

УДК 533.6.011.8

## ДОЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА РЕШЕТКИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЛАСТИН

С. П. Попов, Ф. Г. Черемисин

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 119991 Москва

E-mails: spropov@yandex.ru, tcherem@ccas.ru

Путем совместного численного решения уравнений Больцмана и Навье — Стокса исследованы параметры потока разреженного газа, протекающего сквозь решетку плоских пластин, расположенных поперек потока. Рассмотрен дозвуковой режим обтекания. Рассчитаны изменения характеристик течений в зависимости от скорости набегающего потока и температуры пластины.

**Ключевые слова:** численный расчет, уравнение Больцмана, уравнения Навье — Стокса, поперечная пластина, решетка, проницаемая преграда, трансзвуковое течение, теплопередача.

**Введение.** Течение разреженного газа в капиллярном сите в диапазоне чисел Кнудсена  $Kn = 10^{-4} \div 10^{-1}$  при различных температурах впервые экспериментально исследовано для ряда инертных газов в работе [1], где определена зависимость расхода от геометрии течения и характера взаимодействия молекул со стенками капилляра. Обтекание перфорированных экранов сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M = 2 \div 3$  при числе Рейнольдса  $Re = 10^6$  исследовано в [2] при анализе влияния вдува в донную область на структуру течения. Теоретические результаты, основанные на представлении перфорированного экрана поверхностью разрыва с соотношениями, учитывающими структуру течений внутри перфорации и механизмы взаимодействия газа со стенками, приведены в [3], развитие этого аналитического подхода продолжено в [4, 5].

Результаты численных экспериментов на основе прямого статистического моделирования одномерных потоков разреженного газа через проницаемую плоскую поверхность приведены в [6]. В предположении, что с вероятностью  $P$  молекула газа пролетает сквозь поверхность без взаимодействия с ней, а с вероятностью  $1 - P$  рассеивается, исследованы стационарные течения в диапазоне чисел Маха  $M = 3 \div 10$  при различных температурах преграды и числах аккомодации. В частности, определены закономерности изменения параметров потока в образующемся перед преградой “фронте ударного возмущения” и установлены отличия его структуры от структуры ударной волны.

Необходимость исследования дозвуковых течений разреженного газа обусловлена их практической значимостью (движение газа в пористых телах и капиллярных мембранах в устройствах разделения и охлаждения газа). Характеристики потока определяются взаимодействием течений, омывающих элементы преграды. Как правило, это трехмерные конструкции, состоящие из цилиндрических каналов либо из набора конечных пластин, расположенных вдоль или поперек потока.

Представляют интерес системы, предназначенные для регулирования (создания) потоков с заданными свойствами без изменения геометрии, путем вариации температуры или параметров потока газа на обтекаемых поверхностях. Данная работа посвящена анализу подобных систем.

Численное решение уравнения Больцмана, описывающего динамику разреженного неравновесного газа, требует больших объемов вычислений, поскольку определяемая функция распределения кроме пространственных переменных включает трехмерное скоростное пространство. В настоящее время для численного моделирования течений разреженного газа можно использовать двумерные постановки. Однако даже в достаточно простых случаях количество узлов функции распределения достигает 5–10 млн, и расчет кинетического уравнения во всей области весьма трудоемок. В значительной мере это проявляется в случаях, когда течение занимает большое пространство и процессы установления происходят медленно. Данные особенности характерны для дозвуковых режимов, когда для адекватной постановки граничных условий требуется обширная область расчета. Для преодоления этих трудностей в [7, 8] предложен и опробован метод, позволяющий существенно неравновесные области течения рассчитывать по нестационарному уравнению Больцмана, а в случае, когда состояние газа близко к термодинамическому равновесию, решать нестационарные уравнения Навье — Стокса. На каждом временном шаге происходит сращивание решений на заранее определенном контуре с помощью функции Энского — Чепмена, при этом выполняются требования непрерывности потоков массы, импульса и энергии.

Уравнение Больцмана решается конечно-разностным методом на фиксированных пространственной и скоростных сетках. Строгое выполнение законов сохранения и обращение в нуль интеграла столкновения на локально-максвелловской функции распределения достигается за счет применения проекционного метода [9, 10]. Интеграл столкновений вычисляется по единой для всех пространственных узлов кубатурной сетке в пространстве скоростей, метод Монте-Карло не применяется. Предусмотрена возможность расчета интеграла столкновений для большого числа межмолекулярных потенциалов, поскольку угол отклонения ищется путем решения соответствующей задачи рассеяния [11].

В [12, 13] показана эффективность применения процедуры сращивания при исследовании сложных типов течений. Появление немонотонностей на границе сшивания нежелательно и может быть вызвано двумя причинами: 1) неправильный выбор области интегрирования уравнения Больцмана в пространстве скоростей или размещение границы сращивания в существенно неравновесной области (что легко устраняется путем подбора параметров); 2) различное описание структуры ударной волны по кинетической модели и модели сплошной среды при  $M > 1,5$ , в результате чего форма сильных ударных волн на границе сращивания искажается, хотя скорости распространения и значения макроскопических величин за ударной волной определяются правильно (данные погрешности являются неустраняемыми).

Кроме изучения сравнительно простых случаев течений разреженного газа с перспективой перехода к более сложным техническим системам возможно исследование ряда классических задач механики газа, например структуры ударной волны, взаимодействия ударных волн между собой, а также с поверхностями, граничными и сдвиговыми слоями. К числу этих задач относится и задача о структуре локальных сверхзвуковых зон в трансзвуковых потоках [14].

В данной работе исследуется нестационарный процесс взаимодействия дозвукового потока разреженного газа с мгновенно помещенной в него решеткой. В результате наложения отраженных от пластин ударных волн образуется плоская ударная волна, распространяющаяся вверх по потоку. Смещение струйных течений в зазорах решетки приводит к установлению вблизи нее стационарного течения, согласованного с течением за отошедшей ударной волной. Рассматриваются некоторые особенности не исследованного ранее процесса образования локальных сверхзвуковых зон при  $Kn = 0,10 \div 0,05$ .

**Постановка задачи.** В равномерный постоянный поток разреженного газа вносится периодическая решетка из бесконечно тонких плоских пластин длиной  $L$ , расстояние

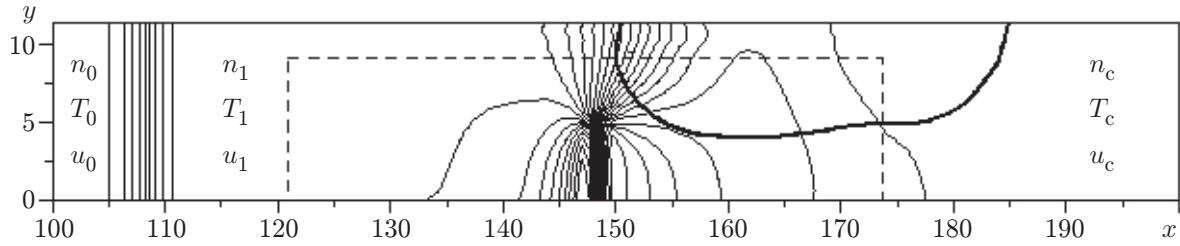


Рис. 1. Структура течения вблизи решетки при  $M_0 = 0,95$ ,  $T_w = 1$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0,77$ :

штриховая линия — граница области расчета уравнения Больцмана; сплошная — граница зоны сверхзвукового течения

между которыми равно  $l$ . Пластины располагаются в плоскости, ориентированной поперек потока. Длина периодичности  $L + l$ ,  $L/l = S$ . Если пластины в решетке расположены на значительном расстоянии друг от друга, то  $S \rightarrow 0$ , что соответствует обтеканию одиночных пластин. При  $S \rightarrow \infty$  набегающий поток взаимодействует с плоскостью, имеющей очень узкие щели. Параметры набегающего потока: плотность  $n_0$ , температура  $T_0$ , скорость  $u_0 = M_0 \sqrt{\gamma T_0}$ ,  $\gamma = 5/3$ . В качестве единицы длины и времени приняты длина и время свободного пробега молекул в набегающем потоке. Значения плотности и температуры отнесены к их значениям в набегающем потоке ( $n_0 = 1$ ,  $T_0 = 1$ ).

Данные задачи отличаются большим количеством параметров и соответственно многообразием реализующихся течений. Расчеты проводились при фиксированных геометрических параметрах решетки  $L = 10$ ,  $S = 0,77$ , варьировались скорость набегающего дозвукового потока и температурные условия на пластинах решетки.

В области расчета уравнения Больцмана, расположенной внутри прямоугольника, показанного на рис. 1 штриховой линией, предполагается степенной потенциал взаимодействия молекул с показателем  $1/12$ . Газ взаимодействует с поверхностью по закону диффузного отражения при заданной температуре поверхности. В уравнениях Навье — Стокса вязкость и теплопроводность полагаются пропорциональными  $T^{2/3}$ .

Поскольку течение периодически по  $Y$ , вычисления проводились в области  $0 < Y < Y_g$ . При  $Y = Y_g$  и на плоскости  $Y = 0$ , проходящей через середину пластины, задавались условия симметрии. Уравнение Больцмана решалось на пространственной равномерной сетке  $60 \times 20$ , в пространстве скоростей задавалось приблизительно 4000 узлов. Для уравнений Навье — Стокса в зависимости от конкретного варианта использовалась та же равномерная координатная сетка с числом узлов от  $350 \times 23$  до  $350 \times 45$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

Предлагаемая схема расчетов позволяет не только определить общие характеристики течения, но и проанализировать на кинетическом уровне процессы на решетке. Это дает возможность вычислить силу сопротивления, трение, тепловой поток, температурный скачок и скорость скольжения на пластине.

Коэффициенты сопротивления  $C_x$ , трения  $C_f$  и теплопередачи  $C_q$  определяются следующим образом:

$$C_x = \frac{2F_x}{n_0 m u_0^2 L}, \quad C_f = \frac{2F_y}{n_0 m u_0^2 L}, \quad C_q = \frac{Q}{n_0 m u_0^3 L},$$

$$F_x = \int p_{xx}^{(1)} dy - \int p_{xx}^{(2)} dy, \quad F_y = \int p_{xy}^{(1)} dy + \int p_{xy}^{(2)} dy, \quad Q = \int q^{(1)} dy - \int q^{(2)} dy.$$

Здесь  $F_y$  — сила трения, действующая на верхнюю половину пластины;  $m$  — масса молекулы;  $q$  — тепловой поток;  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$  — компоненты напряжения трения; для величин с

индексом (1) интегрирование проводится при  $Y > 0$  по обращенной к набегающему потоку поверхности, для величин с индексом (2) — по тыльной поверхности. Величины  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ ,  $q$  находятся интегрированием в пространстве скоростей:

$$p_{xx}^{(1,2)} = \int m \xi_x^2 f_s d\xi, \quad p_{xy}^{(1,2)} = \pm \int m \xi_x \xi_y f_s d\xi, \quad q^{(1,2)} = \pm \frac{1}{2} \int \xi_x m \xi^2 f_s d\xi$$

( $\xi_x$ ,  $\xi_y$  — скорости молекул по направлению координат  $x$ ,  $y$ ;  $\xi$  — модуль скорости; знаки “+”, “−” соответствуют индексам (1), (2)).

Пусть  $\mathbf{b}$  — внешняя нормаль к поверхности. Функция распределения  $f_s$  на пластине определяется в виде суммы

$$f_s = f_i^* + f_w^*,$$

$$f_i^* = \begin{cases} f_i, & (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) < 0, \\ 0, & (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) \geq 0, \end{cases} \quad f_w^* = \begin{cases} f_w, & (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) > 0, \\ 0, & (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) \leq 0. \end{cases}$$

Такая запись свидетельствует о том, что от  $f_i$  берется часть распределения по скоростям, направленным к пластине, а от  $f_w$  — часть распределения с противоположным направлением скоростей. Функция  $f_i$  определяется из численного решения задачи, а функция  $f_w$  — по формуле

$$f_w = n_w \left( \frac{m}{2\pi k T_w} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m \xi^2}{2\pi k T_w} \right).$$

Температура пластины  $T_w$  полагается заданной,  $n_w$  находится из условия непротекания

$$\int_{(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) < 0} \xi_x f_i d\xi = \int_{(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) > 0} \xi_x f_w d\xi.$$

Скачок температуры  $\Delta T$  и скорость скольжения  $v_s$  определяются из соотношений

$$\Delta T^{(1,2)} = \frac{m}{3n_s k} \int \xi^2 f_s d\xi - T_w, \quad v_s^{(1,2)} = \frac{1}{n_s} \int \xi_y f_s d\xi, \quad n_s^{(1,2)} = \int f_s d\xi.$$

Обезразмеривание величин на пластине проводится следующим образом:  $p_{xx}^{(1,2)}/(mn_0 u_0^2)$ ,  $p_{xy}^{(1,2)}/(mn_0 u_0^2)$ ,  $2q^{(1,2)}/(mn_0 u_0^3)$ ,  $\Delta T^{(1,2)}/T_0$ ,  $v_s^{(1,2)}/u_0$ .

**Основные результаты.** В данной работе изучается случай течения, выбранный следующим образом. Как и при исследовании аналогичных течений для сверхзвуковых потоков [12], длина пластины  $L$  фиксированна и равна 10 длинам свободного пробега в набегающем потоке. Параметр  $S$  выбирался таким образом, чтобы изменения температуры пластины оказывали существенное влияние на результирующее течение вблизи решетки и за ней. В случае, когда размеры зазоров в 2–3 раза превышают размеры пластин, условия на поверхности незначительно влияют на течение. При уменьшении размеров зазоров до долей длины пластины температура газа за пластиной будет приблизительно равна температуре пластины, а плотность можно определить из приближенного равенства давлений. Поэтому интервал значений  $S$  порядка единицы (в данной работе  $S = 0,77$ ) наиболее интересен с точки зрения оценки возможности изменения параметров потока вариацией условий на решетке. При этом течение является существенно двумерным лишь вблизи пластин, а на расстоянии, равном нескольким сотням длин пробега от решетки, оно быст-

ро выходит на близкое к одномерному. Это облегчает численное исследование существенно дозвуковых режимов, требующих отнесения граничных условий на значительные расстояния.

При  $M_0 = 2,5$  [12] за решеткой устанавливается сверхзвуковой поток с локальным числом  $M_c = 1,5$ . При уменьшении  $M_0$  конфигурация сверхзвуковой зоны изменяется, и при  $M_0 \approx 1,1$  происходит образование локальной сверхзвуковой зоны в зазорах решетки. При дальнейшем уменьшении скорости набегающего потока размеры сверхзвуковых зон уменьшаются. Исследуемый в данной работе случай  $M_0 = 0,6$  соответствует пограничному режиму между полностью дозвуковыми течениями и течениями с локальными сверхзвуковыми зонами.

Общая картина реализующегося течения со сверхзвуковой локальной зоной представлена на рис. 1, где приведены результаты расчета варианта течения при  $M_0 = 0,95$ ,  $S = 0,77$ . Показано поле плотности при  $t = 60$ , что соответствует началу процесса. Взаимодействие невозмущенного потока ( $n_0 = 1$ ,  $T_0 = 1$ ,  $u_0 = 1,23$ ) с решеткой приводит к появлению отраженной ударной волны, распространяющейся вверх по потоку с относительной скоростью 0,66 и оставляющей за собой поток газа ( $n_1 = 1,65$ ,  $T_1 = 1,47$ ,  $u_1 = 0,48$ ,  $M_1 = 0,31$ ), который, протекая через зазоры решетки, ускоряется и образует сверхзвуковую зону (сплошная линия на рис. 1). С течением времени ударная волна уходит вверх по течению, а вблизи пластины и вниз по течению устанавливается практически стационарное течение со средними по координате  $y$  параметрами:  $n_c = 0,75$ ,  $T_c = 1,09$ ,  $u_c = 1,06$ ,  $M_c = 0,81$ . При этом сверхзвуковая зона по форме близка к представленной на рис. 1.

Процесс развития рассматриваемых течений описывается несколькими характерными временами. Первое из них соответствует образованию отраженной ударной волны и формированию в первом приближении потоков в зазорах решетки. Это происходит за время  $t = 50 \div 100$  и соответствует состоянию потока, показанному на рис. 1. За время  $t \approx 200 \div 300$  происходит стабилизация поля плотности и температуры вблизи решетки, однако расход, определяемый интегралом произведения плотности и продольной скорости, отличается от постоянного значения на 3–5 %. Это различие исчезает за время  $t \approx 1000$ . Отметим, что опытным путем установлена независимость полученных решений от места установления границы вниз по потоку, если последняя находилась на расстоянии не менее 150–200 единиц. Причем на этой границе ставились так называемые мягкие условия — отсутствие потоков. На левой границе поддерживались условия, соответствующие набегающему потоку. При подходе ударной волны граница перемещалась на 10 единиц по направлению к решетке и на ней задавались значения  $n_1$ ,  $u_1$ ,  $T_1$ .

Основные обсуждаемые в работе результаты относятся к варианту течения при  $M_0 = 0,6$ ,  $T_w = 1$ . К моменту времени  $t = 180$  вблизи решетки устанавливаются распределения, которые медленно эволюционируют к стационарному решению, изменяясь не более чем на несколько процентов. На рис. 2 представлены поля плотности, температуры и продольной скорости. Кроме того, показана область, в которой решалось кинетическое уравнение Больцмана ( $dx = 0,85$ ,  $dy = 0,5$ ,  $dt = 0,1$ ). В данный момент ударная волна ушла далеко влево, сформировав набегающий на решетку дозвуковой поток с параметрами  $n_1 = 1,32$ ,  $T_1 = 1,21$ ,  $u_1 = 0,39$ ,  $M_1 = 0,27$ .

Поскольку пластина полагается очень тонкой и находящейся между узлами сетки, она оказывается в середине линейного профиля. Для правильного зрительного восприятия изолинии, находящиеся на расстоянии  $dx/2$  перед пластиной и за ней, необходимо переместить вплотную к пластине.

Определим удельный расход  $R$  как отношение суммы произведений  $n_i u_i$  по всем счетным точкам в направлении  $y$  к числу этих точек. Тогда во входном сечении расход равен  $R_0 = 0,77$ , за ударной волной он принимает значение  $R_1 = 0,51$ . Для удобства введем

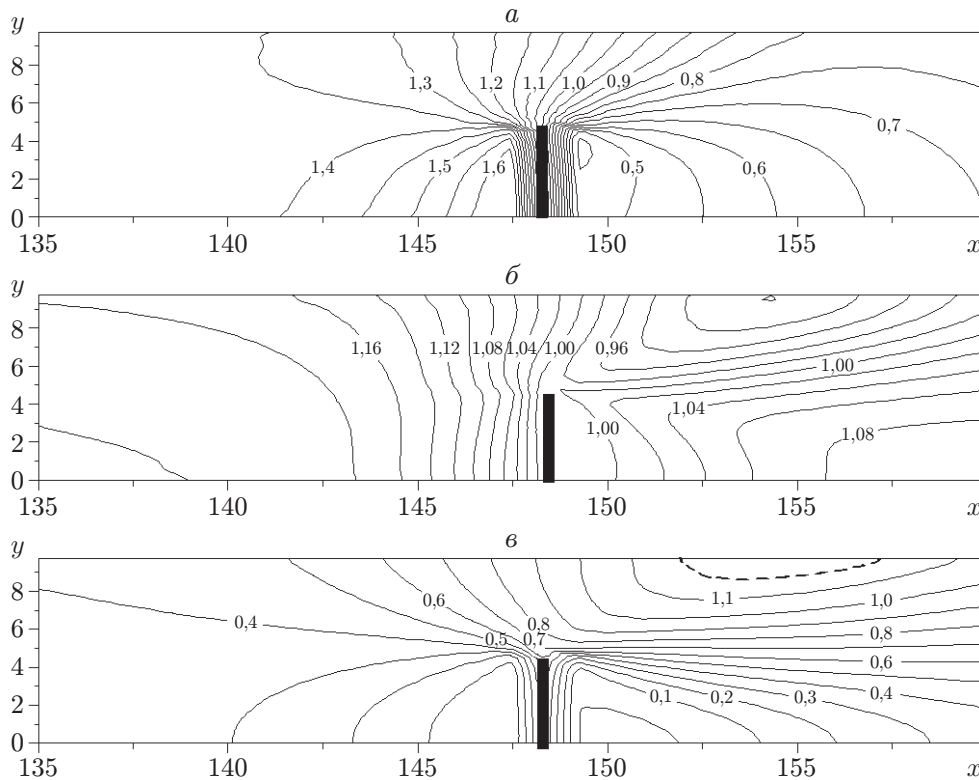


Рис. 2. Структура течения вблизи решетки при  $M_0 = 0,6$ ,  $T_w = 1$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0,77$ :

$a$  — плотность,  $b$  — температура,  $v$  — продольная скорость; штриховая линия — граница зоны сверхзвукового течения

расход  $R_g = R_0(L + l)/l$ . В рассматриваемом варианте он равен 0,44, т. е. сравним с  $R_1$ . За решеткой в сечении  $x_c$  средние значения плотности, температуры и продольной скорости равны  $n_c = 0,80$ ,  $T_c = 1,08$ ,  $u_c = 0,65$ ,  $M_c = 0,48$ . Близость расходов  $R_c = 0,52$  и  $R_1$  свидетельствует об установлении практически стационарного режима.

Распределение основных параметров потока вблизи пластин приведено на рис. 3, 4.

Влияние температуры поверхности решетки на структуру течения показано на рис. 5, где приведены поля плотности и температуры, соответствующие изображенному на рис. 2 случаю течения, но при более высоких температурах на обеих поверхностях пластин ( $T_w = 3,5$ ). Изменение условий отражения ударной волны привело к изменению ее скорости и параметров за ней:  $n_1 = 1,41$ ,  $T_1 = 1,28$ ,  $u_1 = 0,29$ ,  $M_1 = 0,19$ . Расход  $R_1 = 0,41$  сопоставляется с геометрическим расходом  $R_g$ . За решеткой устанавливается течение с параметрами  $n_c = 0,55$ ,  $T_c = 1,77$ ,  $u_c = 0,77$ ,  $M_c = 0,45$ . Следует отметить, что в рассматриваемом случае выравнивание потока за решеткой происходит на значительно более протяженном участке, чем в случае холодной решетки. Скачок температуры на поверхности пластины, обращенной к потоку, в среднем составляет 0,5, а на противоположной поверхности близок к единице, скачок скорости скольжения находится в диапазоне  $0,05 \div 0,10$ . Основные характеристики взаимодействия принимают значения  $C_x = 2,51$ ,  $C_q = -6,64$ ,  $C_f = 0,097$ .

**Заключение.** В рассмотренных случаях дозвукового течения интенсивность отошедшей ударной волны и пропускная способность решетки определяются прежде всего геометрией решетки — ее скважностью. Анализ результатов течений при различных температу-

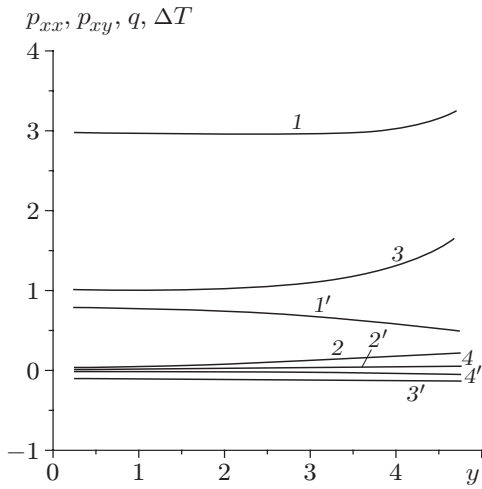


Рис. 3

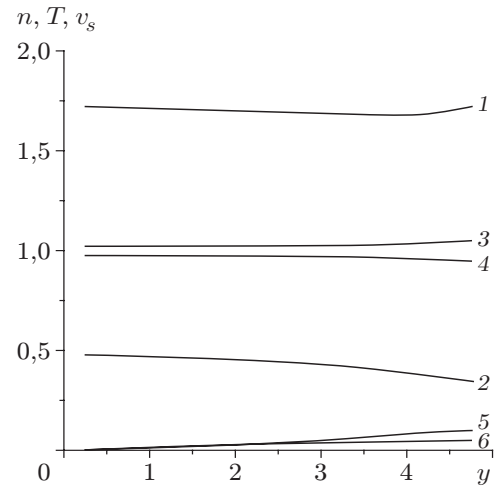


Рис. 4

Рис. 3. Распределение параметров вдоль пластины для течения, структура которого показана на рис. 2:

1-4 — параметры на поверхности пластины, обращенной к набегающему потоку, 1'-4' — то же на противоположной поверхности; 1, 1' — потоки импульса, 2, 2' — силы трения, 3, 3' — потоки энергии, 4, 4' — скачки температур

Рис. 4. Распределения плотностей (1, 2), температур (3, 4) и касательных скоростей (5, 6) на расстоянии от поверхности пластины, равном 0,42, для течения, структура которого показана на рис. 2 ( $C_x = 2,33$ ,  $C_q = 1,04$ ,  $C_f = 0,13$ )

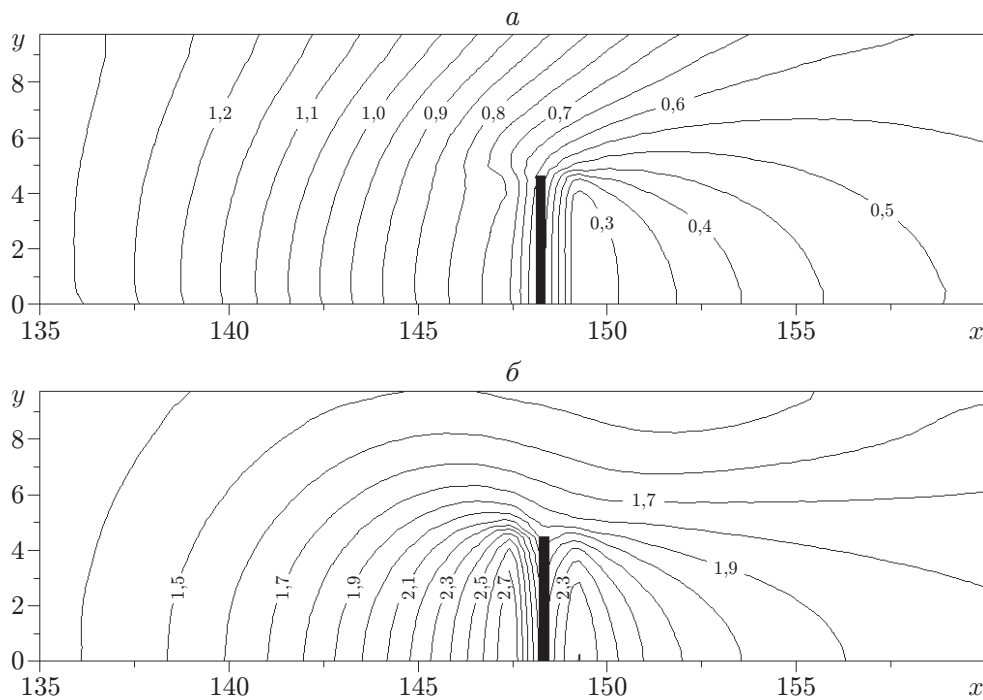


Рис. 5. Структура течения вблизи решетки при  $T_w = 3,5$ :  
а — плотность, б — температура

рах пластины  $T_w$  показывает, что, изменяя температуру от  $T_0$  до  $3,5T_0$  (в основном за счет изменения условий отражения потока от решетки в начальный период формирования ударной волны), можно регулировать расход в диапазоне десятков процентов. Температура и плотность проходящего сквозь решетку потока существенно зависят от температурных условий на поверхностях пластин. Так, повышение температуры пластины в 3,5 раза ведет к нагреванию потока за ней в 1,7 раза и соответствующему уменьшению плотности. Еще более существенно изменяются параметры потока в окрестности пластин. Вместо областей сжатия и нагрева (см. рис. 2) образуются зоны разрежения и охлаждения (см. рис. 5). Потoki импульса и энергии, приходящие на элементы решетки, изменяются не только количественно, но и качественно.

При  $M_0 < 0,6$  ( $L = 10$ ,  $S = 0,77$ ) течение за решеткой всюду дозвуковое. С увеличением скоростей набегающего потока в зазорах решетки образуются локальные сверхзвуковые зоны, в то время как в теневой области за пластинами течение остается дозвуковым. При  $M_0 > 1,1$  сверхзвуковые области перекрываются, образуя на некотором расстоянии от решетки общее сверхзвуковое течение [12]. В трансзвуковых течениях сплошной среды локальные сверхзвуковые зоны, как правило, замыкаются ударными волнами. В разреженном газе ширина слабых ударных волн составляет несколько десятков длин свободного пробега. В рассмотренных течениях размер местной сверхзвуковой зоны сопоставим с шириной образующейся за ней ударной волны, и их структуры перекрываются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Акиншин В. Д., Борисов С. Ф., Породнов Б. Т., Суетин П. Е.** Экспериментальное исследование течения разреженных газов в капиллярном сите при различных температурах // ПМТФ. 1974. № 2. С. 45–49.
2. **Гувернюк С. В., Савинов К. Г., Ульянов Г. С.** Сверхзвуковое обтекание затупленных перфорированных экранов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 1. С. 143–149.
3. **Гринь В. Т., Крайко А. Н., Миллер Л. Г.** К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке // ПМТФ. 1981. № 3. С. 95–103.
4. **Гувернюк С. В.** Адиабата проницаемой поверхности // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 3. С. 84–89.
5. **Миллер Л. Г.** Нестационарное истечение газа в вакуум через перфорированную перегородку // ПМТФ. 1983. № 2. С. 62–65.
6. **Плотников М. Ю., Ребров А. К.** Диссипативные процессы в сверхзвуковом одномерном потоке газа через проницаемую преграду // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 4. С. 158–167.
7. **Попов С. П., Черемисин Ф. Г.** Пример совместного численного решения уравнений Больцмана и Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 3. С. 516–527.
8. **Попов С. П., Черемисин Ф. Г.** Совместное численное решение уравнений Больцмана и Навье — Стокса // Вычислительная динамика разреженного газа. М.: Вычисл. центр РАН, 2000. С. 75–103.
9. **Черемисин Ф. Г.** Консервативный метод вычисления интеграла столкновений Больцмана // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 1. С. 53–56.
10. **Черемисин Ф. Г.** Решение уравнения Больцмана при переходе к гидродинамическому режиму течения // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 4. С. 483–486.



11. **Попов С. П., Черемисин Ф. Г.** Консервативный метод решения уравнения Больцмана для центрально-симметричных потенциалов взаимодействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 1. С. 169–176.
12. **Попов С. П., Черемисин Ф. Г.** Обтекание сверхзвуковым потоком разреженного газа решетки плоских поперечных пластин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 3. С. 167–176.
13. **Попов С. П., Черемисин Ф. Г.** Динамика взаимодействия ударной волны с решеткой в разреженном газе // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 3. С. 31–38.
14. **Диесперов В. Н., Попов С. П.** Структура течения при нестационарном трансзвуковом обтекании плоской пластины с поперечным щелевым вдувом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 11. С. 1744–1755.

*Поступила в редакцию 27/IV 2005 г.,  
в окончательном варианте — 14/XI 2006 г.*

---