

**РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СВОБОДНЫХ
СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ**

В. Г. Дулов, Г. И. Смирнова

(Новосибирск)

Излагается приближенный способ определения основных параметров осесимметричных недорасширенных струй. Проведено сравнение с численными расчетами и опытными данными. Результаты представлены в виде расчетных формул для геометрических характеристик конфигурации ударных волн и границы струи. На основе опыта проведения расчетов рекомендуются простые аппроксимирующие зависимости.

Обозначения: x, y — прямоугольные координаты в плоскости осевого сечения, p — давление, ρ — плотность, w — модуль скорости, M — число Маха, κ — показатель политропы, n — степень нерасчетности струи, α — угол Маха, ϑ — угол наклона вектора скорости к оси симметрии, ϑ_a — полуугол раствора сопла в выходном сечении, θ — угол разворота потока на ударной волне, ϕ — угол наклона фронта ударной волны к оси симметрии, ω — угол между падающим скачком и вектором скорости набегающего потока, K — кривизна линий тока, R — радиус кривизны.

Индексами обозначены: a — параметры в выходном сечении сопла, o — параметры на границе струи, $*$ — параметры перед точкой разветвления ударных волн, 1 — параметры в вершине угла между фронтами разветвленных скачков, 2 — параметры за центральным скачком. Безразмерные газодинамические величины отнесены к соответствующим параметрам торможения на выходе из сопла, величины с размерностью скорости — к максимальной скорости стационарного истечения в вакуум. Линейные величины выражены в радиусах выходного сечения сопла.

1. Численные расчеты формы границ сверхзвуковых струй вязкого и нетеплопроводного газа требуют проведения трудоемких вычислений. Поэтому оправданы поиски достаточно простых приближенных способов решения этой задачи. В работе [1] предложен один из таких приемов, основанный на разложении решения в ряд по четным степеням угла ϑ . Реализация разложения осуществлена путем перехода на вспомогательную плоскость независимых переменных давление — функция тока [2]. При таком подходе в качестве исходного приближения получается одномерное решение для течений в канале с переменной площадью сечения. В следующем приближении изобары, в том числе и изобарическая линия тока, представляют собою семейство кривых второго порядка. Но поскольку в окрестности острой кромки до расстояний порядка радиуса сопла от центра расширения течение близко к режиму плоского обтекания [3], образующая границы струи до расстояний указанного порядка мало отличается от прямой линии. Поэтому применяется двойное аналитическое задание формы образующей границы по участкам

$$y = \begin{cases} 1 + (\operatorname{tg} \vartheta^0) x, & x \leq x^0 \\ \sqrt{A + Bx + Cx^2}, & x \geq x^0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где $A, B, C, x^0, \vartheta^0$ — параметры, отражающие влияние конкретных условий истечения и внутренней структуры струи. В работе [1] параметры A, B, C, x^0 определены через координаты x_*, y_* точки разветвления ударных

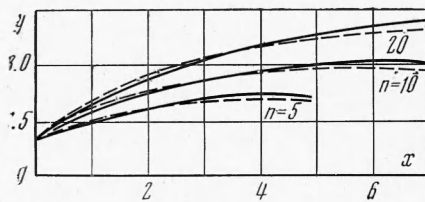
волн и давление p_1 в вершине угла между падающим и отраженным скачками. При этом использованы следующие условия и предположения:

а) требование гладкой стыковки участков образующей границы струи в точке (x°, y°)

$$y^\circ = 1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ = \sqrt{A + Bx^\circ + Cx^{\circ 2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta^\circ = \frac{B + 2Cx^\circ}{2y^\circ}$$

б) живое сечение потока, проходящее через контур центрального скачка, считается приближенно плоским и нормальным к оси симметрии; поскольку это сечение располагается вблизи от максимального, направление вектора скорости в нем мало отличается от осевого, поэтому в пределах этого сечения угол ϑ полагается малой величиной,



Фиг. 1

в) с учетом указанного приближения применяется интегральная форма записи закона сохранения массы газа,

г) считается, что кривизна линий тока K и градиенты давления p остаются конечными в пределах рассматриваемой области течения и представляют собой достаточно гладкие функции расстояния от границы струи, д) в расчетах эти функции аппроксимируются квадратичной зависимостью для p и линейной — для K .

В результате получены уравнение относительно x° и формулы для коэффициентов A , B и C

$$y_m^2 - 2(x_* - x^\circ)(1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ) \operatorname{tg} \vartheta^\circ - (x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ + 1)^2 - (x_* - x^\circ)^2 \left[\operatorname{tg}^2 \vartheta^\circ + \frac{2y_m^3 (p_1 / p^\circ - 1)}{kM^{\circ 2} (1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ)^2 (y_m - y_*)} \right] = 0 \quad (1.2)$$

$$A = y_m^2 - Bx_* - Cx_*^2 = (1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ)^2 - Bx^\circ - Cx^{\circ 2}$$

$$B = 2[(1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ) \operatorname{tg} \vartheta^\circ - Cx^\circ]$$

$$C = (x_* - x^\circ)^{-2} [y_m^2 - 2(x_* - x^\circ)(1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ) \operatorname{tg} \vartheta^\circ - (1 + x^\circ \operatorname{tg} \vartheta^\circ)^2]$$

где

$$y_m = -\frac{y_*}{3k} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{p_1}{p^\circ} - 1 \right) + 2 \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{p_1}{p^\circ} - 1 \right) - \frac{kM^{\circ 2}}{y_*} \left[\frac{y_*^2}{k^2 M^{\circ 4}} \left(\frac{p_1}{p^\circ} - 1 \right)^2 + \frac{3}{M^{\circ 2}} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{p_1}{p^\circ} - 1 \right) + 2 \right] \left\{ \frac{y_*^2}{M^{\circ 2}} \left[\frac{5}{k} \left(\frac{p_1}{p^\circ} - 1 \right) + 6 \right] + \frac{6D}{p^{\circ \gamma}} \left(\frac{2}{M^{\circ 2}} + k - 1 \right) \right\}^{1/2} \right] \right\}$$

$$D = \frac{1}{2} \left\{ p_a^\gamma (\sqrt{1 - p_a^{1-\gamma}} - 1) + \frac{k+1}{2k} p_a - \left[p_*^\gamma (\sqrt{1 - p_*^{1-\gamma}} - 1) + \frac{k+1}{2k} p_* \right] y_*^2 + \frac{k-1}{2k} (1 - y_*^2) p^\circ \right\} \quad \left(\gamma = \frac{1}{k} \right)$$

На фиг. 1 представлены варианты сравнения расчета образующей границы по формулам (1.1) и (1.2) (штриховые линии) с расчетом по методу характеристик [3] (сплошная линия). При этом было принято $k = 1.4$, $M_a = 1.5$, $\vartheta_a = 0$.

Аналогичные результаты получены для других значений исходных параметров ($1 \leq M_a \leq 3.5$, $5 \leq n \leq 25$).

2. В недорасширенной струе первая ударная волна, или всячий скачок (кривая 2 на фиг. 2), зарождается на некотором расстоянии от среза сопла в точке O_1 , где впервые пересекаются характеристики второго семейства 3, отраженные от границы струи 1. Координаты этой точки могут быть легко выражены через радиус кривизны R° начального элемента границы струи в предположении, что вплоть до точки пересечения характеристики практически прямолинейны.

Простую приближенную формулу для R° можно получить из уравнения движения в проекции на нормаль к линии тока с учетом уравнения неразрывности

$$\frac{\rho w^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial n}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \frac{1}{\rho w} \frac{\partial \rho w}{\partial s} = -\frac{\sin \vartheta}{y}$$

Здесь R — местный радиус кривизны, s и n — расстояния вдоль линии тока и по нормали к ней. Так как вдоль границы $\rho w = \text{const}$, из последних уравнений получим

$$\frac{\rho w^2}{R} = \frac{\sin \vartheta}{y} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}$$

Производная $dp/d\vartheta$ вычисляется вдоль нормали к границе. Изменение давления в элементарной волне сжатия, отраженной от границы, вычислим приближенно по плоской теории малых возмущений. Течение в окрестности границы безвихревое, поэтому

$$dp \approx \frac{\rho w^2}{\sqrt{M^2 - 1}} d\vartheta$$

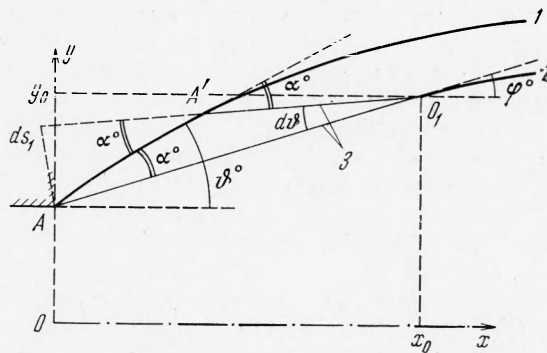
Таким образом

$$R^\circ = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\sin \vartheta^\circ} = \frac{\text{ctg } \alpha^\circ}{\sin \vartheta^\circ} \quad (2.1)$$

Здесь α° — угол Маха, ϑ° — начальный угол наклона образующей границы к оси струи. Приближенная формула (2.1) дает вполне удовлетворительное согласование с результатами точных вычислений [3]. Согласно (2.1) и фиг. 2 координаты точки зарождения всячего скачка определяются по формулам

$$x_0 = \frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \vartheta^\circ} \cos(\vartheta^\circ - \alpha^\circ), \quad y_0 = 1 + \frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \vartheta^\circ} \sin(\vartheta^\circ - \alpha^\circ)$$

Параметры в окрестности тройной точки обладают большой чувствительностью к изменению величины начального угла наклона ϑ° всячего скачка к оси струи. Дуга всячего скачка имеет значительную протяженность, поэтому малые погрешности в определении угла ϑ° могут быть источником значительных ошибок в конце этой дуги. Вычислим величину приращения характеристического угла $(\vartheta - \alpha)$ при смещении вдоль последней характеристики, сходящей с острой кромки сопла. В окрестности этой кромки производные газодинамических величин вдоль характеристик первого семейства в области волны разрежения по абсолютной величине гораздо больше тех же величин в направлении характеристик второго семейства. Поэтому соотношение совместности вдоль характеристик первого



Фиг. 2

семейства выполняется приближенно по всем направлениям в той же форме, что и для плоских течений

$$d\vartheta + \frac{\cos^2 \alpha}{1/2(k-1) + \sin^2 \alpha} d\alpha = 0 \quad (2.2)$$

В частности, это соотношение справедливо вдоль начального элемента граничной характеристики, на которой выполняется точное соотношение для характеристик второго семейства

$$d\vartheta - \frac{\cos^2 \alpha}{1/2(k-1) + \sin^2 \alpha} d\alpha - \sin \alpha \sin \vartheta dl = 0 \quad (2.3)$$

Здесь dl — элемент смещения вдоль указанной характеристики. Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\frac{d(\vartheta - \alpha)}{dl} = \frac{k+1}{4} \frac{\sin \alpha \sin \vartheta}{\cos^2 \alpha}$$

Последняя формула дает возможность ввести линейную поправку к величине угла

$$\varphi^\circ = \vartheta^\circ - \alpha^\circ + \left[\frac{d(\vartheta - \alpha)}{dl} \right]^\circ l^\circ = \vartheta^\circ - \alpha^\circ + \frac{k+1}{4} \operatorname{tg} \alpha^\circ$$

Проведенные расчеты показали, что учет такой поправки является одной из основных предпосылок повышения точности определения параметров конфигурации ударных волн в струе.

3. Если для наглядности границу струи уподобить твердой стенке, то всякий скачок можно трактовать как ударную волну, возникающую при обтекании вогнутой поверхности сверхзвуковым потоком. Чем больше число Маха в «набегающем» потоке, тем ближе такая волна подходит к обтекаемой поверхности. На этом основании некоторыми авторами используется предельная гиперзвуковая аппроксимация — предполагается, что всякий скачок совпадает с границей струи. При конечных, но больших числах Маха перед всяким скачком его образующая по форме мало отличается от линии, изображающей границу, и геометрически может быть получена из неё путем относительно небольшой деформации. Последнюю аналитически приближенно можно произвести за счет изменения нескольких параметров в структурной зависимости, определяющей форму границы струи.

Предположим, что дуга образующей границы задана уравнением трехпараметрической кривой вида

$$f(x, y, a, b, c) = 0 \quad (3.1)$$

где a, b, c — параметры, которые определяются из условий, характеризующих границу струи. Тогда согласно сказанному выше уравнение образующей поверхности фронта всяческого скачка имеет тот же вид (3.1), а параметры a, b, c находятся с учетом свойств этого скачка, а именно рассматриваемая кривая должна проходить через две точки с координатами (x_0, y_0) и (x_*, y_*) ; углы наклона скачка к оси симметрии в этих точках равны соответственно φ° и φ_*° . Следовательно

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, a, b, c) &= 0, \quad f(x_*, y_*, a, b, c) = 0 \\ f_x(x_0, y_0, a, b, c) - f_y(x_0, y_0, a, b, c) \operatorname{tg} \varphi^\circ &= 0 \\ f_x(x_*, y_*, a, b, c) + f_y(x_*, y_*, a, b, c) \operatorname{tg} \varphi_*^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В частности, согласно (1.1) можно полагать, что

$$f(x, y, a, b, c) = y - \sqrt{a + bx + cx^2} = 0$$

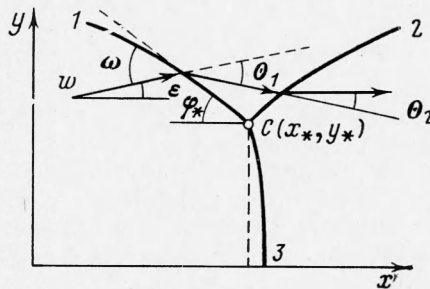
Тогда из уравнений (3.2) находим

$$\begin{aligned} a &= y_0^2 - bx_0 - cx_0^2 = y_*^2 - bx_* - cx_*^2 \\ b &= (x_* - x_0)^{-1} [y_*^2 - y_0^2 + (x_0 + x_*) (y_0 \operatorname{tg} \varphi^\circ + \\ &\quad + y_* \operatorname{tg} \varphi_*)] \\ c &= -(x_* - x_0)^{-1} (y_0 \operatorname{tg} \varphi^\circ + y_* \operatorname{tg} \varphi_*) \\ \operatorname{tg} \varphi_* &= [y_* (x_* - x_0)]^{-1} [(x_* - x_0) y_0 \operatorname{tg} \varphi^\circ - y_*^2 + y_0^2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формулы (3.3) содержат неизвестные параметры x_* и y_* . Ниже обсуждается вопрос о вычислении этих величин.

4. В струйном течении всегда существует тенденция к выравниванию потока в направлении оси струи. Уже за первой системой скачков углы наклона вектора скорости к оси струи становятся малыми. Этим свойством обладает и контактный разрыв, сходящийся с контура центрального скачка. В первом приближении этот скачок можно рассматривать как прямой скачок уплотнения. Тогда начальный угол наклона контактного разрыва равен нулю, а поток перед фронтом скачка можно считать одномерным.

В качестве второго приближения представим следующую схему (фиг. 3): вектор скорости w перед тройной точкой C образует с осью симметрии малый угол ε ; угол падающего скачка I с этим вектором изменяется на малую величину $\Delta\omega$, центральный скачок 3 искривляется, а начальный элемент контактного разрыва остается параллельным оси. Следовательно, во втором приближении $\varepsilon - \theta_1 + \theta_2 = 0$, где θ_1 и θ_2 — углы разворота потока на падающем I и отраженном 2 скачках соответственно.



Фиг. 3

Воспользуемся формулой угла разворота потока на ударной волне

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma - 1}{1 + kM^2 - \sigma} \left[\frac{2k}{k+1} \frac{M^2}{\sigma + (k-1)/(k+1)} - 1 \right]^{1/2} = P(M, \sigma), \quad \sigma = \frac{p_1}{p_*} \quad (4.1)$$

Здесь p_1 — давление в вершине угла между фронтами разветвленных скачков I и 2 , p_* — давление перед точкой разветвления. Пусть θ_0 и σ_0 — значения θ и σ в первом приближении. Введем функцию γ следующего вида:

$$\gamma = \left[\cos^2 \theta_0 \left(\frac{d \operatorname{tg} \theta_0}{d \sigma_0} - \frac{d \operatorname{tg} \theta_2}{d \sigma_0} \right) \right]^{-1} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = P(M, \sigma_0), \quad \operatorname{tg} \theta_2 = P(M_1, \sigma_1), \quad \sigma_1(M, \sigma_0) = p_2/p_1 \quad (4.3)$$

Здесь $M_1(M, \sigma_0)$ — число Маха в вершине угла между падающим и отраженным скачками, p_2 — давление за прямым скачком. Формулы (4.2) и (4.3) определяют γ как функцию от M . При помощи этой функции компактно записываются формулы линейных приращений параметров во втором приближении

$$\Delta\sigma = \gamma(M) \varepsilon, \quad \Delta\omega = \frac{(k+1)\gamma(M)\varepsilon}{2kM^2 \sin 2\omega}, \quad \Delta\varphi = \Delta\omega - \varepsilon \quad (4.4)$$

В трубке тока, проходящей через контур центрального скачка, течение перед последним полагаем одномерным. Поэтому

$$\varepsilon \approx \frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{dM} \frac{dM}{dx} y = \frac{\beta(M)}{\eta(M)} y \quad (4.5)$$

где

$$\eta(M) = 1 - \frac{(k+1)\gamma(M)}{2kM^2 \sin 2\omega}, \quad \beta(M) = \frac{\eta(M)}{2x'(M)} \frac{d \ln q(M)}{dM}$$

Здесь $q(M)$ — табличная газодинамическая расходная функция, $x(M)$ — функция, характеризующая распределение чисел Маха вдоль оси струи. На основании (4.4) и (4.5)

$$\varphi_* = \omega + \Delta\varphi = \omega - \beta y_*$$

Подставляя значение φ_* в последнее из равенств (3.3), найдем радиус центрального скачка уплотнения

$$y_* = \frac{1}{2} \left(1 - \beta \frac{x_* - x_0}{\cos^2 \omega} \right)^{-1} \left\{ \left[(x_* - x_0)^2 \operatorname{tg}^2 \omega + 4y_0 \left(1 - \beta \frac{x_* - x_0}{\cos^2 \omega} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_0 + (x_* - x_0) \operatorname{tg} \varphi^0) \right]^{1/2} - (x_* - x_0) \operatorname{tg} \omega \right\} \quad (4.6)$$

Определение расстояния x_* до центрального скачка не является проблемой, поскольку существуют достаточно простые приближенные и эмпирические формулы, определяющие эту величину с хорошей точностью. В частности, при расчетах параметров струи по предлагаемому способу использовалась эмпирическая формула работы [3]

$$x_* = 0.8 \{ 3.04n^{0.437} + 3.1 [(2M_a^2 - 1)^{1/2} - 1] - 1.1 (M_a^2 - 1) + \\ + 0.65 [(n - 2) \sqrt{M_a^2 - 1}]^{1/2} - 1 \} \quad (n \geq 2)$$

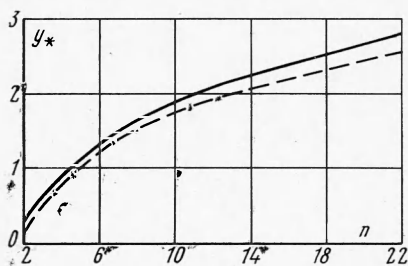
Были проведены многочисленные расчеты конфигураций ударных волн для недорасширенных струй в широких диапазонах значений исходных параметров. Результаты расчетов сравнивались с опубликованными данными численных расчетов и экспериментальных замеров. На фиг. 4 приведено сравнение расчета по формуле (4.6) (штриховая кривая) с данными экспериментов [3] (сплошная кривая), при этом было принято

$$k = 1.4, \quad M_a = 1.5, \quad \varphi_a = 0$$

Аналогичные результаты получены для других значений исходных параметров

$$(1 \leq M_a \leq 5, \quad 2 \leq n \leq 100).$$

Проведенная оценка влияния возможных допущений на величину радиуса центрального скачка показала, что замена его прямым скачком ($\beta = 0$) вносит ошибку в значение y_* порядка 20—30%. Смещение точки зарождения



Фиг. 4

висячего скачка на кромку сопла изменяет значение y_* на 30—40%. Но наибольшая погрешность связана с определением начального угла наклона висячего скачка: приравнивание φ^0 углу $\hat{\varphi}^0 = \alpha^0$ изменяет y_* на 50—70%. При этом указанные ошибки могут проявляться в одном направлении, т. е. не компенсируют одна другую.

5. В изложенном способе определения основных параметров недорасширенных струй расчетные формулы содержат функции $x(M)$, $\sigma(M)$ и $\gamma(M)$, вычисление значений которых по точным соотношениям является относительно трудоемким. На основании опыта проведения расчетов эти функции с хорошей степенью точности аппроксимированы простыми формулами.

В приближенных методах расчета основных параметров недорасширенных струй функцию $x(M)$ обычно предполагают заданной в виде некоторой аналитической зависимости. Чем проще вид такой зависимости, тем менее трудоемким является процесс расчета основных параметров струи. В интервале $0 \leq x \leq 20$ удовлетворительное согласование с данными численных расчетов дает следующая приближенная формула:

$$M = M_a - 1 + \frac{a(x - \sqrt{M_a^2 - 1}) + b}{x - \sqrt{M_a^2 - 1} + c}, \quad \begin{aligned} a &= 3.56 + 0.01e^{4.77k} \\ b &= 1 + 0.024e^{3.9k} \\ c &= 1.7 + 0.019e^{4.3k} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для расчета отношения давлений σ в конфигурации ударных волн с одним прямым скачком рекомендуем аппроксимирующую формулу (точность порядка 1% в интервале $2 \leq M_a \leq 10$)

$$\sigma = \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k-1} \right) \left[a + 0.19(b - 0.65c) + \frac{b}{M} - \frac{c}{M^2} \right] \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -0.25 + 0.97(k-1) - 1.08(k-1)^2 \\ b &= 1.74 - 4.86(k-1) + 8.24(k-1)^2 \\ c &= 1.19 - 5.85(k-1) + 12.16(k-1)^2 \end{aligned}$$

Введенную выше функцию $\gamma(M)$ можно аппроксимировать простой формулой (точность порядка 5% в интервале $2 \leq M_a \leq 15$)

$$\gamma = -2.99k + 2.5 + (3.17k - 2.78)M + (0.08k + 0.16)M^2 \quad (5.3)$$

Применение формул (5.1), (5.2) и (5.3) сводит расчет основных параметров струи к выполнению элементарных вычислений.

Поступила 22 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Дулов В. Г., Смирнова Г. И. О форме границ сверхзвуковых недорасширенных струй. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1971, № 1.
2. Дулов В. Г. Об уравнениях стационарных осесимметричных течений газа в переменных «давление — функция тока». ПМТФ, 1964, № 3.
3. Love E. S., Grigsby C. E., Lee L. P., Woodling M. J. Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets. NASA, TR, 1959, R-6.