

КИНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛАЗМЕННОГО ТЕЧЕНИЯ
КУЭТТА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. П. Шидловский

(Москва)

Рассмотрено установившееся движение полностью ионизованной плазмы между параллельными пластинами, движущимися в своей плоскости, при наличии электрического поля. Функции распределения ионов и электронов определяются из кинетических уравнений Больцмана, дополняемых уравнениями для электрического поля. Решение строится при помощи одной из разновидностей метода моментов, причем предполагается, что перенос количества движения осуществляется только ионами, а перенос тепла — электронами. Анализ проводится с учетом близких столкновений между частицами для произвольной степени разрежения плазмы. Дается пример расчета основных характеристик течения.

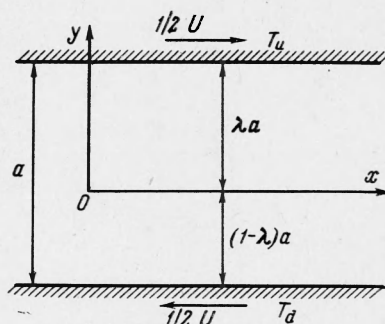
Граничные задачи, связанные с наличием в потоке твердых поверхностей, в динамике плазмы имеют гораздо меньшее практическое значение, чем в газовой динамике. Это объясняется тем, что плазма может существовать только при очень высоких температурах, под действием которых большинство материалов в той или иной степени разрушается. Как правило, для удержания плазмы в определенных границах используются не твердые стенки, а сильные магнитные поля. Однако рассмотренные задач с граничными поверхностями представляет все же известный интерес и для случая плазмы. Ниже дается приближенное решение одной из простейших задач такого рода.

1. Пусть полностью ионизованная плазма заполняет пространство между двумя бесконечными параллельными непроницаемыми плоскостями, одна из которых движется вправо, а другая влево, с постоянными скоростями $1/2 U$ (фиг. 1). Температуры пластин также постоянны, хотя в общем случае различны; без ограничения общности можно считать, что температура верхней пластины больше, чем нижней: $T_u > T_d$. Вся система находится в некотором внешнем электрическом поле, вектор напряженности которого лежит в плоскости xu . Сами пластины не заряжены и являются диэлектриками.

Функции распределения ионов F_i и электронов F_e удовлетворяют уравнениям Больцмана

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) F_i + \frac{Ze}{m_i} \sum_{j=1}^3 E_{sj} \frac{\partial F_i}{\partial c_j} = \Lambda F_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) F_e - \frac{e}{m_e} \sum_{j=1}^3 E_{sj} \frac{\partial F_e}{\partial c_j} = \Lambda F_e$$



Фиг. 1

Здесь e — единичный заряд, m_i или m_e — масса частицы, \mathbf{E}_s — вектор полной напряженности электрического поля, Z — кратность заряда иона, а в правых частях уравнений стоят интегральные операторы, характеризующие влияние столкновений частиц данного сорта между собой и с частицами противоположного заряда. При отсутствии магнитного поля \mathbf{E}_s можно представить как сумму двух слагаемых

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} \quad (1.2)$$

первое из которых соответствует внешнему электрическому полю, а второе характеризует потенциальное поле, создаваемое объемным зарядом и определяемое уравнением Пуассона

$$\nabla E = 4\pi e (Zn_i - n_e) \quad (1.3)$$

Символами n_i и n_e обозначаются числовые плотности частиц.

Согласно условиям данной задачи, левые части уравнений (1.1) могут быть несколько упрощены. Так, в силу установившегося характера рассматриваемых процессов обращаются в нуль производные по времени, а в силу геометрии задачи следует приравнять нулю также производные по x , z и c_z .

Для приближенного решения задачи перейдем от уравнений Больцмана к моментным уравнениям, получаемым из (1.1) путем умножения на некоторую функцию молекулярных скоростей $\varphi(c_x, c_y, c_z)$ и интегрирования по всему диапазону изменения последних. В нашем случае получатся моментные уравнения вида

$$\frac{d}{dy} \int c_y \varphi F_\alpha dV = \frac{Z_\alpha e E_{sx}}{m_\alpha} \int \frac{\partial \varphi}{\partial c_x} F_\alpha dV + \frac{Z_\alpha e E_{sy}}{m_\alpha} \int \frac{\partial \varphi}{\partial c_y} F_\alpha dV + \Lambda_\alpha \varphi \quad (1.4)$$

$$(\Lambda_\alpha \varphi = \int \varphi \Delta F_\alpha dV, \int d\vec{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dc_x dc_y dc_z)$$

Индекс α в уравнении (1.4) может принимать значения i или e , причем $Z_i = Z$, $Z_e = -1$.

Кроме уравнений типа (1.4), нам понадобится уравнение (1.3), в данном случае принимающее форму

$$\frac{dE_y}{dy} = 4\pi e (Zn_i - n_e) \quad (1.5)$$

и условие безвихренности электрического поля, записываемое в виде

$$\frac{d}{dy} (E_{0x} + E_x) = 0 \quad (1.6)$$

Чтобы удовлетворить условию (1.6), без ущерба для общности можно положить

$$E_x \equiv 0, \quad E_{0x} = \text{const} = E_0$$

Воспользуемся приемом, предложенным Лизом и Лю [1], представляя каждую из искомых функций двумя максвелловскими функциями распределения:

$$F_\alpha = F_{\alpha_1} = n_{\alpha_1} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_{\alpha_1}} \right)^{3/2} \exp \left[-m_\alpha \frac{(c_x - v_{x\alpha_1})^2 + c_y^2 + c_z^2}{2k T_{\alpha_1}} \right] \quad \text{при } c_y < 0$$

$$F_\alpha = F_{\alpha_2} = n_{\alpha_2} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_{\alpha_2}} \right)^{3/2} \exp \left[-m_\alpha \frac{(c_x - v_{x\alpha_2})^2 + c_y^2 + c_z^2}{2k T_{\alpha_2}} \right] \quad \text{при } c_y > 0 \quad (1.7)$$

Величины n_{α_1} , n_{α_2} , T_{α_1} , T_{α_2} , $v_{x\alpha_1}$ и $v_{x\alpha_2}$ в выражениях (1.7), функции координаты y , должны определяться при помощи моментных уравнений типа (1.4) при шести различных функциях φ_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) для каждого сорта частиц.

При исследовании аналогичным методом газа, состоящего из нейтральных частиц, представление функции распределения, согласно (1.7), обеспечивает точное решение граничной задачи для уравнения Больцмана в предельном случае свободномолекулярного течения. Исследуя плазму, уже не можем таким путем полностью удовлетворить уравнениям (1.4) даже в случае отсутствия столкновений между частицами. Однако данный метод и не ставит целью построение точного решения уравнений Больцмана, а при переходе к моментным уравнениям представление в виде (1.7) весьма удобно с точки зрения формулировки граничных условий и вычисления интегралов.

2. Выбор функций φ_i до известной степени произволен. В качестве первых четырех функций примем величины m_α , $m_\alpha c_x$, $m_\alpha c_y$, $1/2 m_\alpha (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)$. Эти функции являются аддитивными инвариантами столкновений, а поэтому при их подстановке в уравнения типа (1.4) интегралы $\Lambda_\alpha \varphi$ оказываются отличными от нуля лишь вследствие обмена количеством движения и энергией между частицами сорта α и противоположно заряженными частицами; исключение составляет интеграл $\Lambda_\alpha \varphi_1$, обращаящийся в нуль вследствие отсутствия массообмена между частицами. На основании сделанных замечаний можно, согласно определению, положить

$$\Lambda_\alpha \varphi_1 = 0, \quad \Lambda_\alpha \varphi_2 \equiv \int m_\alpha c_x \Lambda F_\alpha dV = R_{x\alpha}, \quad \Lambda_\alpha \varphi_3 = R_{y\alpha}, \quad \Lambda_\alpha \varphi_4 = Q_\alpha \quad (2.1)$$

где через R_α обозначается сила, обусловленная столкновениями частиц сорта α с частицами противоположного заряда, а через Q_α — энергия, рассеиваемая в результате таких столкновений.

Необходимы еще две функции φ_j , в качестве которых примем $\varphi_5 = m_\alpha c_x c_y$, $\varphi_6 = 1/2 m_\alpha c_y (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)$. Интегралы столкновений $\Lambda_\alpha \varphi_5$ и $\Lambda_\alpha \varphi_6$ в общем случае не могут быть найдены аналитически, а результат их численного определения зависит от закона взаимодействия между частицами. Однако в этих интегралах нетрудно выделить слагаемые, соответствующие формулам (2.1). Так, вводя определение тепловой скорости частиц по формуле $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{v}_\alpha$, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha \varphi_5 &= \int m_\alpha c_x c_y \Lambda F_\alpha dV = v_{x\alpha} \int m_\alpha c_y \Lambda F_\alpha dV + \int m_\alpha w_x w_y \Lambda F_\alpha dV = \\ &= v_{x\alpha} R_{y\alpha} + \int m_\alpha w_x w_y \Lambda F_\alpha dV \quad (2.2) \\ \Lambda_\alpha \varphi_6 &= \frac{1}{2} \int m_\alpha c_y (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \Lambda F_\alpha dV = \frac{1}{2} v_{x\alpha}^2 R_{y\alpha} + \\ &+ v_{x\alpha} \int m_\alpha w_x w_y \Lambda F_\alpha dV + \frac{1}{2} \int m_\alpha w_y (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) \Lambda F_\alpha dV \end{aligned}$$

Интегральные члены в правых частях (2.2) играют менее важную роль, чем предшествующие им, и могут быть вычислены приближенно, путем замены интегрального оператора ΛF_α его упрощенной моделью. Следуя работе [2], примем здесь

$$\Lambda F_\alpha \approx \frac{p_\alpha}{\mu_\alpha} (F_\alpha^{(0)} - F_\alpha) \quad (2.3)$$

Через p_α обозначено парциальное давление, μ_α — коэффициент вязкости частиц данного сорта, соответствующий второму приближению теории Чепмена — Энскога [3], $F_\alpha^{(0)}$ — максвелловская функция распределения.

Подставляя (2.3) в подынтегральные выражения формул (2.2) и учитывая, что

$$\int w_x w_y F_\alpha^{(0)} dV = \int w_y w^2 F_\alpha^{(0)} dV = 0$$

а также вспоминая определения вектора теплового потока и тензора напряжений

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \int \mathbf{w} w^2 F_\alpha dV, \quad P_{nk} = m_\alpha \int w_n w_k F_\alpha dV$$

получим

$$\int m_\alpha w_x w_y \Lambda F_\alpha dV \approx - \frac{p_\alpha}{\mu_\alpha} P_{xy\alpha}, \quad \frac{1}{2} \int m_\alpha w_y w^2 \Lambda F_\alpha dV \approx - \frac{p_\alpha}{\mu_\alpha} q_{y\alpha}$$

Формулы (2.2) могут быть переписаны теперь в виде

$$\Lambda_{\alpha}\Phi_5 = v_{x\alpha}R_{y\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}P_{xy\alpha}, \quad \Lambda_{\alpha}\Phi_6 = \frac{1}{2}v_{x\alpha}^2R_{y\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}(v_{x\alpha}P_{xy\alpha} + q_{y\alpha}) \quad (2.4)$$

Коэффициенты вязкости для заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, можно выразить как [3]

$$\mu_{\alpha} = \frac{5}{8A_2(2)} \left(\frac{m_{\alpha}kT_{\alpha}}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{2kT_{\alpha}}{Z_{\alpha}^2e^2} \right)^2 \quad (2.5)$$

$$A_2(2) = 2 \left[\text{Ип}(1 + v_{01}^2) - \frac{v_{01}^2}{1 + v_{01}^2} \right], \quad v_{01} = \frac{4dkT_{\alpha}}{Z_{\alpha}^2e^2} \quad (Z_i = Z, Z_e = -1)$$

Здесь d — среднее расстояние между частицами. Введем обозначения

$$I_{5\alpha} = m_{\alpha} \int c_x c_y^2 F_{\alpha} dV, \quad I_{6\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2} \int c_y^2 c^2 F_{\alpha} dV \quad (2.6)$$

Уравнения моментов типа (1.4) для выбранных нами функций Φ_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) теперь могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dy}(n_{\alpha}v_{y\alpha}) = 0, \quad \frac{dP_{xy\alpha}}{dy} = Z_{\alpha}n_{\alpha}eE_0 + R_{x\alpha}$$

$$\frac{dP_{yyz}}{dy} = Z_{\alpha}n_{\alpha}eE_y + R_{y\alpha}, \quad \frac{d}{dy}(v_{x\alpha}P_{xy\alpha} + q_{y\alpha}) = Z_{\alpha}n_{\alpha}eE_0v_{x\alpha} + Q_{\alpha} \quad (2.7)$$

$$\frac{dI_{5\alpha}}{dy} = Z_{\alpha}n_{\alpha}eE_yv_{x\alpha} + R_{y\alpha}v_{x\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}P_{xy\alpha}$$

$$\frac{dI_{6\alpha}}{dy} = Z_{\alpha} \frac{eE_0}{m_{\alpha}} P_{xy\alpha} + \frac{3Z_{\alpha}eE_y}{m_{\alpha}} P_{yy\alpha} + \frac{1}{2}v_{x\alpha}^2R_{y\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}(v_{x\alpha}P_{xy\alpha} + q_{y\alpha})$$

При помощи второго уравнения (2.7) четвертое уравнение преобразуется к более удобному виду

$$P_{xy\alpha} \frac{dv_{x\alpha}}{dy} + \frac{dq_{y\alpha}}{dy} = -R_{x\alpha}v_{x\alpha} + Q_{\alpha} \quad (2.8)$$

Если предположить, что процесс близкого столкновения электрона и иона обладает теми же свойствами, что и процесс упругого соударения гладких тел, то нетрудно получить соотношения

$$\mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_e, \quad Q_i + Q_e = -(\mathbf{R}_i\mathbf{v}_i + \mathbf{R}_e\mathbf{v}_e) = R_{xe}(v_{xi} - v_{xe}) \quad (2.9)$$

Зависимость величин в уравнениях (2.7) от условных «параметров течения» соответствует представлению двухпоточной функции по формулам (1.7) и принимает вид

$$n_{\alpha} = \frac{1}{2}(n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}), \quad v_{x\alpha} = \frac{n_{\alpha_1}v_{x\alpha_1} + n_{\alpha_2}v_{x\alpha_2}}{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}}$$

$$v_{y\alpha} = \left(\frac{2}{\pi m_{\alpha}} \right)^{1/2} \frac{n_{\alpha_2} \sqrt{kT_{\alpha_2}} - n_{\alpha_1} \sqrt{kT_{\alpha_1}}}{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}}$$

$$P_{xx\alpha} = \frac{k}{2}(n_{\alpha_1}T_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}T_{\alpha_2}) + m_{\alpha} \left[\frac{1}{2}(n_{\alpha_1}v_{x\alpha_1}^2 + n_{\alpha_2}v_{x\alpha_2}^2) - n_{\alpha}v_{x\alpha}^2 \right]$$

$$P_{yy\alpha} = P_{zz\alpha} = \frac{k}{2}(n_{\alpha_1}T_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}T_{\alpha_2}), \quad P_{xy\alpha} = \left(\frac{m_{\alpha}kT_{\alpha_1}}{2\pi} \right)^{1/2} n_{\alpha_1}(v_{x\alpha_2} - v_{x\alpha_1}) \quad (2.10)$$

$$q_{y\alpha} = \frac{n_{\alpha_1}}{2} \left(\frac{m_{\alpha}kT_{\alpha_1}}{2\pi} \right)^{1/2} \left[4 \frac{k}{m_{\alpha}} (T_{\alpha_2} - T_{\alpha_1}) + v_{x\alpha_2}^2 - v_{x\alpha_1}^2 - 2v_{x\alpha}(v_{x\alpha_2} - v_{x\alpha_1}) \right]$$

$$I_{5\alpha} = \frac{k}{2} (n_{\alpha_1}T_{\alpha_1}v_{x\alpha_1} + n_{\alpha_2}T_{\alpha_2}v_{x\alpha_2})$$

$$I_{6\alpha} = \frac{n_{\alpha_1}}{4} \sqrt{kT_{\alpha_1}} \left[\frac{5}{m_{\alpha}} (kT_{\alpha_1})^{3/2} + \frac{5}{m_{\alpha}} (kT_{\alpha_2})^{3/2} + v_{x\alpha_1}^2 \sqrt{kT_{\alpha_1}} + v_{x\alpha_2}^2 \sqrt{kT_{\alpha_2}} \right]$$

$$p_{\alpha} = n_{\alpha}kT_{\alpha} = \frac{1}{3}(P_{xx\alpha} + P_{yy\alpha} + P_{zz\alpha})$$

3. Рассматривая установившееся движение плазмы в условиях данной задачи, естественно предположить, что температуры ионов T_i и электронов T_e , а также плотности n_i и n_e , имеют один и тот же порядок величины. Если предположить, кроме того, что макроскопические скорости обеих компонент по своему порядку не больше соответствующих средних тепловых скоростей, то из рассмотрения формул (2.10) для напряжения сдвига $P_{xy\alpha}$ и теплового потока $q_{y\alpha}$ можно получить важные оценки. Действительно, из этих формул видно, что при прочих равных условиях

$$\frac{P_{xye}}{P_{xyi}} \approx \frac{q_{ye}}{q_{yi}} \approx \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

Принимая во внимание малость величины $\sqrt{m_e/m_i}$, приходим к выводу о возможности пренебрежения величинами P_{xye} и q_{ye} по сравнению с P_{xyi} и q_{yi} соответственно.

С целью упрощения постановки граничных условий при решении задачи о плазменном течении Куэтта будем считать, что при отражении от поверхности заряд частиц не изменяется. Кроме того, в соответствии со сделанными выше допущениями предположим, что при отражении ионов имеет место полная аккомодация касательной составляющей количества движения, а при отражении электронов — полная аккомодация тепловой энергии к условиям на поверхности. Другими словами, макроскопическая скорость отраженных ионов у поверхности равна скорости движения пластины, а температура отраженных электронов в точке отражения равна температуре пластины.

Как явствует из сделанных выше оценок, для определения суммарного напряжения сдвига в потоке истинное распределение макроскопической скорости электронов несущественно. Поэтому можно положить, например, $v_{xe_1} = v_{xi_1}$, $v_{xe_2} = v_{xi_2}$; как увидим из дальнейшего, отсюда следует, что $v_{xe} = v_{xi} = v_x$. Обращаясь к вопросу о температуре ионов и принимая во внимание стационарность исследуемых процессов, будем считать плазму равновесной, т. е. положим $T_{i_1} = T_{e_1} = T_1$ и $T_{i_2} = T_{e_2} = T_2$; как увидим из дальнейшего, эти два соотношения равносильны условию $T_i = T_e$.

Плотность ионов будем считать пропорциональной плотности электронов, т. е. $n_{i_1} = Dn_{e_1}$, $n_{i_2} = Dn_{e_2}$, $n_i = Dn_e$. Коэффициент пропорциональности D зависит при этом от степени разрежения плазмы и от кратности заряда ионов Z . Суммарная плотность плазмы будет выражена как

$$n = n_i + n_e = (1 + D)n_e \quad (3.1)$$

при аналогичных выражениях для n_1 и n_2 . С учетом сделанных допущений граничные условия задачи принимают вид

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \frac{1}{2}U, & T_1 &= T_u = \chi T_d \quad \text{при } y = \lambda a \\ v_{x_2} &= -\frac{1}{2}U, & T_2 &= T_d, & n_2 &= n_d \quad \text{при } y = (\lambda - 1)a \end{aligned} \quad (3.2)$$

Последнее условие, касающееся плотности, должно было бы быть сформулировано несколько иначе; по существу здесь следует задать общую массу некоторого вертикального столбца вещества, участвующего в движении. Но поскольку эта масса заранее неизвестна, указанное интегральное условие можно заменить более простым, как в (3.2), причем точное значение постоянной будет определено после решения всей задачи. К условиям (3.2) следует добавить условие непроницаемости обеих поверхностей: $v_{y\alpha} = 0$ при $y = \frac{1}{2}a [(2\lambda - 1) + 1]$. Отметим, что, интегрируя первое уравнение (2.7) с учетом этого условия, получим $v_{y\alpha} \equiv 0$ во всем поле течения; при выводе некоторых уравнений предполагается выполнение последнего тождества.

В результате введенных допущений число неизвестных функций в уравнениях (2.7), решаемых совместно с уравнением (1.5), уменьшается. Используя это обстоятельство и вспоминая соотношения (2.9), исключим из системы (2.7) величины $R_{x\alpha}$ и $R_{y\alpha}$. Так, путем почленного сложения вто-

рых уравнений этой системы, записанных для $\alpha = i$ и $\alpha = e$, получим

$$\frac{dP_{xyi}}{dy} = (Zn_i - n_e) eE_0 = \frac{E_0}{4\pi} \frac{dE_y}{dy}$$

так как по условию $P_{xye} \equiv 0$. Аналогичным образом, обозначая $P_{yvi} + P_{yve} = P_{yv}$, из третьих уравнений той же системы получим

$$\frac{dP_{yv}}{dy} = \frac{1}{4\pi} E_y \frac{dE_y}{dy}$$

Пятое и шестое уравнения системы (2.7) должны, вообще говоря, рассматриваться отдельно для $\alpha = i$ и $\alpha = e$. Это означает, в частности, что отношения $n_{i1} / n_{e1} = D_1$ и $n_{i2} / n_{e2} = D_2$ могут быть переменными величинами, не равными друг другу. Однако если рассматривать плазму в целом и учесть, что в ней не может быть больших отклонений от квазинейтральности, можно приближенно положить $D_1 = D_2 = D = \text{const}$, получая соотношение (3.1). Но, как очевидно из сказанного, вместе с принятием соотношения (3.1) необходимо отказаться от рассмотрения пятого и шестого уравнений системы (2.7) для каждой из компонент отдельно. Поэтому примем обозначения $I_{5i} + I_{5e} = I_5$ и $m_e I_{6i} + m_e I_{6e} = I_6$ и выведем уравнения для определения функций I_5 и I_6 ; получаемые уравнения будут приведены несколько ниже для случая малых ионных чисел Маха.

Обращаясь к формуле (2.5), выразим коэффициент вязкости как

$$\mu_\alpha = B \sqrt{m_\alpha} T^{5/2} \quad (3.3)$$

где постоянный коэффициент B предполагается не зависящим от сорта частиц; это условие строго выполняется только для квазинейтральной плазмы при $Z = 1$. Во многих случаях допустима линеаризация формулы (3.3) при помощи приема, широко применяемого в теории пограничного слоя (см., например, [4]). Если $\mu_{\alpha d}$ — значение коэффициента вязкости частиц данного сорта у нижней пластины, то вместо (3.3) можно принять приближенную зависимость

$$\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha d}} \approx C \frac{T}{T_d}, \quad C = \left(\frac{T_u}{T_d} \right)^{3/4} = \chi^{3/4} \quad (3.4)$$

Дальнейший анализ удобнее проводить в безразмерных переменных, вводимых по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= v_x^\circ U, & n &= n^\circ n_d, & T &= T^\circ T_d \\ P_{xy\alpha} &= P_{xy}^\circ \frac{n_\alpha}{n} \left(\frac{m_\alpha k T_d}{2\pi} \right)^{1/2} n_d U, & P_{yv} &= P_{yv}^\circ \frac{n_d k T_d}{2} \\ q_{y\alpha} &= q_y^\circ \frac{n_\alpha}{n} \frac{n_d}{\sqrt{2\pi m_\alpha}} (k T_d)^{3/2} \\ I_{5\alpha} &= I_5^\circ \frac{n_\alpha}{n} n_d k T_d U, & I_{6\alpha} &= I_6^\circ \frac{n_\alpha}{n} \frac{n_d}{m_\alpha} k^2 T_d^2 \\ E_y &= E_y^\circ E_* \equiv E_y^\circ E_0 \frac{D+1}{D} \left(\frac{\chi k T_d}{m_i U^2} \right)^{1/2}, & y &= y^\circ \nu a \end{aligned} \quad (3.5)$$

где ν — положительный коэффициент, пока неопределенный (в дальнейшем будет показано, что ν соответствует среднему пространственному значению безразмерной плотности). Преобразованные уравнения будут содержать ряд безразмерных параметров, в том числе

$$\begin{aligned} M_\alpha &= U \left(\frac{m_\alpha}{\chi k T_d} \right)^{1/2}, & R_\alpha &= \frac{U a m_\alpha n_d}{\mu_{\alpha d}}, & \gamma &= \frac{e E_* a}{k T_d} \\ \varepsilon &= \frac{4\pi e n_d a}{E_*}, & \beta &= \frac{16}{15} \frac{1+D^2}{\sqrt{2\pi\chi}} \frac{R_\alpha}{(1+D)^2 C M_\alpha} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если коэффициент вязкости выражается по формуле (3.3), то параметр β не зависит от сорта частиц.

Ограничимся случаем малых ионных чисел Маха, когда членами порядка M_i^2 можно пренебречь по сравнению с членами порядка единицы. Кроме того, пусть $D = O(1)$, $\gamma = O(1)$. При этих ограничениях уравнения (2.7) и (1.5) преобразуются к виду (верхний индекс у безразмерных величин опущен)

$$\begin{aligned} n_2 \sqrt{T_2} &= n_1 \sqrt{T_1} & \frac{dP_{xy}}{dy} &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{1/2} \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{dE_y}{dy} \\ \frac{dP_{zz}}{dy} &= 2 \frac{\gamma}{\varepsilon} \bar{E}_y \frac{dE_y}{dy}, & \frac{dq_y}{dy} &= 0 \\ \frac{dI_5}{dy} &= \frac{\gamma}{\varepsilon} v_x E_y \frac{dE_y}{dy} - \frac{15}{16} n v \beta P_{xy} \\ \frac{dI_6}{dy} &= 3 \frac{\gamma}{\varepsilon} T E_y \frac{dE_y}{dy} - \frac{15}{8} n v \beta q_y, & \frac{dE_y}{dy} &= n v \varepsilon \frac{ZD-1}{1+D} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если в уравнения (3.7) подставить выражения (2.10), приведенные к безразмерному виду по формулам (3.5) и упрощенные применительно к случаю $M_i^2 \ll 1$, то станет ясно, что полученная система распадается на две, т. е. определение плотностей, температур и напряженности электрического поля может проводиться независимо от определения скоростей.

4. Введем новую независимую переменную

$$\eta = \int_0^y n dy \quad (4.1)$$

Теперь первое, третье, четвертое, шестое и седьмое уравнения системы (3.7) принимают форму ($\sigma \equiv \sqrt{T}$)

$$n_2 \sigma_2 = n_1 \sigma_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{d\eta} [n_1 \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2)] = 2 \frac{\gamma}{\varepsilon} \bar{E}_y \frac{dE_y}{d\eta} \quad (4.3)$$

$$n_1 \sigma_1 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \alpha_2 = \text{const} \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{d\eta} [n_1 \sigma_1 (\sigma_1^3 + \sigma_2^3)] = \frac{12}{5} \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{n_1 \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}{n_1 + n_2} E_y \frac{dE_y}{d\eta} - \frac{3}{2} v \beta \alpha_2 \quad (4.5)$$

$$\frac{dE_y}{d\eta} = v \varepsilon b \quad \left(b = \frac{ZD-1}{1+D} \right) \quad (4.6)$$

Интегрируя уравнение (4.6), получим

$$E_y = v \varepsilon b \eta + E' \quad (4.7)$$

где E' — постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия для E_y . После этого уравнение (4.3) дает

$$n_1 \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2) = v \gamma b (v \varepsilon b \eta^2 + 2E' \eta) + \alpha_3 \equiv \alpha_3 + g(\eta) \quad (4.8)$$

С целью преобразования к более удобному виду уравнения (4.5) отметим, что при учете (4.2) средняя температура плазмы выражается как

$$T = \frac{n_1 \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}{n_1 + n_2} = \sigma_1 \sigma_2 \quad (4.9)$$

Кроме того, из уравнений (4.4) и (4.8) получим

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3 + g(\eta)} \quad (4.10)$$

Используя (4.9), а также (4.7), (4.8) и (4.10), можно представить уравнение (4.5) в форме (штрих — производная по η)

$$(\alpha_3 + g) T' - \frac{1}{5} (\alpha_3 + g)' T - \frac{\alpha_2^2 (\alpha_3 + g)'}{(\alpha_3 + g)^2} + \frac{3}{2} \nu \beta \alpha_2 = 0 \quad (4.11)$$

Интегрирование линейного уравнения (4.11) дает

$$T = -\frac{5}{11} \alpha_2^2 (\alpha_3 + g)^{-2} - \frac{3}{2} \nu \beta \alpha_2 (\alpha_3 + g)^{1/5} \Gamma(\eta) + \alpha_4 (\alpha_3 + g)^{1/5} \quad (4.12)$$

$$\Gamma(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} [\alpha_3 + g(\eta)]^{-9/5} d\eta$$

где α_4 — новая постоянная интегрирования.

Из выражения (4.12) при помощи (4.9) и (4.10) нетрудно найти σ_1 и σ_2 (знак перед радикалом выбирается из условия $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0$)

$$\sigma_1 = [\alpha_3 + g(\eta)]^{-1} \left[\Omega(\eta) - \frac{\alpha_2}{2} \right], \quad \sigma_2 = [\alpha_3 + g(\eta)]^{-1} \left[\Omega(\eta) + \frac{\alpha_2}{2} \right] \quad (4.13)$$

$$\Omega(\eta) = \sqrt{-9/44 \alpha_2^2 - 3/2 \nu \beta (\alpha_3 + g)^{11/5} \Gamma(\eta) + \alpha_4 (\alpha_3 + g)^{11/5}}$$

После этого при помощи (4.2) и (4.8) можно найти величины n_1 , n_2 и среднюю безразмерную плотность плазмы n . Впрочем, из уравнений (4.8) и (4.9) плотность можно выразить непосредственно как

$$n = \frac{\alpha_3 + g(\eta)}{2T(\eta)} \quad (4.14)$$

где $T(\eta)$ определяется согласно (4.12).

Постоянные α_2 , α_3 и α_4 , входящие в выражения (4.12), (4.13) и (4.14), могут быть найдены при помощи той группы граничных условий (3.2), которая относится к температуре и плотности. При этом коэффициенты λ и ν (см. фиг. 1 и последнюю из формул (3.5)) всегда можно подобрать так, чтобы верхней пластине соответствовало значение $\eta = 1/2$, а нижней — значение $\eta = -1/2$. Таким образом, используемые на этом этапе граничные условия имеют вид

$$\sigma_1(1/2) = \sqrt{\chi}, \quad \sigma_2(-1/2) = 1, \quad n_2(-1/2) = 1 \quad (4.15)$$

В формуле (4.12) положим $\eta_0 = -1/2$ и введем обозначения

$$\alpha_3 + g(-1/2) = \alpha_3', \quad \alpha_2 = \alpha_2' \alpha_3', \quad \alpha_4 = \alpha_4' (\alpha_3')^{-1/5} \\ \Delta g = g(1/2) - g(-1/2)$$

При помощи формул (4.8), (4.10) и (4.12), а также второго и третьего граничных условий (4.15) получим

$$\alpha_2' = 2 - \alpha_3', \quad \alpha_4' = 1 - \alpha_2' + 5/11 \alpha_2'^2 = \alpha_3' - 1 + 5/11 (\alpha_3' - 2)^2 \quad (4.16)$$

Далее, после подстановки первого из условий (4.15) в формулу (4.12) получим уравнение

$$\frac{5}{11} \left(\frac{\alpha_3'}{\alpha_3' + \Delta g} \right)^2 \alpha_2'^2 + \frac{3}{2} \nu \beta \alpha_2' \frac{\alpha_3'}{\alpha_3' + \Delta g} (\alpha_3' + \Delta g)^{7/5} \Gamma(1/2) - \\ - \alpha_4' \left(\frac{\alpha_3'}{\alpha_3' + \Delta g} \right)^{-1/5} + \chi + \sqrt{\chi} \alpha_2' \frac{\alpha_3'}{\alpha_3' + \Delta g} = 0 \quad (4.17)$$

Величины α_2' и α_4' выражаются через α_3' по формулам (4.16), так что в уравнении (4.17) остается одна неизвестная α_3' . В общем случае это уравнение будет трансцендентным, так как α_3' неявно фигурирует в выражении

$\Gamma(1/2)$, а функция $\Gamma(\eta)$ (см. (4.12)) может быть представлена в элементарной форме лишь при определенном виде $g(\eta)$; поэтому для решения уравнения (4.17) приходится применять какой-либо приближенный метод.

5. После определения величины σ_1 , σ_2 , n_1 и n_2 следует перейти к определению v_{x_1} и v_{x_2} , обратившись для этого ко второму и пятому уравнениям системы (3.7). При помощи таких же преобразований, как и при получении уравнений (4.2) — (4.6), рассматриваемые уравнения можно представить в форме

$$n_1 \sigma_1 (v_{x_2} - v_{x_1}) = \sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{d\eta} [n_1 \sigma_1 (\sigma_1 v_{x_1} + \sigma_2 v_{x_2})] = 2\nu \gamma b E_y v_x - \frac{15}{8} \nu \beta (\sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1) \quad (5.2)$$

Следует иметь в виду, что средняя скорость ионов выражается как

$$v_x = \frac{n_1 v_{x_1} + n_2 v_{x_2}}{n_1 + n_2}$$

С учетом этой формулы уравнение (5.2) можно привести к виду

$$\begin{aligned} dv_x / d\eta = & -\frac{\alpha_2}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1}{(\alpha_3 + g)^2} \right] - \frac{\alpha_2 \sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b}}{2(\alpha_3 + g)^2} - \\ & - \frac{15}{8} \nu \beta \frac{\sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1}{\alpha_3 + g} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) можно немедленно проинтегрировать, получая

$$\begin{aligned} v_x = & -\alpha_2 \frac{\sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1}{2(\alpha_3 + g)^2} - \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{2\pi}{\kappa} \right)^{1/2} \nu \gamma b \int_{-1/2}^{\eta} \frac{d\eta}{(\alpha_3 + g)^2} - \\ & - \frac{15}{8} \nu \beta \int_{-1/2}^{\eta} \frac{\sqrt{2\pi / \kappa \nu \gamma b \eta} + \alpha_1}{\alpha_3 + g} d\eta + \alpha_5 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Безразмерная форма записи граничных условий для скоростей при принятых нами допущениях оказывается следующей:

$$v_{x_1}(1/2) = 1/2, \quad v_{x_2}(-1/2) = -1/2$$

Если воспользоваться соотношением (5.1), а также результатами, полученными ранее, граничные условия для средней скорости можно представить в форме

$$v_x \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa\nu\gamma b}} \frac{\sqrt{\pi/2\kappa\nu\gamma b} + \alpha_1}{\alpha_3 + g(1/2)}, \quad v_x \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi/2\kappa\nu\gamma b} - \alpha_1}{\alpha_3 + g(-1/2)} \quad (5.5)$$

Постоянные α_1 и α_5 , фигурирующие в формуле (5.4) и пока еще неизвестные, могут быть без труда найдены при помощи граничных условий (5.5).

6. При помощи (4.14) переход к безразмерной физической переменной y осуществляется по формуле

$$y = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{n(\eta)} = 2 \int_0^{\eta} \frac{T(\eta)}{\alpha_3 + g(\eta)} d\eta \quad (6.1)$$

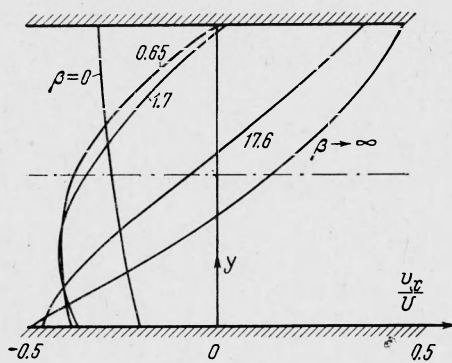
где $T(\eta)$ выражается согласно (4.13). В общем случае интеграл, находящийся в правой части формулы (6.1), должен определяться численным способом. Нетрудно видеть, что введенные ранее коэффициенты ν и λ будут теперь выражены так:

$$\nu = \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\eta}{n(\eta)} \right]^{-1}, \quad \lambda = \nu \int_0^{1/2} \frac{d\eta}{n(\eta)} \quad (6.2)$$

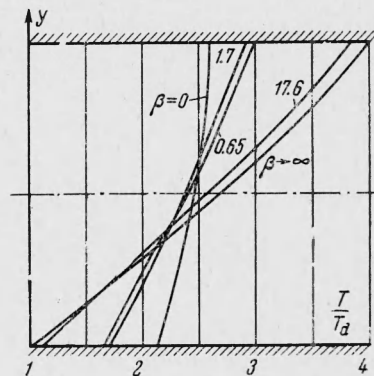
Рассчитаем теперь среднее значение числовой плотности $\langle n \rangle$ плазмы по ширине протока между пластинами

$$\frac{\langle n \rangle}{n_d} = \left(\int_{(\lambda-1)/\nu}^{\lambda/\nu} n dy \right) \left(\int_{(\lambda-1)/\nu}^{\lambda/\nu} dy \right)^{-1} = \nu \int_{-1/2}^{1/2} d\eta = \nu \quad (6.3)$$

Как видно отсюда, величина ν имеет определенный физический смысл и пропорциональна среднему пространственному значению плотности. Что касается величины λ , то она характеризует неоднородность распределения плотности; если $\lambda < 1/2$, то среднее значение плотности в верхней части области течения ($y > 0$) больше, чем в нижней, а если $\lambda > 1/2$, то уплотнение имеет место в окрестности нижней пластины.



Фиг. 2



Фиг. 3

Следует отметить, что в полученных нами формулах для плотности, температуры и скорости часть безразмерных параметров фигурирует с множителем ν , а эта величина, как видно, сама определяется из решения задачи. С другой стороны, при формулировке граничных условий (3.2) указывалось, что и величина n_d заранее неизвестна, а должна быть определена по существу на основании задания средней плотности по ширине протока $\langle n \rangle$. Если величина ν найдена, то, как видно из формулы (6.3),

$$n_d = \langle n \rangle \nu^{-1}$$

Следовательно, множитель ν мог бы быть исключен из всех результатов, если бы в формулах (3.5) и (3.6) в качестве характерного значения плотности было принято не n_d , а $\langle n \rangle$. При этом, однако, изменилось бы граничное условие для плотности отраженных частиц n_2 .

На этом можно закончить описание общей схемы решения задачи о плазменном течении Куэтта. В качестве примера применения этой схемы был рассмотрен случай $\chi = T_u/T_d = 4$. Как указывалось, средняя скорость ионов считается значительно меньшей, чем соответствующая скорость звука, а параметр β (основной параметр разрежения, см. (3.6)) может принимать любые значения от 0 до ∞ . Кроме того, при изменении степени разрежения будут, вообще говоря, изменяться и другие безразмерные параметры, например, γ , ϵ и b . Чтобы установить, как именно они будут изменяться, предположим, что величина β изменяется только за счет плотности, при сохранении постоянных значений температуры и скорости пластин. Если величина E_* при этом также остается постоянной, то отсюда следует, что можно считать $\gamma = \text{const}$.

С другой стороны, имеем

$$\epsilon\gamma = \frac{4\pi n_d a^2 e^2}{kT_d} = \frac{a^2}{r_D^2}$$

Здесь r_D — радиус Дебая — Хюккеля. При сделанном выше предположении величина a/r_D пропорциональна $\sqrt{\beta}$ и, если учесть постоянство параметра γ , следует считать $\varepsilon \sim \beta$.

Что касается величины b , то она должна зависеть от a/r_D , обращаясь в нуль при $a/r_D \rightarrow \infty$. Следовательно, можно положить, например,

$$b = b_0 e^{-\theta \sqrt{\beta}}$$

где b_0 и θ — некоторые заданные постоянные.

Как отмечалось, в нужных нам уравнениях вместо β , γ и ε фигурируют параметры $\beta_1 = \nu\beta$, $\gamma_1 = \nu\gamma$ и $\varepsilon_1 = \nu\varepsilon$. Для простоты проведения расчетов было положено

$$\gamma_1 = \text{const} = 1, \quad \varepsilon_1 = \beta_1$$

$$b = \frac{3}{5} e^{-\sqrt{\beta_1}}, \quad E' = -\frac{5}{3}$$

и единственным переменным параметром оставалась, таким образом, величина β_1 .

На фиг. 2 и 3 показаны профили скорости и температуры, полученные при вышеуказанных условиях для нескольких значений параметра разрежения β . Как и следовало ожидать, в предельном случае $\beta \rightarrow \infty$ эти профили совпадают с соответствующими профилями для обычного течения Куэтта с учетом сжимаемости.

Пользуясь размерным обозначением касательного напряжения P_{xyi} , местный коэффициент трения можно определить как

$$C_f = -\frac{2P_{xyi}}{m_i n_d U^2} = -\frac{1+b}{(1+Z)M_i} \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^{1/2} \nu \gamma b \eta + \alpha_1 \right] \quad (6.4)$$

В отличие от гидродинамического течения Куэтта, коэффициент трения получается здесь переменным по ширине области течения. При сравнении различных режимов течения число Маха считается постоянным, и поэтому, обозначая индексом 0 значения, соответствующие случаю бесстолкновительного течения при $\beta = 0$, для условий на нижней пластине ($\eta = -1/2$) получим

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1+b}{1+b_0} \frac{\sqrt{\pi/2\kappa} \nu \gamma b - \alpha_1}{\sqrt{\pi/2\kappa} \nu \gamma b_0 - \alpha_{10}}$$

График зависимости отношения C_f/C_{f0} от β приводится на фиг. 4. В качестве характеристики теплопередачи здесь принималось число Стантона

$$S = \frac{q_{ye}}{m_e n_d c_{pe} U (T_d - T_u)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{Z - b}{Z + 1} \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi\kappa} M_i (1 - \chi)} \quad (6.5)$$

График изменения величины S/S_0 дается на той же фиг. 4.

Кривые изменения коэффициентов трения и теплопередачи в плазменном течении Куэтта не содержат принципиальных особенностей и при больших значениях β ведут себя так же, как и соответствующие кривые для нейтрального газа.

Поступила 6 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu Chung — Yen, Lees L. Kinetic theory description of plane compressible Couette flow. Rarefied Gas Dynamics (Proc. of the 2nd Int. Symposium, ed. by L. Talbot), Academic Press, 1961, p. 391—428.
2. Wha t n a g a r P. L., G r o s s E. P., K r o o k M. A model for collision processes in gases, I. Phys. Rev., 1954, vol. 94, p. 511—525.
3. Ч е п м е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
4. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.