 с коэффициентами $^1/_2\,(\rho\varepsilon_0\chi)^{-1}$ и $\mu_0\,(2\rho K)^{-1}$ соответственно, то из (2.11) будем иметь для векторов напряженности локального электрического и локального магнитного поля выражения ${}_E\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0\chi)^{-1}\,\mathbf{p}$, ${}_E\boldsymbol{\eta} = K^{-1}\mathbf{m}$, которые замыкают систему по переменным $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$. В этом случае определяющее уравнение (2.20), описывающее изменение вектора намагниченности со временем, можно рассматривать как гидродинамическое обобщение модифицированного уравнения Блоха [7] (с одним временем релаксации, равным $K\,/\,r_1$). Определяющее уравнение (2.20) для вектора поляризации описывает среду типа диэлектрической среды Фойхта [8]. Если в определяющем уравнении Фойхта [8] пренебречь инерционным вкладом в изменение поляризации, то уравнение (2.20) можно рассматривать как гидродинамическое обобщение уравнения Фойхта.

Отметим, что если в уравнениях (1.1), (1.6), (2.16), (2.21) пренебречь величинами $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$, $\partial \mathbf{e} / \partial t$, $\mathbf{v} \times \varepsilon_0 \mathbf{e}$, то получим систему уравнений, описывающих проводящую жидкость модели Грэда в приближении магнитной гидродинамики [16]. Рассматриваемая модель жидкости характеризуется механоэлектрическим, термомеханическим, термоэлектрическим перекрестными эффектами.

При отсутствии взаимодействия электромагнитного поля с материальной средой описываемая модель совпадает с неизотермической моделью Грэда [2]. В случае, когда можно пренебречь величинами $\mathbf{p} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{m} \times \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{i}$, $\partial \mu_0 \mathbf{h} / \partial t$, $\partial \mathbf{e} / \partial t$, $\mathbf{v} \times \varepsilon_0 \mathbf{e}$, $\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{h}$ и отсутствуют явления диэлектрической и парамагнитной релаксации, описываемая модель совпадает с моделью работы [3].

Поступила 29 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. О неизотермической модели несимметричных жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
3. Neuringer J. L., Rosensweig R. E., Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids 1964, vol. 7, No. 12.
4. Шлиомис М. И. Об уравнениях движения жидкости с гиромагнитными свойствами. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 3.
5. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. УМН, 1965, т. 20, вып. 5 (125).
6. Eringen A. C. A unified theory of thermomechanical materials. Internat. J. Engng Sci., 1966, vol. 4, No. 2. (Рус. перев.: Эринген А. К. Единая теория термомеханических материалов. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 1).
7. Ферромагнитный резонанс. М., Физматгиз, 1961.
8. Toupin R. A., A dynamical theory of elastic dielectrics. Internat. Engng Sci. 1963, vol. 1, No. 1.
9. Fano R. M., Chu L. J., Adler R. B. Electromagnetic fieds, energy and forces. New York — Weley, 1960.
10. Лагалли М. Векторное исчисление. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии, 1936.
11. Chu L. J., Haus H. A., Penfield P., Jr. The force density in polarizable and magnetizable fluids. Proc. IEEE, 1966, vol. 54, No. 7.
12. Groot S. R., Mazur P. Non-equilibrum thermodynamics, Amsterdam, North Holland Publ. Comp., 1962. (Рус. перев.: Гротт С. Р. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.)
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
14. Eringen A. C. Nonlinear theory of continuous media. N. Y., MC Graw — Hill, 1962.
15. Mc Connel A. J., Application of tensor analysis. N. Y., Dover Publ., 1957. (Рус. перев.: Мак-Коннел А. Д. Введение в тензорный анализ. М., Физматгиз, 1963.)
16. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.