

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

УДК 539.3

В. М. Богомольный

Московский технологический институт,
141220 Москва

Методом Галеркина проведено численное решение краевой задачи теории оболочек с неизвестной свободной границей. Аналитическое решение этой обратной задачи получено методом теории потенциала. Результаты вычислений неизвестной области решения основного уравнения типа Гельмгольца для незамкнутой по двум координатам сферической оболочки сравниваются с данными расчета методом конечных элементов.

К решению уравнения Гельмгольца сводится линейная теория пластин и цилиндрических оболочек [1–4], поэтому полученные решения, в частности, могут быть использованы для выбора формы отверстий (или подкреплений) оболочек вращения, обеспечивающей минимум концентрации напряжений [5].

Численное решение краевых задач с неизвестной границей представляет определенные вычислительные трудности [6–8], поэтому в данной работе показаны возможности упрощения численного решения и использования аналитического приближенного метода.

Решения обратных задач теории упругости приведены в [9, 10]. Максимальный размер области решения гиперболического уравнения торообразной оболочки был определен в [11] методом характеристик. В настоящей работе решена аналогичная задача в эллиптической области.

1. Рассмотрим сектор сегмента сферической оболочки, ограниченный координатами $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ (φ, θ — угловые координаты в окружном и меридиональном направлении). К краю θ_1 через подвижный жесткий диск приложена сила P_z , край θ_2 жестко закреплен и остается неподвижным (рис. 1). Края $\varphi = 0$ и $\varphi \approx 2\pi$ свободны от внешних усилий.

Зона влияния края $\varphi = 0$ (определяющая область решения основного уравнения оболочки) неизвестна и находится методом интегральных уравнений. Так как моментное напряженное состояние оболочки изменяется быстрее, чем растягивающие усилия, для определения неизвестной области решения используем безмоментную теорию оболочек. При этом основное уравнение имеет вид [12]

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.1)$$

где $U = -T_2 R_1 \sin^2 \theta$; T_2 — растягивающее усилие в окружном направлении; R_1 и R_2 — радиусы главных кривизн срединной поверхности в меридиональном и окружном направлении.

При малых углах θ , принимая $\sin \theta \approx \theta$ и $\cos \theta \approx 1$, преобразуем (1.1) к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{9}{4} W = 0, \quad W = T e^{5\beta/2}, \quad \beta = \ln \theta. \quad (1.2)$$

Краевые условия принимаем с учетом непрерывности и осевой симметрии напряжен-

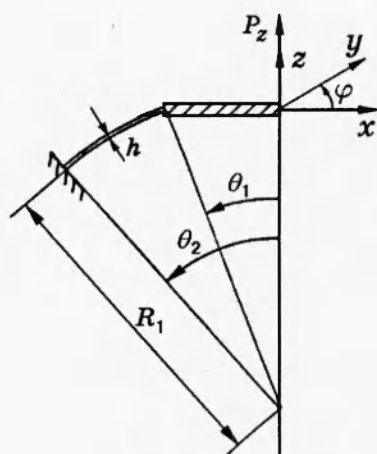


Рис. 1

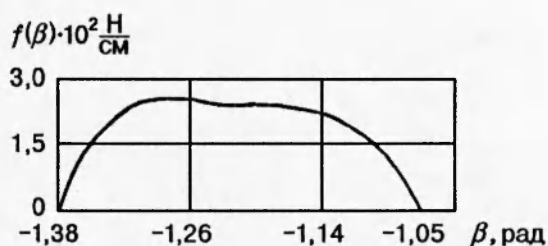


Рис. 2

ного состояния вне зоны влияния свободного края $\varphi = 0$:

$$W|_{\varphi=0} = 0, \quad W|_L = f(\beta), \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi}|_L = 0. \quad (1.3)$$

Здесь L — неизвестная граница области решения уравнения (1.1); $f(\beta)$ — функция, известная из расчета замкнутой по φ оболочки. При параметрах оболочки $0,25 \leq \theta \leq 0,35$ рад, $R_1 = 382$ мм, $h = 0,1$ мм, $E = 2,1 \cdot 10$ МПа (модуль упругости), $\mu = 0,3$ (коэффициент Пуассона) и $P = 9,8$ Н функция $f(\beta)$, вычисленная по стандартной программе расчета оболочек [13], приведена на рис. 2.

Вводя функцию $\Phi(\beta, \varphi)$, преобразуем уравнение (1.2) к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{9}{4} \Phi = F(\beta), \quad (1.4)$$

$$\Phi(\beta, \varphi) = f(\beta) - W(\beta, \varphi), \quad F(\beta) = \frac{d^2 f}{d\beta^2} - \frac{9}{4} f.$$

Область решения уравнения (1.4) аппроксимируем набором прямоугольных элементов шириной d_j и высотой a_j ($j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) (рис. 3). Слева от сечения $I-I$ на рис. 3 расположена полубесконечная полоса $j = 0$, неизвестная часть границы области решения (1.4) представляет собой ступенчатую ломаную линию L .

Запишем краевые условия (1.3) для уравнения (1.4) с учетом замены переменных:

$$\Phi|_{\varphi=0} = f(\beta), \quad \Phi|_L = 0; \quad (1.5)$$

на сторонах прямоугольных элементов, параллельных оси φ , принимаем

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0. \quad (1.6)$$

В математическом описании краевая задача (1.4)–(1.6) аналогична задаче распространения электромагнитных волн в замкнутой системе прямоугольных волноводов. На границе a_0 первого ($j = 1$) прямоугольника в поперечном сечении волновода, показанном штриховой линией на рис. 3, задается источник возмущения и рассматриваются распространение и отражение волн в направлении оси φ [14].

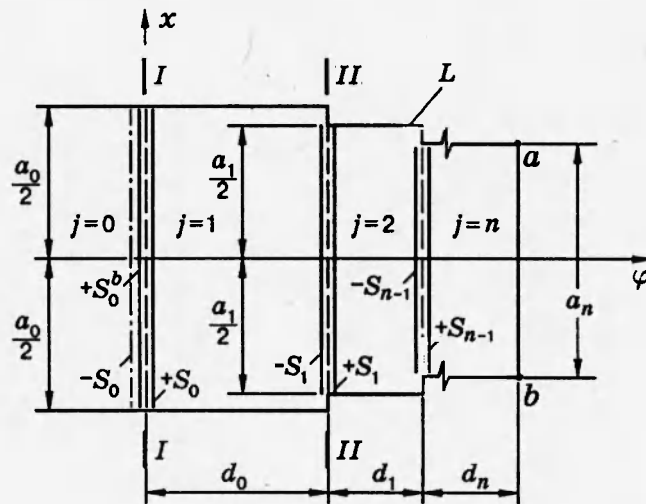


Рис. 3

Решение краевой задачи (1.4)–(1.6) для каждого элемента имеет вид [14–16]

$$\Phi(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_m^j \frac{\sin \frac{n\pi}{a_j} (x + \frac{a_j}{2})}{\gamma_l \operatorname{sh} \gamma_l d_j}; \quad (1.7)$$

$$F_m^j = \frac{\varepsilon_n}{2a_j} \int \int_{G(x, \varphi)} S_j(x) \sin \frac{n\pi}{a_j} (x + \frac{a_j}{2}) \eta dx d\varphi, \quad (1.8)$$

где x — новая переменная, выбранная таким образом, чтобы ось φ была осью симметрии прямоугольных элементов;

$$\gamma_l = \left[\left(\frac{n\pi}{a_l} \right)^2 - r^2 \right]; \quad r^2 = -\frac{9}{4} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n);$$

число Неймана

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0; \end{cases}$$

функция Грина

$$S_j(x) = \frac{d^2 f_{0j}(x)}{dx^2} + r^2 f_{0j}(x), \quad f_{0j}(x) = \sum_{\alpha=1}^m B_{j\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right); \quad (1.9)$$

$B_{j\alpha}$ — неизвестные коэффициенты;

$$\eta = \begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_l (d - \hat{\varphi}) \operatorname{ch} \gamma_l \varphi^0 & \text{при } \varphi^0 < \hat{\varphi}, \\ \operatorname{ch} \gamma_l \hat{\varphi} \operatorname{ch} \gamma_l (d - \varphi^0) & \text{при } \varphi^0 > \hat{\varphi}; \end{cases}$$

$\hat{\varphi}$ — координата сопряжения прямоугольных элементов; φ^0 — координата плоскости интегрирования функции влияния, которая характеризует электромагнитные поля в отдельных прямоугольных элементах. Функция $\eta(\varphi^0, \hat{\varphi})$ находится на основе теоремы эквивалентности, при этом действительные источники электромагнитного поля заменяются эквивалентными поверхностными токами и формулируются интегральные уравнения типа (1.8)

[16].

В сечении $I-I$ (рис. 3) решение (1.7) имеет вид

$$\Phi(x, n) = \frac{1}{\gamma_0} \sum_{m=0}^{\infty} F_m^{(0)} \sin \frac{n\pi}{a_0} \left(r + \frac{a_0}{2} \right) e^{\pm \gamma_1 \varphi}; \quad (1.10)$$

$$F_m^{(0)} = \frac{\varepsilon_n}{2a_0} \int \int_{G(x, \varphi)} \tilde{S}_0(x) \sin \frac{n\pi}{a_0} \left(x + \frac{a_0}{2} \right) e^{\pm \gamma_1 \varphi}. \quad (1.11)$$

Здесь $\tilde{S}_0(x) = S_j(x) + S_0^b(x)$; $S_0^b(x)$ определяется выражением

$$S_0^b(x) = \frac{d^2 f_0^b(x)}{dx^2} + r^2 f_0^b(x), \quad f_0^b(x) = \sum_{i=1}^3 A_i \sin \frac{i\pi}{a_0} \left(x + \frac{a_0}{2} \right);$$

$f_0(x)$ — разложение функции $f(\beta)$, задаваемой в краевых условиях (1.5), в ряд по синусам; верхний знак в показателе экспоненты принят для $\varphi < \hat{\varphi}$, а нижний — для $\varphi > \hat{\varphi}$.

Из условий сопряжения решений (1.7) для каждого прямоугольного элемента в сечениях $I-I$ и $II-II$ получается следующая система уравнений (остальные уравнения имеют аналогичный вид и не приводятся):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j=0} \Big|_{\varphi=0-\Delta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j=1} \Big|_{\varphi=0+\Delta} && \text{(сечение } I-I), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j=1} \Big|_{\varphi=d_0-\Delta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j=2} \Big|_{\varphi=d_0+\Delta} && \text{(сечение } II-II) \end{aligned} \quad (1.12)$$

(Δ — бесконечно малое приращение координаты φ).

При заданных a_j, \dot{a}_j после интегрирования уравнений (1.12) получим систему алгебраических уравнений, из которой находятся коэффициенты $B_{j\alpha}$.

Первое граничное условие (1.5) — источник возмущения. Условие минимума поля «отраженной волны» определяет зону влияния источника и соответствует минимуму интеграла J_0 :

$$J_0 = \int_{-a_0/2}^{a_0/2} \left[\frac{d^2}{dx^2} (B_{0\alpha} \xi) + r^2 B_{0\alpha} \xi \right] dx, \quad \xi = \sin \frac{\alpha\pi}{a_0} \left(x + \frac{a_0}{2} \right).$$

Задаваясь последовательным набором значений a_j, \dot{a}_j , начиная от максимально возможных, и проводя их дискретное уменьшение с шагом $\bar{\Delta} = 0,01$, вычисляем интеграл J_0 . Из условия минимума J_0 определяем максимальный размер области решения φ_0 , в рассматриваемом случае при приведенных параметрах оболочки $\varphi_0 = 0,74$ рад.

Как следует из (1.10), при отрицательном значении r^2 решение убывает в направлении φ по экспоненте. В данном случае производная $d\Phi/d\varphi$ на участке границы ab (рис. 3) практически равна нулю, что соответствует условию осесимметричности и непрерывности напряженного состояния оболочки вращения вне зоны влияния свободного края $\varphi = 0$. Показатель экспоненты также зависит от номера члена ряда (1.10). Из расчета следует, что ряд (1.10) быстро убывает с увеличением номера его членов, и с достаточной для практических приложений точностью в нем можно использовать только первые три члена.

Расчеты показали, что увеличение в 2 раза функции $f(\beta)$ (без изменения ее формы) в первом граничном условии (1.5) приводит к росту максимального размера неизвестной области решения только на 14 %. Для сферической оболочки с приведенными параметрами

Окружная координата, рад	$\sigma_1 = T_1/h$	$\sigma_2 = T_2/h$
	МПа	
0,196	-0,485	4,94
0,392	-0,729	5,058
0,588	-0,805	5,082
0,794	-0,829	5,089
0,98	-0,831	5,096
1,078	-0,831	5,098

при одинаковых условиях нагружения был выполнен расчет методом конечных элементов. Результаты численных расчетов — растягивающие напряжения σ_1 и σ_2 в центральной части сегмента сферической оболочки в зависимости от координаты φ — даны в таблице.

Как следует из таблицы, зона влияния свободного края $\varphi = 0$ ограничена координатой $\varphi_0^{(1)} = 1,03$ рад.

2. Неизвестную область решения уравнения (1.1) находим на основании гидродинамической аналогии. Расчет напряженного состояния оболочки сводится к уравнению Лапласа, теория осесимметричных потенциальных течений также определяется этим уравнением. Возможность применения гидродинамической аналогии к решению задач теории упругости экспериментально подтверждена работами Р. Бауда [17, с. 88].

Для сектора сегмента сферической оболочки при $R_1 = R_2$ $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta = 1$, при этом уравнение (1.1) примет вид

$$\theta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.1)$$

Вводя замену $\theta = e^y$, из (2.1) получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.2)$$

Рассмотрим случай суперпозиции двух потенциальных потоков, расчет каждого из которых сводится к уравнению Лапласа: равномерного прямолинейного и с «точечным» радиальным источником. Скорость истечения из «точечного» источника $U_r = m/r$ (постоянная m характеризует интенсивность истечения, r — координата). Комплексный потенциал суммарного потока запишем в форме [18]

$$\omega = \bar{\Phi} + i\psi = -\bar{U}z - m \log z, \quad (2.3)$$

где $\bar{\Phi}$ — потенциал скорости; ψ — функция тока; \bar{U} — скорость ламинарного прямолинейного потока; $z = \varphi + iy = r^{i\alpha}$ (рис. 4). Производная от выражения (2.3) $d\omega/dz = -\bar{U} - m/z$.

Критическая точка, в которой скорость суммарного потока равна нулю, находится как корни уравнения $d\omega/dz = 0$, и равенство $z = -m/\bar{U}$ определяет точку, в которой скорости двух потоков равны (точка А на рис. 4).

Функция тока имеет вид [18]

$$\psi = -\bar{U}y - m\alpha = -\bar{U}y - m \operatorname{arctg} \frac{y}{\varphi}. \quad (2.4)$$

В силу симметрии относительно оси φ рассмотрим только половину суммарного потока при $y \geq 0$. Угол α отсчитывается от положительного направления оси φ (рис. 4), на

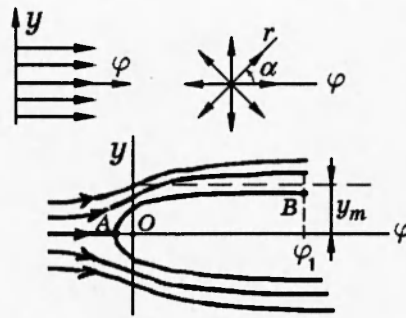


Рис. 4

отрицательной части оси φ при $\alpha = \pi$ $y = 0$, и для этой части суммарного потока из (2.4) следует $\psi = -m\pi$, а уравнение разветвляющейся в точке A линии тока представим как (рис. 4)

$$-m\pi = -Uy - m\alpha. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) включает в себя отрицательную часть оси φ до точки A и кривую AB (рис. 4). Из (2.5) вытекает, что при $\alpha \rightarrow 0$ координата $y \rightarrow m\pi/U = y_m$, т. е. кривая AB ограничена асимптотой $y_m = \text{const}$. Вследствие симметрии линии тока AB относительно оси φ имеется вторая асимптота $y = -y_m$. Из (2.4) при известной координате критической точки A $z = -m/U$ находим $OA = y_m/\pi$ и уравнение кривой AB ($\psi = \text{const}$):

$$\frac{1}{\varphi} = -\frac{1}{y} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{y_m}. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что $y_1/y_m = 6,32$ при $y/y_m = 0,95$.

3. Выводы.

1. Из численного решения методом Галеркина видно, что область решения уравнения (1.2) ограничена контуром овала с отношением полуосей 4,48:1, а по данным расчета сектора сферической оболочки методом конечных элементов это отношение равно 6,24:1. Такое отличие можно объяснить тем, что основное уравнение (1.2) получено согласно приближенной безмоментной теории, а в методе конечных элементов учтены изгибающие моменты, а также тем, что аппроксимация неизвестной области решения уравнения (1.2) системой прямоугольных элементов и особенности сопряжения решений для отдельных прямоугольных элементов в угловых точках вносят систематическую погрешность при численной реализации приведенного алгоритма. Увеличение числа прямоугольников не устраняет этой погрешности. Поэтому результаты приближенного аналитического решения методом гидродинамической аналогии, в котором неизвестная граница задана плавной кривой, ближе к данным расчета методом конечных элементов и оценка максимального размера неизвестной области решения может быть получена из уравнения (2.6).

2. Увеличение граничного значения функции $f(\beta)$, характеризующей влияние внешней нагрузки, в 2–3 раза в краевом условии (1.5) приводит к увеличению области решения соответственно на 14 и 16 %. Эти результаты подтверждаются в работе [19], где рассмотрена пластина на упругом основании, в центре которой приложена внешняя сила P , и показано, что рост силы P не приводит к изменению области ее влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6, вып. 2-3. С. 151-168.
2. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12, N 2. P. A69-A77.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
4. Методы расчета оболочек. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. Киев: Наук. думка, 1980.
5. Михайловский Е. Н. Прямые, обратные и оптимальные задачи для оболочек с подкрепленными краями. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
6. Kinderlehrer D. Variational inequalities and free boundary problems // Bull. Amer. Meth. Soc. 1978. V. 84, N 1. P. 7-26.
7. Вабишевич П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
8. Wang S. L., Chen Y. M. An efficient numerical method for exterior and interior inverse problems of Helmholtz equation // Wave motion. 1991. V. 13, N 4. P. 387-399.
9. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача // ПММ. 1946. Т. 10, вып. 3. С. 367-386.
10. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 963-979.
11. Богомольный В. М., Степанов Р. Д. Решение однородной краевой задачи для сектора сегмента торообразной оболочки // ПММ. 1976. Т. 40, вып. 4. С. 755-759.
12. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
13. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973.
14. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967.
15. Бодров В. В., Зайцев А. В., Марков Г. Т. Алгоритм и численные результаты расчета периодической структуры из излучателей в виде ступенчатых рупоров при различных способах возбуждения // Сб. науч.-метод. ст. по прикл. электродинамике. М.: Высш. шк., 1984. Вып. 4.
16. Марков Г. Т. К вопросу о теореме эквивалентности // Науч. докл. высш. шк. Радиотехника и электроника. 1958. № 4.
17. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики, формулы для расчета конструктивных элементов на прочность. М.: Мир, 1977.
18. Milne-Thomson L. M. Theoretical Hydrodynamics. N. Y.: MacMillan, 1960.
19. Villagio P. A free boundary problem in plate theory // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50, N 2. P. 297-302.

Поступила в редакцию 23/IX 1994 г.,
в окончательном варианте — 21/III 1995 г.