

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА СТРУКТУРУ  
И КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ**

*Ю. А. Березин, Г. И. Дудникова*

(Новосибирск)

Излагаются результаты численного решения задачи о распространении ударных волн в холодной разреженной плазме поперек магнитного поля при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности, проводится сравнение с результатами решения без учета теплопроводности. Показано, что при малых числах Маха ( $M < 2.5$ ) влиянием теплопроводности можно пренебречь. Для чисел Маха  $2.8 \lesssim M \lesssim 3.3$  получен изомагнитный скачок плотности. Увеличение амплитуды магнитного поля на границе плазмы приводит к разрушению изомагнитного скачка. Критические числа Маха, характеризующие при этом ударную волну,  $M_* > 3.4$ .

В настоящее время следует считать доказанным, что существуют критические числа Маха  $M_*$ , при которых происходит качественное изменение структуры ударных волн в разреженной плазме [1,2]. Подобное явление, как известно, имеет место и в обычном теплопроводном газе — изотермический скачок плотности. Тщательное исследование стационарных ударных волн в плазме без магнитного поля, но с учетом кулоновской проводимости и теплопроводности было проведено В. С. Имшенником в [3]. Показано, что в зависимости от скорости волны возможны как непрерывные, так и разрывные решения (изоэлектронно-термические скачки). Мортонем в [4] были изучены стационарные и нестационарные волны сжатия в двухжидкостной плазме при наличии магнитного поля, однако в его работе не рассмотрен эффект диссипации энергии, который необходим для возникновения ударных волн, и не учитывается теплопроводность. Вудс из анализа особых точек уравнений структуры ударной волны при наличии проводимости и теплопроводности нашел критические параметры, при которых решение становится разрывным [5]. Авторами была рассмотрена задача о структуре нестационарных и стационарных ударных волн в плазме поперек магнитного поля с учетом проводимости и электронной теплопроводности.

**1. Система уравнений и ее стационарные решения.** Для одномерного движения двухжидкостной квазинейтральной плазмы поперек магнитного поля с учетом проводимости, дисперсии и электронной теплопроводности имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H^2}{8\pi} + \rho u^2\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{3}{2} p + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{m_i m_e c^2}{8\pi e^2 \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left[ \frac{5}{2} p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \right. \right. \\ + \frac{H^2}{4\pi} + \frac{m_i m_e c^2}{32\pi^2 e^2 \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \left. \right] - \frac{c^2}{16\pi^2 \varepsilon} H \frac{\partial H}{\partial x} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{m_i m_e c^2}{16\pi^2 e^2} H \left( \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ \left. + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \left. \right\} &= 0, & p &= NT \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u H - \frac{c^2}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{m_e m_i c^2}{4\pi e^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{d}{du} \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{dH}{dx} \right) \right\} = 0$$

Здесь  $\rho = N(m_i + m_e)$  — плотность плазмы,  $N$  — число частиц каждого сорта в единице объема,  $\sigma$  — проводимость плазмы,  $\chi$  — коэффициент электронной теплопроводности. В уравнении энергии два последних члена в фигурных скобках дают джоулев нагрев электронов и эффект теплопроводности.

Для решения стационарной задачи перейдем в систему координат, связанную с волной. Будем рассматривать движения с характерным пространственным масштабом, обусловленным конечной проводимостью, а не дисперсией, поэтому пренебрежем дисперсионными эффектами, пропорциональными массе электрона. Используя непрерывность потока массы и импульса и переходя к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов плотности, скорости, давления, магнитного поля, длины и частоты столкновений величины  $\rho_0$

$$V_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}, \quad H_0^2 / 4\pi, \quad H_0$$

$$\delta = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0 V_A}, \quad \omega = \frac{eH_0}{\sqrt{m_i m_e c}}$$

( $\sigma_0 = N_0 e^2 / m_e \nu$ ,  $\nu = \text{const}$  — эффективная частота столкновений), получаем

$$\frac{dH}{dx} = M \left( H - \frac{M}{u} \right)$$

$$\beta \frac{p - Mu}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u (5p + Mu + 2H^2) - uH \left( H - \frac{M}{u} \right) + \beta MH \left( H - \frac{M}{u} \right) - C$$

$$p = p_0 + 0.5 + M^2 - Mu - 0.5H^2 \quad (1.2)$$

$$C = 0.5 M (5p_0 + M^2 + 2)$$

Здесь  $M$  — число Маха ( $M = U / V_A$ , где  $U$  — скорость волны),  $u$  — скорость частиц в системе волны

$$\beta = K\chi = \text{const}, \quad K = \frac{\kappa}{N N_0 \omega \delta^2}, \quad \kappa = \frac{\nu}{\omega}$$

Таким образом, задача о структуре стационарной ударной волны, при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности, сведена к системе двух обыкновенных уравнений (1.2). Стационарным состояниям плазмы перед волной (невозмущенное состояние) и за волной (возмущенное состояние) соответствуют особые точки 0 и 1 системы (1.2)

$$u_0 = M, \quad H_0 = 1, \quad p_0 \quad (1.3)$$

$$u_1 = \frac{M}{H_1}, \quad M^2 = \frac{p_1 - p_0 + 0.5(H_1^2 - 1)}{1 - H_1^{-1}}, \quad p_1 = \frac{p_0(4M - 1) + 0.5(H_1 - 1)^3}{4 - H_1} \quad (1.4)$$

Формулы (1.4) — условия Гюгонио для движений поперек магнитного поля.

Как показывает анализ, в рассматриваемом случае решение является разрывным, когда коэффициент при производной обращается в нуль, т. е.  $p_1 = Mu_1$ , отсюда получаем уравнение для определения критических параметров  $M_*$ ,  $H_*$  ударной волны

$$M_*^2 + p_0 - \frac{1}{2}(H_*^2 - 1) - \frac{2M_*^2}{H_*} = 0$$

В реальных условиях  $p_0 \ll 1$ , поэтому, используя соотношения (1.4), получим уравнение для критической амплитуды магнитного поля за фронтом волны

$$H_*^3 - 3H_*^2 + 2H_* - 6 = 0$$

откуда следует, что  $H_* = 3$ .

Таким образом, при наличии теплопроводности и проводимости профиль ударной волны является монотонным при  $H_1 < H_* = 3$ ,  $M < M_* = 3.46$ , а при  $H_1 > 3$ ,  $M > 3.46$  — разрывным. Этот результат, естественно, совпадает с результатом работы [5], где он получен на основе классификации особых точек исходной системы уравнений. Заметим, что величина критического числа Маха  $M_* = 3.46$  не зависит от конкретного вида коэффициента теплопроводности.

Если пренебречь влиянием теплопроводности, оставив только проводимость, то критические параметры ударной волны  $H_* \approx 2.66$ ,  $M_* \approx 2.76$ .

Найдем численно нелинейное решение задачи о структуре стационарной ударной волны в плазме с учетом проводимости и теплопроводности. Для этого необходимо провести анализ типа особых точек 0 и 1, соответствующих невозмущенному и возмущенному состояниям плазмы. Произведя линеаризацию уравнений (1.2) вблизи особых точек, т. е. полагая

$$u = u_{0,1} + u', \quad H = H_{0,1} + H' \quad (u' \ll u_{0,1}, \quad H' \ll H_{0,1})$$

получим характеристическое уравнение, корни которого для невозмущенного состояния равны

$$k^{(0)} = \frac{3M}{4p_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8p_0}{3} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right)} \right)$$

Отсюда следует, что корни  $k^{(0)}$  независимо от числа Маха  $M > 1$  вещественны и имеют одинаковый знак; поэтому особая точка 0 — узел. Корни характеристического уравнения в возмущенном состоянии  $k^{(1)}$  зависят от числа Маха: при  $M < 3.46$ ,  $H_1 < 3$  они вещественны и имеют разный знак (особая точка 1 — седло); при  $M > 3.46$ ,  $H_1 > 3$  они вещественны и имеют одинаковый знак (особая точка 1 — узел). Таким образом, когда скорость ударной волны меньше критической, особые точки 0 и 1, как и в обычном газе, образуют пару узел — седло.

Доказательство существования и единственности решения в этом случае можно провести аналогично, например, [6]. Когда скорость ударной волны больше критической, нельзя построить профиль, непрерывный по всем функциям.

Используя проведенный выше анализ, получено численно решение системы (1.2), которое дает структуру стационарной ударной волны.

Ниже приведены ширины профилей плотности частиц  $\Delta_\rho$  и магнитного поля  $\Delta_H$  для различных чисел Маха.

$H_1$	2.60	2.70	2.80	2.90	2.93	2.95	2.98	2.99
$M$	2.66	2.83	3.02	3.23	3.29	3.34	3.41	3.44
$\Delta_\rho$	0.46	0.34	0.24	0.16	0.14	0.12	0.10	0.09
$\Delta_H$	0.90	0.80	0.70	0.60	0.58	0.56	0.55	0.53

Как обычно, ширина фронта определяется по формулам

$$\Delta_\rho = \frac{\rho_1 - 1}{|d\rho/dx|_{\max}}, \quad \Delta_H = \frac{H_1 - 1}{|dH/dx|_{\max}}$$

По мере увеличения числа Маха профиль плотности становится все более крутым по сравнению с профилем магнитного поля.

Видно, что при изменении числа Маха от 2.66 до 3.44 ширина профиля плотности уменьшается примерно в 5 раз, тогда как ширина профиля магнитного поля убывает примерно в 1.5 раза. Резкое увеличение крутизны профиля плотности при  $M \rightarrow M_* = 3.46$  свидетельствует о том, что этот профиль стремится к разрывному. Расчет при различных коэффициентах теплопроводности  $\chi$  показывает, что при неизменной ширине фронта магнитного поля ширина профиля плотности увеличивается с ростом коэффициента теплопроводности. Так, в случае  $M = 3.44$  имеем

$$\Delta\rho = 0.09 \quad \text{при } \beta = 2.0,$$

$$\Delta\rho = 0.18 \quad \text{при } \beta = 20$$

## 2. Нестационарные решения.

Система уравнений (1.1), записанная в безразмерных переменных и лагранжевых координатах, была решена на ЭВМ с использованием разностной схемы второго порядка точности. Полагая, что в начальный момент времени однородная квазинейтральная холодная плазма ( $p_0 \ll H_0^2 / 8\pi$ ) плотности  $N_0$  занимает область  $0 \leq x \leq a$  (направление невозмущенного магнитного поля совпадает с осью  $x$ ), на границе которой нарастает магнитное поле по закону  $H = 1 + A(1 - e^{-\theta x})$  ( $\theta$  — частота внешнего поля в единицах  $\omega$ ,  $A$  — амплитуда внешнего поля в единицах  $H_0$ ), запишем следующие начальные и граничные условия для решения системы (1.1):

$$\begin{aligned} H(0, \tau) &= 1 + A(1 - e^{-\theta x}) \\ p(0, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(a, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(a, \tau) = 0 \\ u(a, \tau) &= 0, \quad H(x, 0) = N(x, 0) = 1 \\ u(x, 0) &= p(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

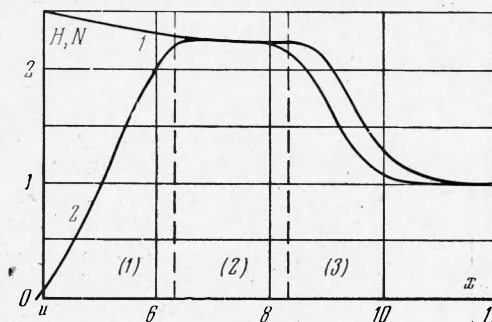
Здесь  $\tau$  — время в единицах  $\kappa / \omega$ ,  $T$  — электронная температура в единицах  $H_0^2 / 8\pi N_0$ ,  $p$  — давление в единицах  $H_0^2 / 8\pi$ .

Перейдем к обсуждению полученных результатов решения сформулированной задачи для низких чисел Маха  $M < 2.5$ . Для значений амплитуды на границе плазмы  $1.5 \leq A < 2$  сформировавшаяся ударная волна является квазистационарной, т. е. с некоторого момента времени  $\tau$  ( $\tau$  зависит от граничных условий для магнитного поля) скорость волны, ее амплитуда и ширина фронта остаются практически постоянными.

Заметим, что число Маха ударной волны определялось по точкам максимума крутизны магнитного поля, т. е.  $M = (x_2 - x_1) / (\tau_2 - \tau_1)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — эйлеровы координаты  $\max |\partial H / \partial x|$  во фронте ударной волны в моменты времени  $\tau_2$  и  $\tau_1$ .

Представленные на фиг. 1 типичные профили магнитного поля  $H$  (кривая 1) и плотности частиц  $N$  (кривая 2) для квазистационарной ударной волны

$$(A = 1.5, \quad \theta = 0.2, \quad \kappa = 10, \quad \beta = 2, \quad M \approx 2.2)$$



Фиг. 1

в зависимости от эйлеровой координаты имеют следующие характерные области:

1) область поршня, связанная с диффузией магнитного поля в плазму на расстояние  $\delta_1 \sim (c^2 t / 4\pi\sigma)^{1/2}$ ; в этой области происходит непрерывный переход от максимума магнитного поля на границе плазмы до значения, равного амплитуде ударной волны; аналогично ведет себя температура, а плотность возрастает от нуля до максимального значения;

2) область перехода поршень — фронт ударной волны, в которой магнитное поле, температура и плотность практически не меняются;

3) фронт ударной волны с шириной  $\Delta$ , равной диссипативному размеру  $\Delta \sim c^2 / 4\pi\sigma V_A$ .

Профиль плотности отстает от профиля магнитного поля на расстояние  $\delta_2 \sim 0.6\delta \sim c^2 / 4\pi\sigma V_A (M - 1)$ , как и должно быть при резистивном механизме диссипации во фронте ударной волны. Характерной особенностью квазистационарной ударной волны является наличие области 2, которая возникает в момент отхода волны от поршня. Заметим, что для больших значений амплитуд внешнего поля (например,  $A = 10$ ,  $\theta = 0.2$ ) ударная волна не формируется и происходит «сгребание» плазмы внешним магнитным полем.

Из уравнений движения можно найти значения электрических полей и потенциала

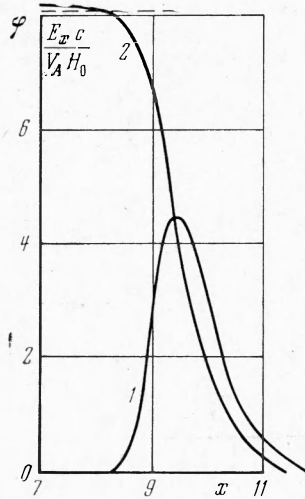
$$E_x = -\frac{m_i}{eN(m_i + m_e)} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{m_i - m_e}{m_i} \frac{H^2}{8\pi} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{c} \left( uH - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \quad \varphi = \int_x^a E_x dx$$

Поведение  $y$ -компоненты электрического поля аналогично поведению магнитного поля;  $x$ -компонента электрического поля имеет параболический вид с максимумом во фронте ударной волны, поскольку именно здесь нужно большое поле для выполнения условия квазинейтральности. На фиг. 2 приведена зависимость  $x$ -компоненты электрического поля (кривая 1) и потенциала (кривая 2) от эйлеровой координаты в квазистационарной ударной волне с параметрами  $A = 1.5$ ,  $\theta = 0.2$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\beta = 2$ . Пунктиром нанесено значение потенциала  $\varphi_*$  за фронтом стационарной ударной волны, полученное из условий Гюгонио

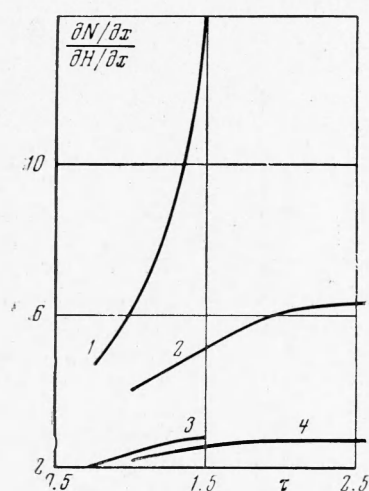
$$\varphi_* = M^2 \frac{\sqrt{m_i/m_e}}{2\kappa} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{V_A H_0 \delta}{c}$$

Проведенное сравнение решений задачи для малых чисел Маха ( $M < 2.5$ ) при значениях коэффициента теплопроводности  $\chi = 0$  и  $\chi \neq 0$  показало, что учет теплопроводности приводит лишь к незначительному увеличению ширины фронта квазистационарной ударной волны (ширина фронта ударной волны при  $\beta = 2$  приблизительно на 2% больше ширины фронта при  $\beta = 0$ ), т. е. при малых числах Маха влияние теплопроводности на структуру фронта ударной волны несущественно. Решение нестационарной задачи при  $M < 2.5$  находится в хорошем соответствии со стационарным решением.

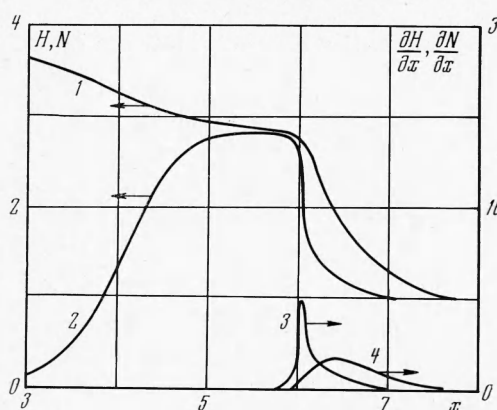


Фиг. 2

Рассмотрим результаты решения для чисел Маха  $M > 2.5$ . Для сравнения проведем краткий анализ без учета электронной теплопроводности ( $\chi = 0$ ). Увеличение амплитуды магнитного поля на границе плазмы приводит к росту амплитуды и скорости ударной волны. При этом усиливается влияние эффектов нелинейности и нестационарности, благодаря которым качественно меняется структура фронта ударной волны. Так, для амплитуды внешнего магнитного поля  $A > 2.6$  ударная волна без учета теплопроводности является нестационарной, т. е. ее скорость и ширина фронта непрерывно меняются со временем. Кроме того, в отличие от квазистационарного режима при незначительном изменении ширины фронта магнитного поля происходит непрерывное увеличение крутизны профиля плотности частиц, т. е. решение приближается к разрывному. Это имеет место при числах Маха  $M_* \gtrsim 2.8$



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 приведены зависимости максимума крутизны профилей плотности частиц  $\partial N/\partial x$  (кривые 1 и 2) и магнитного поля (кривые 3 и 4) в ударной волне при наличии электронной теплопроводности и магнитной вязкости для случая  $A = 2.7$ ,  $\kappa = 10$ , которые являются типичными для чисел Маха  $2.8 \lesssim M \lesssim 3.3$ . Кривым 1, 3 соответствует значение  $\beta = 0$ , а кривым 2, 4 — значение  $\beta = 2$ . Из графиков видно, что с некоторого момента времени  $\tau$  ( $\tau$  зависит от граничных условий) профиль плотности можно характеризовать приблизительно постоянной шириной  $\Delta_1$ ; скорость ударной волны при этом практически не меняется. Все это позволяет говорить о наличии квазистационарного режима, при котором происходит компенсация нелинейного укручения влиянием теплопроводности.

На фиг. 4 показаны пространственные профили магнитного поля 1, плотности частиц 2, производных плотности 3 и магнитного поля 4 во фронте ударной волны при изомагнитном скачке ( $A = 2.7$ ,  $\kappa = 20$ ,  $\beta = 2$ ,  $M \approx 3.1$ ).

Ширина фронта магнитного поля значительно больше ширины фронта плотности (фиг. 4), т. е. имеет место скачок плотности при практически постоянном магнитном поле — изомагнитный скачок плотности, который получен при значениях амплитуды внешнего поля  $2.7 \leq A \leq 4$  и амплитуды ударной волны  $2.9 \lesssim H \lesssim 3.0$ . При дальнейшем увеличении внешнего поля ( $A > 4$ ) происходит непрерывный рост амплитуды и скорости ударной волны за счет нестационарности, связанной с поршнем, приводящий к разрушению ударной волны.

На фиг. 5 приведены типичные пространственные профили магнитного поля  $H$  (кривые 1, 2, 3) и плотности частиц  $N$  (кривые 4, 5, 6) в последовательные моменты времени  $\tau$  — 1.4, 1.6, 1.8 для нестационарного режима ( $A = 8$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\beta = 2$ ).

Критические числа Маха, характеризующие ударную волну, при наличии теплопроводности и магнитной вязкости в момент разрушения  $3.4 \lesssim M_* \lesssim 3.8$  получены для значений амплитуды магнитного поля на границе плазмы  $5 \leq A \leq 8$ ; критическая амплитуда ударной волны  $3 \lesssim H_x \lesssim 3.2$ .

Проведем сравнение скорости частиц  $|u - MV_A|$  за фронтом ударной волны (в системе волны) со скоростью ионно-звуковых волн  $c_s = \sqrt{T/m_i}$ .

При небольших числах Маха  $c_s < |u - MV_A|$ . По мере увеличения скорости ударной волны скорость ионного звука возрастает, так как увеличивается температура плазмы, и в конце концов скорость ионного звука становится равной скорости частиц относительно фронта ударной волны. Для стационарного случая это равенство имеет место при величине магнитного поля за фронтом ударной волны, равной критическому значению  $H_* = 3$ .

Таким образом, момент разрушения ударной волны при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности соответствует моменту выравнивания скорости ионного звука и скорости частиц за фронтом ударной волны.

Следовательно, из решения нестационарной задачи можно сделать следующие выводы:

1) при малых числах Маха ударная волна является квазистационарной, теплопроводность приводит к незначительному увеличению ширины фронта;

2) для значений чисел Маха  $2.8 \lesssim M \lesssim 3.3$  при наличии электронной теплопроводности получен квазистационарный изомагнитный скачок плотности;

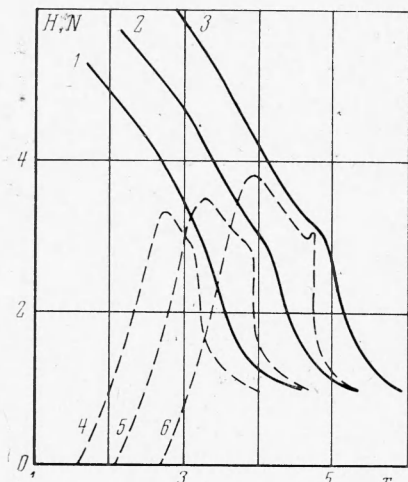
3) разрушение ударных волн при наличии теплопроводности наблюдалось для чисел Маха  $M_* > 3.4$ .

В заключение авторы благодарят Р. З. Сагдеева за внимание к работе.

Поступила 23 VI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, М., Атомиздат, 1964.
2. Куртмуллаев Р. Х., Масалов В. Л., Меклер К. И., Пильский В. И. Изомагнитный скачок во фронте сильной бесстолкновительной ударной волны. Письма ЖЭТФ, 1968, т. 7, вып. 2.
3. Имшеник В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 1.
4. Morton K. W. Finite amplitude compression waves in a collision-free plasma. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 11.
5. Woods L. C. On the structure of collisionless magneto-plasma shock waves at super-critical Alfvén-Mach numbers. J. Plasma Phys., 1969, vol. 3, No. 3.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.



Фиг. 5