

УДК 539.3

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ СВОЙСТВ СФЕРОПЛАСТИКОВ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

А. А. Паньков

Пермский государственный технический университет, 614600 Пермь

Представлено решение обобщенным методом самосогласования задачи прогнозирования эффективных упругих свойств композитов с заданными случайными расположением и вариацией радиуса сферических включений. Задача сведена к решению осредненной краевой задачи теории упругости для одиночного включения с неоднородным переходным слоем в среде с искомыми эффективными упругими свойствами. Приведен численный расчет эффективных упругих свойств композита с жесткими сферическими включениями и композита со сферическими порами. Результаты сравниваются с известным решением для периодической структуры и решениями традиционных методов самосогласования.

Введение. Эффективные физико-механические свойства композитов обуславливаются сложным взаимодействием большого числа элементов, составляющих структуру материала. Нерегулярный характер реальных структур требует решения задач прогнозирования эффективных физико-механических свойств композитов в статистической постановке. В [1, 2] возможности обобщенного метода самосогласования проиллюстрированы на примере прогнозирования эффективных упругих свойств однонаправленных волокнистых композитов. Рассмотрим применение этого метода для композитов со случайными структурами из сферических включений.

Обобщенный метод самосогласования. Пусть случайная структура композита обладает свойствами однородности и эргодичности [3–5] и задана характерной реализацией в некоторой области V с границей Γ . Все включения имеют одинаковые упругие свойства, геометрическую форму и ориентацию в пространстве. Выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях. Статистический разброс имеется лишь во взаимном расположении и размерах включений, а также в коэффициентах подобия α . Поле тензора упругих свойств $C(\mathbf{r})$ в области V допускает представление

$$C_{ijmn}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r})C_{ijmn}^F + (1 - \omega(\mathbf{r}))C_{ijmn}^M$$

через индикаторную функцию включений

$$\omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_F, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_F, \end{cases} \quad (1)$$

где V_F — область включений в области V ; упругие свойства включений и матрицы однородны и заданы соответственно через тензоры упругих свойств C^F и C^M .

Обобщенный метод самосогласования [1, 2] позволяет свести задачу прогнозирования тензора эффективных упругих свойств C^* композита, которая заключается в решении краевой задачи теории упругости для микронеоднородной области V [3–6]

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \left(C_{ijmn}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_n} u_m(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (2)$$

(например, относительно поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ при граничных условиях вида $u_{i;\Gamma} = \varepsilon_{ij}^* r_j$), к решению более простой осредненной задачи

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ijmn}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \bar{u}_m(\xi) \right) = 0 \tag{3}$$

при заданных на достаточном удалении от начала координат ξ значениях перемещений $\bar{u}_i = \varepsilon_{ij}^* \xi_j$. Здесь ε^* — заданный тензор однородной малой упругой макродеформации композита; координатные оси ξ_i ориентированы вдоль осей r_i . Формально связь действительного $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и осредненного $\bar{\mathbf{u}}(\xi)$ полей краевых задач (2), (3) осуществляется через осреднение вида

$$u_i(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^{\beta-1} (u_i(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)}\xi) - u_i(\mathbf{r}_{(k)})).$$

Здесь N — число включений в характерной области $\Omega \subset V$ на достаточном удалении от границы Γ ; $\mathbf{r}_{(k)}$ — радиус-векторы центра k -го включения в области Ω ; $\alpha_{(k)}$ — коэффициент подобия k -го включения, заданный относительно размеров формального включения v осредненной задачи, объем которого $|v| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |v_{(k)}|$, где $|v_{(k)}|$ — объем k -го включения; показатель степени β зависит от размерности задачи и равен 1, 2 или 3 для слоистого, однонаправленного волокнистого или гранулированного композитов соответственно.

Поле упругих свойств осредненной задачи (3)

$$a_{ijmn}(\xi) = \left[\frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - v_F} C_{ijgh}^M + \left(\frac{\bar{\omega}(\xi)}{v_F} C_{ijqp}^F - \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - v_F} C_{ijqp}^M \right) S_{qpdb}^{-1} (C_{dbgh}^* - C_{dbgh}^M) \right] k_{ghmn}^{-1}(\xi) \tag{4}$$

учитывает ближний порядок взаимного расположения и вариации размеров включений через специальную осредненную индикаторную функцию

$$\bar{\omega}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^\beta \omega(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)}\xi),$$

вычисляемую по заданному полю индикаторной функции $\omega(\mathbf{r})$ (см. (1)) композита. В формуле (4) $k^{-1}(\xi)$ — тензорное поле, обратное полю

$$k_{ijmn}(\xi) = \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - v_F} E_{ijmn} + \frac{\bar{\omega}(\xi) - v_F}{v_F(1 - v_F)} S_{ijdb}^{-1} (C_{dbmn}^* - C_{dbmn}^M),$$

где E — единичный тензор; S^{-1} — тензор, обратный тензору разности $S \equiv C^F - C^M$; v_F — относительное объемное содержание включений в композите.

Когда C^F и C^M изотропные, а C^* — также изотропный или трансверсально-изотропный тензор, поле $a(\xi)$ будет соответственно изотропным или трансверсально-изотропным в каждой точке ξ . Объемный модуль $K_a(\xi)$ и модуль сдвига $G_a(\xi)$ для случая изотропного поля $a(\xi)$ или соответственно объемный модуль плоской деформации $k_{a12}(\xi)$ и модуль сдвига $G_{a12}(\xi)$ в плоскости изотропии, например $\xi_1 \bar{O} \xi_2$, для случая трансверсально-изотропного поля $a(\xi)$ могут быть определены на основе формулы (4) по единой зависимости вида

$$L_a(\xi) = L_M \frac{\beta(\xi) + \left(\frac{L_F}{L_M} \alpha(\xi) - \beta(\xi) \right) \gamma_L}{\beta(\xi) + (\alpha(\xi) - \beta(\xi)) \gamma_L}, \tag{5}$$

где

$$\alpha(\xi) = \frac{\bar{\omega}(\xi)}{v_F}, \quad \beta(\xi) = \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - v_F}, \quad \gamma_L = \frac{L^* - L_M}{L_F - L_M}. \tag{6}$$

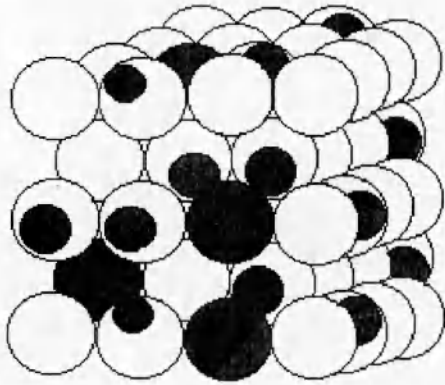


Рис. 1

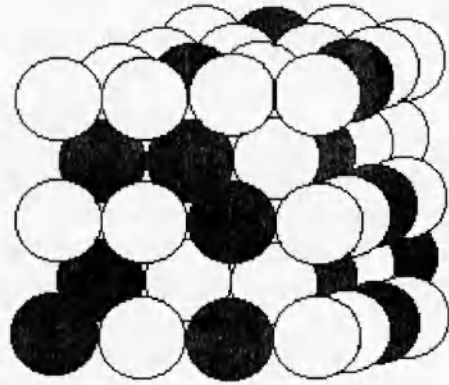


Рис. 2

Символ L в формулах (5), (6) надо последовательно заменить соответственно на K , G или k_{12} и G_{12} . Для произвольного трансверсально-изотропного тензора упругих свойств C с плоскостью изотропии $\xi_1 O \xi_2$ существуют зависимости $k_{12} = (1/2)(C_{1111} + C_{1122})$, $G_{12} = C_{1212}$.

Таким образом, из решения вспомогательной осредненной задачи (3), (4) для поля перемещений $\bar{u}_i(\xi) \equiv \bar{U}_{imn}(\xi)\varepsilon_{mn}^*$ может быть определен тензор $\bar{U}^F(C^*)$ как функция от C^* , компоненты которого имеют вид

$$U_{ijmn}^F = \frac{1}{|v|} \int_v \frac{\partial}{\partial \xi_i} \bar{U}_{imn}(\xi) dv.$$

Решением уравнения $C_{jmn}^* = C_{jmn}^M + v_F(C_{ijdb}^F - C_{ijdb}^M)\bar{U}_{dbmn}^F(C^*)$ будет искомым тензор эффективных упругих свойств C^* композита со случайной структурой.

Численный расчет. Рассмотрим результаты численного расчета и сравним их с известными вычислениями [4–7] эффективных изотропных упругих свойств композитов на основе двух типов пространственных квазипериодических моделей реальных случайных структур из сферических включений. Модели случайных структур (рис. 1, 2) основаны на гексагональной плотноупакованной укладке сферических ячеек; вероятность появления свободных от включений ячеек рассчитывалась через заданную величину относительного объемного содержания включений v_F в композите при минимальной гарантированной толщине прослойки между ними, составляющей 2% от радиуса ячейки. Для модели 1-го типа (рис. 1) дополнительно задавали коэффициент вариации, равный, например, 0,1 для α (α — коэффициент подобия размеров включений), и случайные максимально возможные по величине и без преобладающих ориентаций смещения включений внутри ячеек. В модели 2-го типа (рис. 2) все включения были одинаковых размеров и не имели смещений внутри ячеек. Максимальные размеры включений обеих моделей и размеры сферических ячеек были одинаковы.

В расчетной схеме осредненной задачи решаются две задачи о сферическом включении v , в центре которого расположено начало координат ξ , и окруженном неоднородным по переменной $\xi \equiv |\xi|$, но изотропным в каждой точке сферическим переходным слоем с полем упругих свойств $a(\xi)$ и однородной изотропной средой с тензором упругих свойств C^* при следующих простых условиях нагружения среды на бесконечности: 1) всестороннее растяжение; 2) сдвиг, например, в плоскости $\xi_1 O \xi_2$. При совместном решении этих задач можно определить эффективные объемный модуль K^* и модуль сдвига G^* композита.

Тип модели	$\nu_F = 0,2$		$\nu_F = 0,3$		$\nu_F = 0,4$		$\nu_F = 0,5$		$\nu_F = 0,6$	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
$k^{(1)}$	1,313	0,456	1,533	0,328	1,796	0,250	2,113	0,197	—	—
$k^{(2)}$	1,329	0,423	1,586	0,280	1,938	0,188	2,397	0,131	2,948	0,097
$k_R = k_1 = k_-$	1,306	—	1,521	—	1,804	—	2,191	—	2,754	—
$k_R = k_1 = k_+$	—	0,471	—	0,342	—	0,250	—	0,182	—	0,129
k_2	1,355	0,378	1,702	0,203	2,436	0,082	4,507	—	8,991	—
k_+	4,688	—	6,846	—	9,264	—	11,991	—	15,092	—
$g^{(1)}$	1,614	0,671	2,092	0,536	2,681	0,428	3,401	0,343	—	—
$g^{(2)}$	1,676	0,652	2,303	0,495	3,266	0,361	4,610	0,258	6,312	0,184
g_R	1,483	0,690	1,827	0,565	2,282	0,455	2,914	0,357	3,848	0,270
g_1	1,591	0,678	2,078	0,539	2,794	0,414	3,863	0,305	5,504	0,215
g_2	1,751	0,627	2,680	0,429	4,980	0,221	12,177	—	28,203	—
g_-	1,549	—	1,938	—	2,453	—	3,166	—	4,218	—
g_+	13,950	0,690	21,556	0,565	30,102	0,455	39,775	0,357	50,813	0,270

Примечание. I — $E_F = 100E_M$, $\nu_F = 0,2$; II — $E_F = 0$, $\nu_F = 0$.

При численном решении переходный сферический слой толщиной $7r_F$ (r_F — радиус центрального включения v) разбивался на 50 тонких слоев и в пределах каждого слоя упругие свойства считались однородными и изотропными. Общие решения для полей деформирования каждого тонкого слоя известны [7], и условия идеального контакта этих слоев позволяют перейти к решению системы линейных алгебраических уравнений ленточного типа относительно искомых коэффициентов.

Результаты численного прогнозирования обобщенным методом самосогласования нормированных эффективных объемного модуля $k = K^*/K_M$ и модуля сдвига $g = G^*/G_M$ (K_M и G_M — объемный модуль и модуль сдвига матрицы) обеих моделей случайных структур представлены в первых двух строках таблицы с верхними индексами (1) и (2). Расчеты проводились при следующих значениях модуля Юнга и коэффициента Пуассона изотропных упругих свойств включений: $E_F = 100E_M$, $\nu_F = 0,2$; $E_F = 0$, $\nu_F = 0$. В обоих случаях модуль Юнга $E_M = 3,75$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_M = 0,4$ для изотропной эпоксидной матрицы; с индексом R представлены решения Г. А. Ванина [4] в первом приближении для периодической структуры; нижними индексами 1 и 2 обозначены решения обобщенным методом самосогласования на основе кусочно-постоянных аппроксимаций:

$$1) \quad \bar{\omega}(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq r_F, \\ 0, & r_F < \xi \leq r_0, \\ \nu_F, & \xi > r_0; \end{cases} \quad 2) \quad \bar{\omega}(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq r_F, \\ \nu_F, & \xi > r_F \end{cases} \quad (7)$$

осредненной индикаторной функции $\bar{\omega}(\xi)$, где величина r_0 определяется из равенства $(r_F/r_0)^3 = \nu_F$; индексами «-», «+» обозначены граничные значения Хашина — Штрикмана для макроизотропной двухфазной среды [5–7]. Для композита со сферическими порами выполняется равенство $k_- = g = 0$. Решения для k_1 , g_1 и k_2 , g_2 на основе кусочно-постоянных аппроксимаций (7) тождественны решениям, полученным известными методами самосогласования [5–7].

Заключение. Таким образом, представленный обобщенный метод самосогласования позволяет свести задачу прогнозирования эффективных упругих свойств композитов со

случайными пространственными структурами к решению более простой осредненной задачи о включении с переходным слоем в среде с искомыми эффективными упругими свойствами. Характерный размер переходного слоя определяется радиусом корреляции случайной структуры, а его упругие свойства учитывают ближний порядок взаимного расположения включений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Паньков А. А.** Прогнозирование эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами обобщенным методом самосогласования // *Вестн. Перм. техн. ун-та. Механика.* 1995. № 2. С. 33–40.
2. **Паньков А. А.** Анализ эффективных упругих свойств однонаправленного волокнистого боропластика обобщенным методом самосогласования // *Механика композит. материалов.* 1996. № 6. С. 747–758.
3. **Соколкин Ю. В., Вотинов А. М., Ташкинов А. А. и др.** Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций. М.: Наука, 1996.
4. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985.
5. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
6. **Композиционные материалы:** В 8 т. Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. М.: Мир, 1978.
7. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 8/VII 1997 г.
