

ний на внешней и внутренней границах соответственно. Для качественного анализа характера поведения амплитуд возмущений, подставляя в (9) и (11) соответственно $b_n(t) = Z_n(t)R_{01}(0)/R_{01}(t)$ и $a_n(t) = U_n(t) \times R_{02}(0)/R_{02}(t)$, получим

$$\ddot{Z}_n + I_1 Z_n = 0 \text{ и } \ddot{U}_n + I_2 U_n = 0.$$

Инварианты этих уравнений имеют вид

$$I_1 = -\frac{\pi}{R_{01}^2} \left[\dot{R}_{01}^2 - \frac{(n^2 - 1)}{\rho R_{01}} \sigma \right], \quad I_2 = \frac{\pi}{R_{02}^2} \left[\dot{R}_{02}^2 + \frac{(n^2 - 1)}{\rho R_{02}} \sigma \right],$$

где $\dot{R}_{01}^2(t)$, $\dot{R}_{02}^2(t)$ можно получить, интегрируя (8), (10). Из известных теорем сравнения следует, что при $I_2 > 0$ $a_n(t)$ осциллирует в процессе расширения кольца, а $b_n(t)$ экспоненциально возрастает до тех пор, пока $I_1 < 0$, т. е. $\dot{R}_{01}^2 > (n^2 - 1)\sigma/(\rho R_{01})$. Из последнего неравенства следует, что, поскольку n характеризует частоту возмущения, то верхний частотный предел спектра экспоненциально возрастающих возмущений имеет вид

$$(12) \quad n < \sqrt{1 + \frac{\rho R_{01} \dot{R}_{01}^2}{\sigma}} = \sqrt{1 + 4 \frac{\rho \dot{R}_{01}^2(0)/2}{2\sigma/R_{01}(0)} \frac{2\pi R_{01}(t) \rho \dot{R}_{01}^2(t)/2}{2\pi R_{01}(0) \rho \dot{R}_{01}^2(0)/2}} \approx \\ \approx \sqrt{4We \frac{E(t)}{E(0)}} = \sqrt{4We \bar{E}(t)},$$

где $\bar{E}(t)$ — безразмерная кинетическая энергия поверхностного слоя жидкости единичной толщины.

Критерий (12) можно переписать в виде $n < n^* = (4We \bar{E}(t))^{1/2}$, где n^* — верхняя предельная частота экспоненциально развивающихся начальных возмущений на внешней поверхности расширяющегося кольца идеальной несжимаемой жидкости. Правая часть этого неравенства с точностью до плотности среды и показателя степени совпадает с эмпирическим параметром $W(t)$, определяющим частотную характеристику возмущений, развивающихся на внешней поверхности расширяющегося газожидкостного кольца.

Таким образом, в обоих случаях частотные характеристики развивающихся начальных возмущений зависят от произведения начального значения числа Вебера для расширяющегося кольца на текущее значение удельной кинетической энергии поверхностного слоя кольца единичной толщины.

Поступила 17 XI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце. — ПМТФ, 1964, № 2.

УДК 533.6.011

ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

В. Г. Черняк

(Свердловск)

Введение. Результаты исследований по движению бинарных смесей разреженных газов в каналах, полученные на основе решения кинетических уравнений и опубликованные в последнее десятилетие, кратко анализируются в [1]. При общей оценке всех этих работ следует отметить два существенных ограничения.

В части работ результаты получены в низших приближениях моментного метода и справедливы лишь при малых значениях числа Кнудсена (Кн). Поэтому обсуждения

сводились фактически к анализу уравнений гидродинамического типа и диффузионно-скольжения. Кроме того, сходимость самого моментного метода должна проверяться заново для каждой конкретной задачи.

Отдельные попытки описать изотермическое движение газовых смесей в каналах при произвольных значениях Kn были основаны на решении модельного кинетического уравнения БГК с интегралом столкновений в форме Гамеля. Однако известно, что это уравнение дает неверное описание макроскопических характеристик при переходе к диффузионному приближению ($Kn \ll 1$). Действительно, модель Гамеля содержит лишь три независимых свободных параметра. Но даже в простейшем случае изотермического движения бинарной газовой смеси необходимы точные (по теории Чепмена — Энскога) значения пяти коэффициентов переноса: коэффициентов вязкости для каждого компонента и смеси в целом, а также коэффициентов взаимной диффузии и бародиффузии. В случае неоднородной температуры газа модель Гамеля принципиально не может быть использована, так как не описывает явление термодиффузии. Таким образом, полученные результаты носят скорее качественный характер.

Цель данной работы — описание движения бинарной газовой смеси в цилиндрическом капилляре под действием градиентов полного давления, концентрации и температуры при произвольных значениях Kn . В основу расчета положено аппроксимирующее кинетическое уравнение третьего порядка [2], обеспечивающее точное описание системы в диффузионном приближении и допускающее использование произвольного потенциала межмолекулярного взаимодействия.

Постановка задачи. Рассмотрим стационарное движение бинарной газовой смеси в цилиндрическом капилляре радиуса R под действием градиентов давления, концентрации и температуры, направленных вдоль оси z . Пусть температуры компонентов равны между собой в любой точке, но изменяются вдоль канала. Предполагается, что капилляр достаточно длинный, и концевыми эффектами можно пренебречь. Тогда функции распределения для молекул каждого сорта при слабой неоднородности полного давления p , температуры T и мольной концентрации y_i записываются в виде

$$(1) \quad f_i = f_{i0} \left[1 + \frac{z}{p} \frac{dp}{dz} + \frac{z}{y_i} \frac{dy_i}{dz} + \left(c_i^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{z}{T} \frac{dT}{dz} + h_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i) \right],$$

$$\text{где } f_{i0} = n_{i0} \left(\frac{m_i}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp(-c_i^2); \quad \mathbf{c}_i = \left(\frac{m_i}{2kT_0} \right)^{1/2} \mathbf{v}_i;$$

n_i, m_i — соответственно числовая плотность и масса молекул i -го сорта; \mathbf{v}_i — вектор скорости молекул; \mathbf{r} — двумерный радиус-вектор в поперечном сечении капилляра.

Пусть функция возмущения h_i для молекул i -го компонента подчиняется аппроксимирующему кинетическому уравнению 3-го порядка [2], которое записывается в безразмерном виде

$$(2) \quad \zeta_i \frac{\partial h_i}{\partial z} + c_{iz} [v + \mu_i + (c_i^2 - 5/2) \tau] = \\ = R_i \left\{ -h_i + 2c_{iz} \left[u_i - \varphi_{ij}^{(1)} \left(u_i - \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{1/2} u_j \right) - \varphi_{ij}^{(2)} \left(H_i - \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{3/2} H_j \right) \right] + \right. \\ \left. + 4c_{ir} c_{iz} \left[(\gamma_{ij}^* - \varphi_{ij}^{(3)}) p_{irz} + \varphi_{ij}^{(4)} p_{jrz} \right] + \frac{8}{5} c_{iz} \left(c_i^2 - \frac{5}{2} \right) \left[\left(1 - \varphi_{ii}^{(5)} + \varphi_{ii}^{(6)} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \varphi_{ij}^{(5)} \right) H_i + \varphi_{ij}^{(6)} H_j - \frac{5}{8} \varphi_{ij}^{(2)} \left(u_i - \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{1/2} u_j \right) \right] \right\},$$

$$(i, j) = 1, 2; \quad i \neq j,$$

где

$$(3) \quad u_i = \left(\frac{m_i}{2kT_0} \right)^{1/2} U_i = \pi^{-3/2} \int c_{iz} \exp(-c_i^2) h_i d\mathbf{c}_i;$$

$$p_{irz} = \frac{P_{irz}}{2p_i} = \pi^{-3/2} \int c_{ir} c_{iz} \exp(-c_i^2) h_i d\mathbf{c}_i;$$

$$H_i = \left(\frac{m_i}{2kT_0} \right)^{1/2} \frac{1}{2p_i} \left(q_i - \frac{5}{2} \frac{kT_0}{m_i} J_i \right) = \frac{1}{2} \pi^{-3/2} \int c_{iz} \left(c_i^2 - \frac{5}{2} \right) \exp(-c_i^2) h_i d\mathbf{c}_i;$$

$$\zeta_i^2 = c_i^2 - c_{iz}^2; \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{R}; \quad R_i = (\gamma_{ii} + \gamma_{ij}) \left(\frac{m_i}{2kT_0} \right)^{1/2} R;$$

$$\nu = \frac{R}{p} \frac{dp}{dz}; \quad \tau = \frac{R}{T} \frac{dT}{dz}; \quad \mu_i = \frac{R}{y_i} \frac{dy_i}{dz};$$

$$\varphi_{ij}^{(n)} = \frac{v_{ij}^{(n)}}{\gamma_{ii} + \gamma_{ij}}; \quad \varphi_{ii}^{(n)} = \frac{v_{ii}^{(n)}}{\gamma_{ii} + \gamma_{ij}}; \quad \gamma_{ij}^* = \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{ii} + \gamma_{ij}};$$

U_i — макроскопическая скорость молекул i -го сорта; p_i и P_{irz} — парциальное давление и тензор касательных напряжений; q_i и J_i — тепловой и диффузионный потоки i -го компонента; γ_{ii} и γ_{ij} — соответственно частоты столкновений между одинаковыми и различными молекулами ($i \neq j$); R_i — параметр разреженности газа, связанный обратно пропорциональной зависимостью с числом Кнудсена; $v_{ij}^{(n)}$ — величины, зависящие от молекулярных весов компонентов, концентрации и параметров межмолекулярного взаимодействия [2].

Предполагается, что в любой точке поверхности канала молекулы каждого сорта рассеиваются полностью диффузно по максвелловскому закону с локальными значениями парциальной плотности и температуры. Тогда граничные условия к уравнениям (1) записываются в виде

$$(4) \quad h_i(x = 1, \mathbf{c}_i) = 0, \quad (\mathbf{c}_i, \mathbf{n}) > 0,$$

где \mathbf{n} — нормаль к стенке канала.

Основные уравнения. Задача (2)–(4) может быть сведена к замкнутой системе интегрально-моментных уравнений. Для этого необходимо уравнение (2) записать в интегральной форме с учетом граничного условия (4) и воспользоваться определениями (3). В результате имеем

$$(5) \quad u_i = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{dx'}{|x-x'|} [(\nu + \mu_i) I_0 + \tau (I_2 - I_0)] +$$

$$+ \frac{R_i}{\pi} \int \frac{dx'}{|x-x'|} \left\{ \left[(1 - \varphi_{ij}^{(1)}) I_0 - \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_2 - I_0) \right] u_i + \right.$$

$$+ \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{1/2} \left[\varphi_{ij}^{(1)} I_0 + \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_2 - I_0) \right] u_j + 2\Omega_n [(\gamma_{ij}^* - \varphi_{ij}^{(3)}) P_{irz} +$$

$$+ \varphi_{ij}^{(4)} P_{jrz}] I_1 + \left[-\varphi_{ij}^{(2)} I_0 + \frac{4}{5} (1 - \varphi_{ii}^{(5)} + \varphi_{ii}^{(6)} - \varphi_{ij}^{(5)}) (I_2 - I_0) \right] H_i +$$

$$+ \left[\left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{3/2} \varphi_{ij}^{(2)} I_0 + \frac{4}{5} \varphi_{ij}^{(6)} (I_2 - I_0) \right] H_j \Big\},$$

$$P_{irz} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\Omega_n dx'}{|x-x'|} [(\nu + \mu_i) I_1 + \tau (I_3 - I_1)] +$$

$$+ \frac{R_i}{\pi} \int \frac{\Omega_n dx'}{|x-x'|} \left\{ \left[(1 - \varphi_{ij}^{(1)}) I_1 - \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_3 - I_1) \right] u_i + \right.$$

$$+ \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{1/2} \left[\varphi_{ij}^{(1)} I_1 + \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_3 - I_1) \right] u_j + 2\Omega_n [(\gamma_{ij}^* - \varphi_{ij}^{(3)}) P_{irz} +$$

$$+ \varphi_{ij}^{(4)} P_{jrz}] I_2 + \left[-\varphi_{ij}^{(2)} I_1 + \frac{4}{5} (1 - \varphi_{ii}^{(5)} + \varphi_{ii}^{(6)} - \varphi_{ij}^{(5)}) (I_3 - I_1) \right] H_i +$$

$$+ \left[\left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{3/2} \varphi_{ij}^{(2)} I_1 + \frac{4}{5} \varphi_{ij}^{(6)} (I_3 - I_1) \right] H_j \Big\},$$

$$H_i = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dx'}{|x-x'|} \left[(\nu + \mu_i) (I_2 - I_0) + \tau (I_4 - 2I_2 + \frac{5}{2} I_0) \right] +$$

$$+ \frac{R_i}{2\pi} \int \frac{dx'}{|x-x'|} \left\{ \left[(1 - \varphi_{ij}^{(1)}) (I_2 - I_0) - \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_4 - 2I_2 + \frac{5}{2} I_0) \right] u_i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{1/2} \left[\varphi_{ij}^{(1)} (I_2 - I_0) + \frac{1}{2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_4 - 2I_2 + \frac{5}{2} I_0) \right] u_j + \\
& + 2\Omega_n \left[(\gamma_{ij}^* - \varphi_{ij}^{(3)}) p_{irz} + \varphi_{ij}^{(4)} p_{jrz} \right] (I_3 - I_1) + \left[-\varphi_{ij}^{(2)} (I_2 - I_0) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{5} (1 - \varphi_{ii}^{(5)} + \varphi_{ii}^{(6)} - \varphi_{ij}^{(5)}) (I_4 - 2I_2 + \frac{5}{2} I_0) \right] H_i + \\
& + \left[\left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{3/2} \varphi_{ij}^{(2)} (I_2 - I_0) + \frac{4}{5} \varphi_{ij}^{(6)} (I_4 - 2I_2 + \frac{5}{2} I_0) \right] H_j \Big\}, \\
I_n(t) &= \int_0^\infty s^n \exp \left(-s^2 - \frac{t}{s} \right) ds, \quad \Omega = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},
\end{aligned}$$

аргументом функций I_n является $(R_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, Ω_n — проекция вектора Ω на нормаль к поверхности канала.

Из структуры свободных членов линейных интегральных уравнений (5) следует, что решение системы имеет вид

$$\begin{aligned}
(6) \quad u_i &= u_i^{(p)} \nu + u_i^{(c)} \mu_i + u_i^{(T)} \tau, \\
p_{irz} &= p_{irz}^{(p)} \nu + p_{irz}^{(c)} \mu_i + p_{irz}^{(T)} \tau, \quad H_i = H_i^{(p)} \nu + H_i^{(c)} \mu_i + H_i^{(T)} \tau.
\end{aligned}$$

Подстановка выражений (6) в уравнения (5) и приравнивание членов при одинаковых градиентах приводит к расщеплению (5) на три независимые системы, которые описывают локальные значения величин $u_i^{(k)}$, $p_{irz}^{(k)}$, $H_i^{(k)}$ ($k = p, c, T$). Однако в конечном итоге практический интерес представляют усредненные по сечению капилляра величины:

$$\begin{aligned}
(7) \quad Q &= p \left(\frac{2kT_0}{m_1} \right)^{1/2} \left(l_{11} \frac{d \ln T}{dz} + l_{12} \frac{dy}{dz} + l_{13} \frac{d \ln p}{dz} \right), \\
\langle U_1 \rangle - \langle U_2 \rangle &= \left(\frac{2kT_0}{m_1} \right)^{1/2} \left(l_{21} \frac{d \ln T}{dz} + l_{22} \frac{dy}{dz} + l_{23} \frac{d \ln p}{dz} \right), \\
\omega &= y \langle U_1 \rangle + (1 - y) \langle U_2 \rangle = \left(\frac{2kT_0}{m_1} \right)^{1/2} \left(l_{31} \frac{d \ln T}{dz} + l_{32} \frac{dy}{dz} + l_{33} \frac{d \ln p}{dz} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(8) \quad l_{11} &= 2 \left[y \langle H_1^{(T)} \rangle + (1 - y) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle H_2^{(T)} \rangle \right]; \\
l_{12} &= 2 \left[\langle H_1^{(c)} \rangle - \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle H_2^{(c)} \rangle \right]; \\
l_{13} &= 2 \left[y \langle H_1^{(p)} \rangle + (1 - y) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle H_2^{(p)} \rangle \right]; \quad l_{21} = \langle U_1^{(T)} \rangle - \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle U_2^{(T)} \rangle; \\
l_{22} &= \frac{1}{y} \langle U_1^{(c)} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - y} \langle U_2^{(c)} \rangle; \quad l_{23} = \langle U_1^{(p)} \rangle - \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle U_2^{(p)} \rangle; \\
l_{31} &= y \langle U_1^{(T)} \rangle + (1 - y) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle U_2^{(T)} \rangle; \quad l_{32} = \langle U_1^{(c)} \rangle - \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle U_2^{(c)} \rangle; \\
l_{33} &= y \langle U_1^{(p)} \rangle + (1 - y) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \langle U_2^{(p)} \rangle; \quad y = y_1;
\end{aligned}$$

угловые скобки обозначают усреднение по площади поперечного сечения канала; величины l_{11} , l_{12} , l_{13} связаны с потоком тепла вдоль капилляра под действием градиентов температуры, концентрации и давления; l_{21} , l_{22} , l_{23} характеризуют термодиффузию, обычную диффузию, обусловленную неоднородностью концентраций компонентов, и бародиффузию;

l_{31}, l_{32}, l_{33} характеризуют тепловой крип, среднечисловой поток газа под действием градиентов концентрации и пуазейлевский поток бинарной газовой смеси.

В общем случае все величины $l_{\alpha\beta}$ зависят от закона взаимодействия молекул между собой и с граничной поверхностью, геометрии канала, концентраций, соотношения молекулярных весов компонентов и числа Кнудсена.

Следует отметить, что в термодинамике необратимых процессов для прерывных систем [3] приводятся выражения, аналогичные (7), и постулируются соотношения взаимности $l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha} (\alpha \neq \beta)$. Представляет интерес проверка этих соотношений на основе кинетической теории в рамках сделанных выше предположений при произвольных значениях Кн.

Метод решения. При выборе той или иной приближенной процедуры для решения системы (5) следует учитывать два фактора: во-первых, уравнения (5) являются линейными фредгольмовскими интегральными уравнениями 2-го рода, во-вторых, практический интерес представляют не профили потоков движущегося газа, а усредненные по сечению капилляра величины (8). Из последнего следует, что приближенный метод должен сходиться в среднем. Таким требованиям удовлетворяет метод Галеркина, хорошо показавший себя при описании движения однокомпонентного газа в каналах [4, 5]. Для реализации этого метода необходимо задать систему базовых функций. Из симметрии задачи следует, что в N -приближении может быть принята следующая аппроксимация:

$$(9) \quad u_i^{(N)} = \sum_{k=0}^N A_i^{(k)} x^{2k}, \quad p_{irz}^{(N)} = \sum_{k=1}^N B_i^{(k)} x^{2k-1}, \quad H_i^{(N)} = \sum_{k=1}^N C_i^{(k)} x^{2k-2}$$

$$i = 1, 2.$$

Чтобы определить коэффициенты разложения, необходимо подставить соотношения (9) в уравнения (5) и потребовать ортогональность полученных выражений к каждой из базовых функций. При этом условие ортогональности для двух произвольных функций f и g имеет вид

$$(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x) dx = 0.$$

В результате получаем систему из $6N + 2$ линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}$.

Решение задачи о движении однокомпонентного газа в каналах [4, 5] показало, что при аппроксимации (9) метод Галеркина сходится очень быстро. Уже в первом приближении ($N = 1$) полученные результаты отличаются не более чем на 1,5% от эталонного решения при любых значениях Кн. По-видимому, такую же сходимость следует ожидать и в задаче о движении газовых смесей. Действительно, первое приближение аппроксимации (9) точно описывает профили потоков при $Kn \ll 1$, в то время как информация о величине потоков при почти свободномолекулярном режиме движения газа ($Kn \gg 1$) полностью содержится в свободных членах интегрально-моментных уравнений (5). В данной работе использовалось только первое приближение аппроксимации (9). Формализм метода Галеркина для этого случая достаточно подробно изложен в [4]. Полные выражения для кинетических коэффициентов имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Обсуждение. Представляет интерес асимптотический анализ полученных результатов. В случае почти свободномолекулярного режима ($R_i \ll 1$) имеем

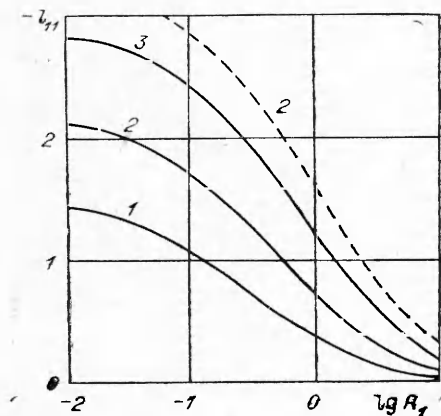
$$(10) \quad l_{11} = -\frac{6}{\sqrt{\pi}} \left[y \left(1 + \frac{5\sqrt{\pi}}{12} R_1 \ln R_1 \right) + (1-y) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{5\sqrt{\pi}}{12} R_2 \ln R_2 \right) \right], \quad l_{13} = l_{31} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[y \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} R_1 \ln R_1 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} (1-y) \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} R_2 \ln R_2\right) \Big], \quad l_{12} = l_{21} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \times \\
& \times \left[1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} R_1 \ln R_1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} R_2 \ln R_2\right) \right], \\
l_{23} = & -\frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{y} \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_1 \ln R_1\right) + \frac{1}{1-y} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_2 \ln R_2\right) \right], \\
l_{23} = l_{32} = & -\frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_1 \ln R_1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_2 \ln R_2\right) \right], \\
l_{33} = & -\frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left[y \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_1 \ln R_1\right) + (1-y) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} R_2 \ln R_2\right) \right].
\end{aligned}$$

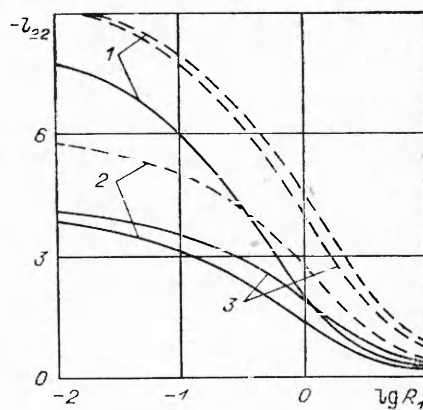
В так называемом диффузионном пределе ($R_i \gg 1$) результаты могут быть представлены в виде отношения определителей 8-го порядка, в которых каждый элемент зависит от параметров R_i , концентрации, молекулярных весов компонентов и приведенных интегралов Чепмена — Каулинга. Анализ поведения величин $l_{\alpha\beta}$ при $R_i \gg 1$ показывает, что при переходе к гидродинамическому пределу значения l_{33} , характеризующие величину пуазейлевского потока, возрастают пропорционально R_i , а значения остальных кинетических коэффициентов уменьшаются как R_i^{-1} .

Численные расчеты при промежуточных значениях R_i проводились на машине БЭСМ-6 с точностью не ниже 0,5%. В качестве объекта исследования выбраны две пары газов (гелий — аргон и гелий — дейтерий), представляющие интерес как два предельных случая сильно отличающихся и очень близких молекулярных весов компонентов. Потенциал межмолекулярных столкновений задавался в форме Леннарда — Джонса, причем значения потенциальных параметров для одинаковых молекул заимствованы из [6], а для разнородных молекул вычислялись по комбинационному правилу. Соответствующие значения приведенных интегралов Чепмена — Каулинга даны в [6]. Температура газа полагалась равной 295 К, величина концентрации легкого компонента изменялась в пределах от нуля до единицы. Результаты расчетов кинетических коэффициентов $l_{\alpha\beta}$ для смесей He—Ar (сплошные линии) и He—D₂ (штриховые линии) в зависимости от значений параметра разреженности R_1 и концентрации компонентов y приведены на фиг. 1—4 и в таблице ($y = 0,2; 0,5; 0,8$ — линии 1—3 соответственно).

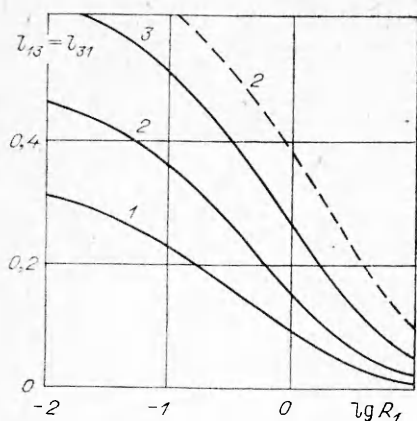
Установлено, что при любых значениях варьируемых параметров μ для любой модели межмолекулярного потенциала в линейном приближении (малые градиенты) выполняются соотношения взаимности, т. е. $l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$. Это согласуется с основными выводами термодинамики неравновесных процессов для дискретных систем [3]. В данной работе пред-



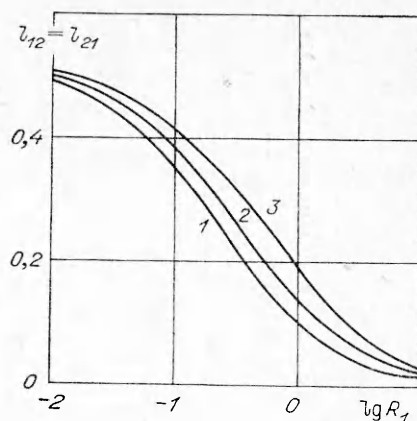
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

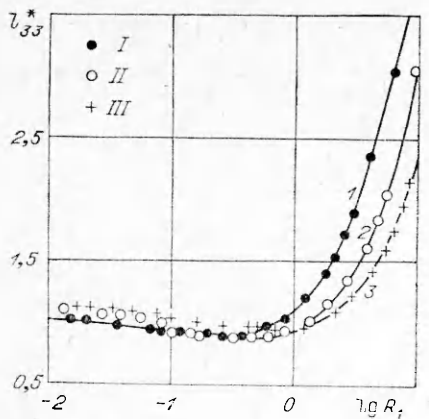
полагалось диффузное рассеяние молекул на поверхности капилляра. Однако можно показать, что соотношения симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов будут справедливы при любом законе взаимодействия «газ — поверхность», поскольку ядро рассеяния удовлетворяет принципу детального равновесия.

Известно, что явление термодиффузии для максвелловских молекул отсутствует. Кинетический коэффициент l_{21} , характеризующий диффузионный поток под действием градиента температуры, отличен от нуля и в случае максвелловских молекул. Причина в том, что величины всех потоков $l_{\alpha\beta}$, в том числе и l_{21} , определяются не только межмолекулярными столкновениями, но также геометрией канала и взаимодействием газовых молекул с граничной поверхностью. Первый фактор оказывается решающим при $R_i \gg 1$, а последние — при $R_i \ll 1$.

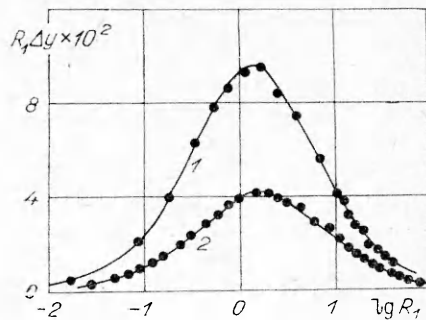
В таблице приведены значения кинетического коэффициента $l_{23} = l_{32}$. Характерной особенностью полученного результата для смеси He — D₂ является инверсия знака l_{23} при $R_1 = (0,3-0,5)$. Это означает, что направление бародиффузионного потока определяется как направлением градиента давления, так и режимом движения газа в канале. Аналогичный факт установлен ранее в [7] для пары Ag — CO₂. Инверсия знака l_{23} объясняется тем, что при $R_i \ll 1$, когда межмолекулярные столкновения редки, определяющую роль играет различие молекулярных весов компонентов, а при $R_i \sim 1$ начинает сказываться различие эффективных сечений столкновения. В случае близких молекулярных весов компонентов может оказаться, что при $R_i \sim 1$ определяющую роль начинает играть второй фактор. Это и является причиной обращения знака бародиффузионного потока.

На фиг. 5 дано сравнение теории (кривые 1—3) с экспериментальными данными (точки I—III) [8] для пуазейлевского потока смеси He — Ar при различных концентрациях гелия: $y = 0,21; 0,50; 0,81$. Величина l_{33}^* определена отношением кинетического коэффициента l_{33} к его свободно-

| y | $-l_{23} \cdot 10^2$ (He—Ar) | | | $l_{23} \cdot 10^2$ (He—D ₂) | | |
|------|------------------------------|-------|-------|--|--------|--------|
| | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 0,2 | 0,5 | 0,8 |
| 0,01 | 9,95 | 10,0 | 10,0 | -0,713 | -0,890 | -1,10 |
| 0,05 | 8,89 | 9,19 | 9,43 | -0,836 | -1,17 | -1,56 |
| 0,1 | 7,90 | 8,43 | 8,88 | -0,716 | -1,07 | -1,46 |
| 0,3 | 5,53 | 6,47 | 7,41 | $5,18 \cdot 10^{-2}$ | -0,185 | -0,428 |
| 0,5 | 4,25 | 5,27 | 6,44 | 0,696 | 0,544 | 0,399 |
| 0,7 | 3,44 | 4,44 | 5,70 | 1,17 | 1,06 | 0,957 |
| 1,0 | 2,66 | 3,58 | 4,86 | 1,64 | 1,55 | 1,46 |
| 3,0 | 1,04 | 1,51 | 2,38 | 2,10 | 1,92 | 1,73 |
| 5,0 | 0,644 | 0,954 | 1,55 | 1,71 | 1,52 | 1,34 |
| 10,0 | 0,331 | 0,497 | 0,825 | 1,04 | 0,905 | 0,776 |



Ф и г. 5



Ф и г. 6

молекулярному значению, которое следует из выражения (10) при $R_i \rightarrow 0$. Для расчета экспериментальных значений параметра R_i частота столкновений между одинаковыми молекулами задавалась по аналогии с моделью БГК формулой $\gamma_{ii} = \frac{8}{5} n_i \Omega_{ii}^{(2,2)}$, а частота столкновений (между молекулами разного сорта выбрана в соответствии с рекомендациями работы [2].

Из сравнения при $R_1 > 1$ следует хорошее (в пределах экспериментальной погрешности) согласие теоретических и экспериментальных результатов. При $R_1 < 1$, когда определяющую роль играют геометрия канала и характер взаимодействия молекул с поверхностью, теоретическая кривая лежит ниже экспериментальных данных. Максимальное расхождение достигает 5% при концентрации He $y = 0,21$, 7% — при $y = 0,50$ и 10% — при $y = 0,81$. Этот факт объясняется тем, что в реальном эксперименте при столкновении с поверхностью канала молекулы не испытывают полной аккомодации тангенциальной составляющей импульса. Увеличение расхождения с ростом концентрации гелия обусловлено значительно меньшей аккомодацией молекул гелия по сравнению с молекулами аргона. На фиг. 6 приводится сравнение теории (кривые 1, 2 — $y = 0,50$; $0,93$ соответственно) с экспериментом [8] (точки) по бародиффузионному разделению смеси He — Ar. Формула для расчета «сдвига» концентрации при движении газовой смеси через канал под действием градиента давления имеет вид [8, 9]

$$\Delta y = y^1 - y^0 = y^0(1 - y^0)l_{23}/l_{33},$$

где y^1 и y^0 — концентрации на выходе и входе в канал соответственно. Расхождение теоретических результатов с экспериментальными не превышает 5% при любых значениях параметра разреженности и концентрации.

В заключение следует отметить, что результаты данной работы могут быть использованы для описания различных эффектов в бинарных газовых смесях (баро- и термодиффузионное разделение, диффузионный бароэффект, термомолекулярное давление, механокалорический эффект и т. д.) при произвольных числах Кнудсена и концентрации компонентов.

Автор благодарит А. А. Тарина за предоставленные экспериментальные результаты.

Поступила 28 IX 198

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов В. М., Смирнова Р. В. Диффузионное скольжение и бародиффузия газовой смеси в плоском и цилиндрическом каналах. — ПМТФ, 1978, № 5.
2. McCormack F. J. Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases. — Phys. Fluids, 1973, vol. 16, p. 2095.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.

4. Черняк В. Г., Калинин В. В., Суетин П. Е. К теории неизотермического движения газа в плоском канале.— ИФЖ, 1979, т. 36, № 6.
5. Черняк В. Г., Калинин В. В., Суетин П. Е. К теории термомолекулярного давления и механокалорического эффекта в цилиндрическом канале.— ИФЖ, 1979, т. 37, № 1.
6. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961.
7. Waldmann L., Schmitt K. H. Über das bei der Gasdiffusion auftretende Druckgefälle.— Z. Naturforsch., 1961, Ser. A, Bd 16, S. 1343.
8. Тарин А. А. Исследование диффузионного разделения и проводимости газовых смесей в капилляре при их истечении в вакуум. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Свердловск: изд. УПИ, 1978.
9. Селезнев В. Д., Суетин П. Е., Смирнов Н. А. Разделение бинарной газовой смеси во всем диапазоне чисел Кнудсена.— ЖТФ, 1975, т. 45, № 7.

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ВДУВА НА СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ПОРИСТЫМ ДИСКАМИ

Н. В. Петровская
(Ростов-на-Дону)

Численно исследуется влияние поперечного вдува на стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, возникающее между двумя бесконечными коаксиальными дисками при вращении одного из них с угловой скоростью ω . Жидкость вдувается сквозь неподвижный диск с постоянной скоростью u . При изучении движения жидкости около одного бесконечного вращающегося диска в предположении автоматодельности течения [1] отыскание компонент скорости течения сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае отсутствия вдува задача хорошо изучена (см., например, [2—8]). Уже в первых работах [2, 3] были высказаны различные предположения о характере течения при больших числах Рейнольдса $Re = \omega d^2/\nu$ (d — расстояние между дисками, ν — вязкость). Согласно [2], течение имеет два пограничных слоя, прилегающих к дискам, а в ядре между ними жидкость вращается как твердое тело.

В [3] приведены доводы в пользу существования другого типа течения, характерным свойством которого является отсутствие вращения жидкости вне пограничного слоя на вращающемся диске. Далее решения задачи, обладающие указанными свойствами, будут называться решениями типа B и типа S соответственно.

Последующие исследования [4—8] показали, что существует несколько непрерывных ветвей решений, зависящих от Re . Согласно [5], только одна из них существует при всех $Re > 0$. При больших Re ее решения являются решениями типа B ; далее ее удобно называть \bar{B} -ветвью. Другая непрерывная ветвь, решения которой при больших Re являются решениями типа S , существует лишь при $Re > Re_1 \cong 217$. Профили скоростей ламинарного течения, наблюдаемого в экспериментах, при $Re < 2000$ согласуются с численными решениями, принадлежащими B -ветви [5, 7].

В данной работе изучается влияние равномерного вдува через неподвижный диск на характер течения. С этой целью для ряда значений Re выбиралось решение, принадлежащее B -ветви, которое затем непрерывно продолжалось по параметру $U = ud/\nu$ (числу Рейнольдса вдува) от $U = 0$ до $U = R$.

Эта задача уже рассматривалась для значений $Re \leq 100$ в [9, 7], где показано, что с увеличением вдува угловая и радиальная компоненты скорости течения стремятся к нулю в области вне пограничного слоя на вращающемся диске, при этом характеристики течения меняются непрерывно.

В данной работе изложены результаты вычислений в более широком диапазоне чисел Рейнольдса $0 < Re < 700$. Оказывается, качественное поведение решения при увеличении вдува существенно зависит от величины Re : при $Re > Re_* \cong 170$ непрерывность изменения характеристик течения с ростом U нарушается. Расчеты при $Re > Re_*$ показывают, что для некоторого интервала (U_1, U_2) значений U существуют три решения, принадлежащие одной непрерывной ветви. На границах этого интервала происходит ветвление: на одном из концов пара решений возникает, на другом исчезает *. Кривые зависимости характеристик течения от параметра вдува U принимают

* Бифуркационным значениям U_1 и U_2 соответствует особенность, называемая в теории катастроф складкой. Вероятно, наиболее известный пример такой бифуркации — прощелкивание упругой оболочки. Это бифуркация общего положения. Отметим, что большинство бифуркаций, рассмотренных в гидродинамической теории устойчивости (вихри Тейлора, конвективные ячейки Бенара и т. д.), связаны со специальной симметрией и не являются бифуркациями общего положения.