

АКУСТИКА КАНАЛОВ

УДК 532.529.534.2

С ПЛОСКИМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Н. М. Хлесткина<sup>1</sup>, В. Ш. Шагапов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики УНЦ РАН, 450000 Уфа

<sup>2</sup>Институт механики многофазных систем СО РАН, 625000 Тюмень

Теоретические основы распространения волн давления в каналах заложены в [1, 2] и развиты в [3, 4] с учетом свойств реальной жидкости. Наиболее полная библиография работ и исторический очерк по этой проблеме содержатся в [5–7].

Цель настоящей работы — исследование эволюции акустических волн в заполненных жидкостью (или газом) каналах с пористыми и проницаемыми стенками, анализ влияния на особенности распространения и затухания волн в каналах фильтрационных процессов (через проницаемые стенки), инерционных явлений, а также диссипативных эффектов, связанных с вязким трением и теплообменом.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим задачу о распространении малых возмущений в каналах с плоскопараллельными стенками при следующих основных допущениях: канал и несжимаемый скелет окружающего пористого пространства заполнены одной и той же жидкостью (или газом), жидкость баротропная, и ее вязкость проявляется лишь в процессе фильтрации. Кроме того, будем полагать, что канал имеет бесконечную ширину (высота канала значительно меньше его ширины) и длина волны больше высоты канала. Систему координат выберем следующим образом: ось  $Oz$  направим вдоль оси канала, ось  $Ox$  — перпендикулярно верхней (нижней) стенке канала.

В рамках принятых допущений линеаризованная система уравнений, описывающая распространение возмущений в каналах с пористыми и проницаемыми стенками, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho_0 u}{\alpha_0}, \quad |x| < \alpha_0; \quad (1.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad |x| < \alpha_0; \quad (1.2)$$

$$P = C^2 \rho; \quad (1.3)$$

$$m \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \quad |x| > \alpha_0; \quad (1.4)$$

$$u^{(1)} = -\frac{k_c}{\mu} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x}, \quad |x| > \alpha_0; \quad (1.5)$$

$$u^{(1)} = u, \quad P^{(1)} = P, \quad |x| = \alpha_0. \quad (1.6)$$

Здесь  $P, \rho$  — соответственно возмущения давления и плотности;  $w$  — скорость жидкости в сечении с координатой  $z$  в момент времени  $t$ ;  $u$  — скорость фильтрации через стенки канала;  $C$  — скорость звука в жидкости; индекс нуль у параметра означает, что его значение отнесено к невозмущенному состоянию;  $\tilde{P}^{(1)}, \rho^{(1)}, u^{(1)}$  — распределения возмущений давления, плотности и скорости фильтрации в пористом пространстве вокруг канала;  $\mu$  —

динамическая вязкость жидкости;  $k_c$  и  $m$  — проницаемость и пористость окружающего канал пространства;  $\alpha_0$  — полувысота канала.

Из уравнений (1.1)–(1.5) находим

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho_0 \partial u}{\alpha_0 \partial t}, \quad |x| < \alpha_0; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2}, \quad \varkappa = \frac{k_c \rho_0 C^2}{\mu m}, \quad |x| > \alpha_0; \quad (1.8)$$

$$P = P^{(1)}, \quad u = -\frac{k_c}{\mu} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x}, \quad |x| > \alpha_0,$$

где  $\varkappa$  — коэффициент пьезопроводности.

Для рассматриваемой задачи из уравнения (1.7) и уравнения пьезопроводности с учетом граничных условий (1.6) может быть получено волновое уравнение, описывающее динамику малых возмущений в каналах со стенками бесконечной толщины.

Для однозначной характеристики описываемого процесса к уравнению (1.8) добавим начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= 0, & t &= 0, & |x| &> \alpha_0, \\ P^{(1)} &= P, & t &> 0, & |x| &= \alpha_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.8) при заданных условиях (1.9) в соответствии с принципом Дюгамеля имеет вид [8]

$$P^{(1)} = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t} (x - \alpha_0, t - \tau) P(z, \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Здесь  $U(x, t)$  — решение аналогичной краевой задачи при  $U(0, t) = 1$ .

Поскольку

$$U(x - \alpha_0, 0) = 0, \quad (1.11)$$

то из (1.5) с учетом (1.10) и (1.11) при  $|x| = \alpha_0$  следует

$$u = \frac{k_c}{\mu \sqrt{\pi \varkappa}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{P(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (1.12)$$

Подставляя выражение (1.12) в (1.7), получим волновое уравнение

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \left( P + \frac{m \sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\pi \alpha_0}} \int_0^t \frac{P(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (1.13)$$

описывающее эволюцию малых возмущений в полубесконечных каналах с пористыми и проницаемыми стенками. Существенным обстоятельством при этом является то, что при выводе уравнения принято предположение, что в исходном состоянии (при  $t = 0$ ) среда находилась в состоянии покоя ( $P^{(1)} = P = 0$ ).

В наиболее общем виде, отвечающем условию  $P^{(1)} = P = 0$  при  $t = -\infty$ , уравнение (1.13) может быть записано как

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \left( P + \frac{m\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}\alpha_0} \int_{-\infty}^t \frac{P(z, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (1.14)$$

Полученное волновое уравнение (1.13) (или (1.14)) соответствует каналу с пористыми и проницаемыми стенками бесконечной толщины. В случае, когда толщина стенок канала конечна, возможны две предельные ситуации: 1) внешняя поверхность стенки канала ( $|x| = \alpha_*$ ,  $\alpha_* > \alpha_0$ ) граничит с непроницаемым пространством, 2) внешняя граница стенки канала — свободная поверхность. Граничные условия, отвечающие этим ситуациям, имеют вид

$$u^{(1)} = -\frac{k_c}{\mu} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad |x| = \alpha_*$$

или

$$P^{(1)} = 0, \quad |x| = \alpha_*,$$

где  $\alpha_*$  — координата внешней границы стенки канала.

**2. Дисперсионный анализ.** Решение задач ищем в виде затухающей бегущей волны, полагая, что волна распространяется вдоль координатной оси  $z$  в сторону положительного ее направления:

$$P = A_p \exp[i(Kz - \omega t)], \quad u = A_u \exp[i(Kz - \omega t)], \quad P^{(1)} = A_p^{(1)}(x) \exp[i(Kz - \omega t)], \\ u^{(1)} = A_u^{(1)}(x) \exp[i(Kz - \omega t)], \quad K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k.$$

Здесь  $K$  — комплексное волновое число;  $\delta$  — линейный декремент затухания;  $C_p$  — фазовая скорость;  $i$  — мнимая единица;  $\omega$  — круговая частота возмущений.

Из условия существования решения такого вида для каналов со стенками бесконечной толщины получим дисперсионное выражение

$$K^2 = \omega^2(1 + m/y)C^{-2}, \quad y = \sqrt{-i\omega\alpha_0^2/\alpha}, \quad (2.1)$$

где параметр  $|y| = \sqrt{\omega\alpha_0^2/\alpha} = \alpha_0/\alpha_\omega$  ( $\alpha_\omega = \sqrt{\alpha/\omega}$ ) имеет физический смысл [8] отношения полувьсоты канала  $\alpha_0$  к глубине проникания  $\alpha_\omega$ , в пористое пространство фильтрационных волн, соответствующих частоте  $\omega$ .

Анализ дисперсионного выражения (2.1) в области низких частот, для которых выполняется условие  $m/|y| \gg 1$  или  $\sqrt{\omega} \ll m\sqrt{\omega\alpha} = \sqrt{\omega_c}$  ( $\omega_c = \alpha/\alpha_0^2$  — характерная частота, при которой глубина проникания фильтрационных волн порядка полувьсоты канала [8]), дает асимптотические зависимости

$$C_p \simeq \left( \frac{\alpha_0 C^2 \nu}{k_c m} \omega \right)^{1/4}, \quad \delta \simeq \frac{\pi}{8} \left( \frac{m k_c \omega^3}{C^2 \alpha_0^2 \nu} \right)^{1/4}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (2.2)$$

( $\nu$  — кинематическая вязкость среды).

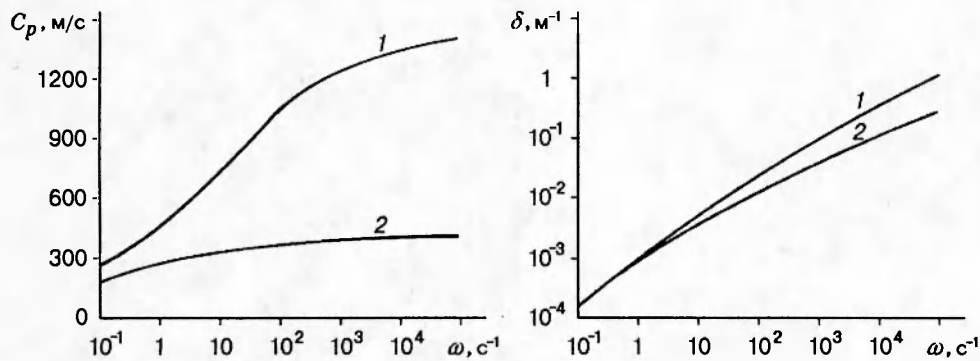


Рис. 1

В области высоких частот, удовлетворяющих условию  $m/|y| \ll 1$  или  $\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_c}$ , асимптотические зависимости имеют вид

$$C_p \simeq C, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha_0} \sqrt{\frac{k_c m}{\nu}} \omega. \quad (2.3)$$

Анализ выражений (2.2), (2.3) показывает, что скорость распространения гармонической волны в каналах с плоскими стенками бесконечной толщины изменяется от нуля ( $C_p \ll C$ ) в области низких частот ( $\sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_c}$ ) до значения, близкого к скорости звука в среде ( $C_p \simeq C$ ), в области высоких частот ( $\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_c}$ ). Физическим параметром среды, определяющим эволюцию низкочастотных возмущений в таких каналах, является величина  $\sqrt[3]{C^2 \nu}$ , причем интенсивность затухания растет с увеличением сжимаемости среды (определяемой скоростью звука  $C$ ). В области высоких частот, когда фазовая скорость волны близка к скорости звука в среде, затухание возмущения определяется кинематической вязкостью среды  $\nu$ , при этом в менее вязких средах затухание волны сильнее. Коэффициент затухания как низкочастотных, так и высокочастотных возмущений связан обратной зависимостью с высотой канала (чем тоньше канал, тем интенсивнее процесс затухания) и прямой зависимостью с пористостью и проницаемостью стенок канала. Причем эта зависимость сильнее в области высоких частот.

На рис. 1 представлены рассчитанные по дисперсионному уравнению (2.1) зависимости скорости распространения и коэффициента затухания от частоты в заполненных водой (линия 1,  $\nu = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $C = 1,425 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ) и воздухом (линия 2,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $C = 3,41 \cdot 10^2 \text{ м/с}$ ) каналах ( $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $k_c = 10^{-12} \text{ м}^2$ ,  $m = 0,2$ ). Видно, что затухание низкочастотных возмущений происходит примерно одинаково в воде и воздухе. В диапазоне высоких частот процесс затухания интенсивнее в воде. Для иллюстрируемого случая отношение коэффициентов затухания возмущений в воде  $\delta_w$  и воздухе  $\delta_a$  для частот, при которых скорость распространения волны близка к скорости звука в среде ( $C_p \simeq C$ ), составляет  $\delta_w/\delta_a \simeq 4$ .

Для каналов со стенками конечной толщины в ситуации, когда внешняя поверхность пористой стенки граничит с непроницаемым пространством, дисперсионное выражение имеет вид

$$K^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{m}{y} \text{th}(y(A_* - 1)) \right) C^{-2}, \quad A_* = \frac{\alpha_*}{\alpha_0}. \quad (2.4)$$

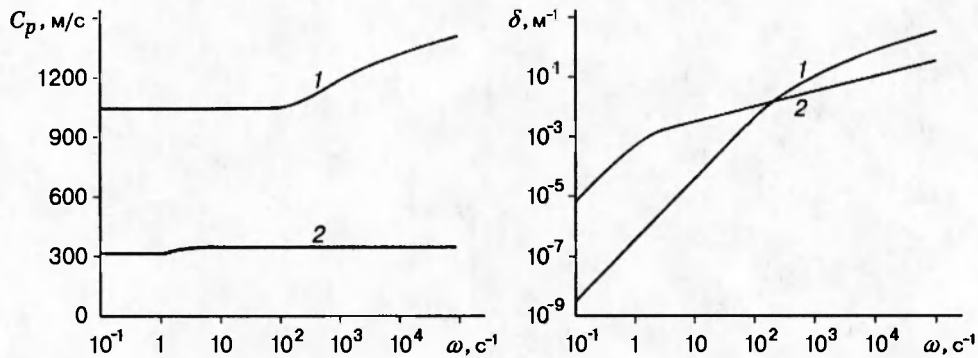


Рис. 2

В области низких частот, для которых выполняется условие

$$|y|(A_* - 1) \ll 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_{\alpha}^{(e)}}, \quad \omega_{\alpha}^{(e)} = \alpha / (\alpha_* - \alpha_0)^2 \quad (2.5)$$

( $\omega_{\alpha}^{(e)}$  — характерная частота, при которой глубина проникания фильтрационных волн в пористую среду порядка толщины пористой стенки), для фазовой скорости и коэффициента затухания получим

$$C_p \simeq C^{(e)} = \frac{C}{\sqrt{1 + m(A_* - 1)}}, \quad \delta = \frac{m(A_* - 1)}{6C^{(e)}(1 + m(A_* - 1))} \frac{\omega^2 \alpha_0^2}{\alpha}. \quad (2.6)$$

Из выражений (2.6) видно, что в каналах со стенками конечной толщины, окруженных слабопроницаемым пространством, низкочастотные возмущения ( $\sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_{\alpha}^{(e)}}$ ) (при которых глубина проникания фильтрационных волн гораздо больше толщины пористой стенки канала  $\alpha_{\omega} \gg \alpha_* - \alpha_0$ ) распространяются с характерной скоростью  $C^{(e)}$ , которая определяется скоростью звука в среде и геометрическими параметрами канала (высотой и толщиной стенок) и не зависит от частоты возмущения. При этом скорость распространения волны тем выше, чем больше высота канала и тоньше его стенки. Процесс затухания возмущений определяется величиной  $\nu/C^3$ , т. е. кинематической вязкостью и сжимаемостью среды, причем зависимость от сжимаемости сильнее. Интенсивность затухания возмущений в области низких частот усиливается с увеличением пористости стенок канала и ослабевает с ростом их проницаемости.

На рис. 2 представлены полученные из выражения (2.4) дисперсионные зависимости скорости распространения и коэффициента затухания от частоты в заполненных водой и воздухом (линии 1 и 2) каналах ( $\alpha_0 = 10^{-2}$  м), окруженных слабопроницаемым пористым пространством. Видно, что затухание низкочастотных возмущений в воздухе происходит быстрее, чем в воде. Отношение коэффициентов затухания волны в воде и воздухе в данном случае при  $m = 0,2$ ,  $k_c = 10^{-12}$  м<sup>2</sup> составляет  $\delta_w/\delta_a \simeq 3$ .

Для другой ситуации, когда толщина зоны поглощения сравнима с толщиной стенки канала ( $\alpha_{\omega} \simeq \alpha_* - \alpha_0$ ) и внешняя граница стенки канала является свободной поверхностью, получим дисперсионное выражение

$$K^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{m}{y \operatorname{th}(y(A_* - 1))} \right) C^{-2}. \quad (2.7)$$

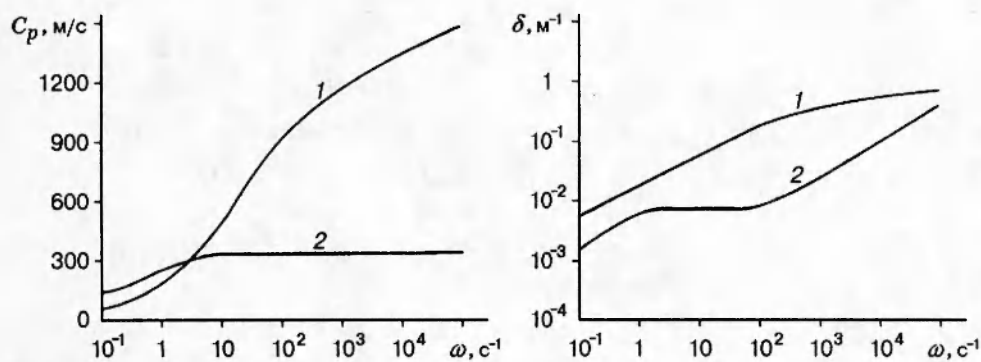


Рис. 3

Из этого уравнения в области низких частот, удовлетворяющих условию (2.5), имеем

$$K^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{m}{(A_* - 1)} \frac{1}{y^2} \right) C^{-2}.$$

При частотах, удовлетворяющих помимо (2.5) также условию  $|y|^2 \ll m/(A_* - 1)$  или  $\omega \ll \omega_{\infty}^* m/(A_* - 1) = \omega_{\infty}^*$  ( $\omega_{\infty}^*$  — характерная частота, при которой  $C_p \simeq C$ ), для скорости распространения и коэффициента затухания запишем

$$C_p = \sqrt{\frac{2(\alpha_* - \alpha_0)\alpha_0\omega\nu}{k_c}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{k_c\omega}{2(\alpha_* - \alpha_0)\alpha_0\nu}}.$$

Для диапазона частот, удовлетворяющих помимо (2.5) также условию  $|y|^2 \gg m/(A_* - 1)$  или  $\omega \gg \omega_{\infty}^*$ , получим асимптотические зависимости  $C_p = C$ ,  $\delta = Ck_c/[2\alpha_0(\alpha_* - \alpha_0)\nu]$ .

Таким образом, результаты анализа показывают, что в каналах со стенками конечной толщины, находящихся в сильнопроницаемой среде, скорость распространения низкочастотных возмущений изменяется от нуля в диапазоне частот  $\omega \ll \omega_{\infty}^*$  до значения, близкого к скорости звука в среде, в диапазоне частот  $\omega \gg \omega_{\infty}^*$ . Основным физическим параметром, определяющим процесс затухания, является величина  $C/\nu$ . Интенсивность затухания связана обратной зависимостью с кинематической вязкостью и сжимаемостью среды, а также с геометрическими параметрами канала (высотой и толщиной стенок).

Рис. 3 иллюстрирует зависимость скорости распространения и коэффициента затухания волны от ее частоты в заполненных водой и воздухом (линии 1 и 2) каналах ( $\alpha_0 = 10^{-2}$  м,  $A_* = 1,5$ ,  $k_c = 10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $m = 0,2$ ). Из графического представления дисперсионного выражения (2.7) видно, что затухание низкочастотных возмущений в воде ( $C_1/\nu_1 \simeq 1,4 \cdot 10^9$  м<sup>-1</sup>) происходит сильнее, чем в воздухе ( $C_2/\nu_2 \simeq 2,3 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>).

Причем для низкочастотных возмущений существует частотный диапазон ( $\omega \gg \omega_{\infty}^*$ ,  $\sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_{\infty}^{(e)}}$ ), в котором коэффициент затухания волны не зависит от ее частоты. Этот диапазон слева определен характерной частотой  $\omega_{\infty}^*$ , при которой скорость распространения волны близка к скорости звука в среде ( $C_p \simeq C$ ), справа — характерной частотой  $\omega_{\infty}^{(e)}$ , при которой глубина проникания фильтрационных возмущений порядка толщины пористой стенки канала. Этот диапазон может быть определен следующим образом:  $\omega_{\infty}^{(e)}/\omega_{\infty}^* = \alpha_0/[m(\alpha_* - \alpha_0)]$ . Причем существование диапазона частот, в котором коэффици-

ент затухания возмущения не зависит от его частоты, наблюдается в каналах с тонкими стенками и с увеличением толщины стенок исчезает. Частотный диапазон может быть значительным, в частности, в случае рис. 3  $\omega_{\infty}^{(c)}/\omega_{\infty}^* \simeq 100$ .

Высокочастотные асимптотики, полученные для каналов с пористыми стенками конечной толщины как в ситуации, когда канал окружен слабопроницаемым пространством, так и в ситуации, когда вокруг канала сильнопроницаемое пространство, совпадают с дисперсионным выражением, характеризующим динамику высокочастотных возмущений в каналах со стенками бесконечной толщины. Из рис. 2, 3 видно, что затухание высокочастотных возмущений, распространяющихся со скоростью, близкой к скорости звука в среде, определяется кинематической вязкостью среды (в менее вязкой среде (воде) затухание волны интенсивнее, чем в воздухе). В области высоких частот затухание волны тем сильнее, чем больше пористость и проницаемость стенок канала.

**3. Эволюция волны типа ступенька.** В рамках полученного волнового уравнения (1.14) рассмотрим распространение слабой ударной волны. Пусть на границе полубесконечного канала при  $t = 0$  происходит повышение давления на величину  $P_e = \text{const}$ . Исследуем эволюцию этого возмущения.

Из принятого допущения, что в исходном состоянии среда в канале находится в состоянии покоя при давлении  $P_0$  ( $P = 0$ ), математическая задача о распределении давления  $P(z, t)$  в полубесконечном канале с пористыми и проницаемыми стенками может быть определена добавлением к уравнению (1.14) дополнительных начального и граничного условий вида

$$\begin{aligned} P = 0, \quad \partial P / \partial t = 0, \quad x \geq 0, \quad t = 0, \\ P = P_e, \quad x = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решая задачу методом преобразований Лапласа по времени (рассматривая лишь правую полуплоскость  $\text{Re} \lambda > 0$ ), от системы (1.13), (3.1) перейдем к операторному представлению задачи:

$$\frac{\partial P}{\partial z^2} = \hat{k}^2 \hat{P}, \quad \hat{P}(z, \lambda) = \int_0^{\infty} P(z, t) \exp(-\lambda t) dt, \quad (3.2)$$

$$\hat{k}^2 = (\lambda^2 C^{-2} (1 + \beta / \sqrt{\lambda})), \quad \text{Re } \hat{k} \geq 0, \quad -\pi/2 \leq \arg \lambda \leq \pi/2, \quad \beta = \frac{m}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\pi}};$$

$$\hat{P}(0, \lambda) = P_e / \lambda. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2), удовлетворяющее условию (3.3), запишем как  $\hat{P}(z, \lambda) = P_e \exp(-\hat{k}z) / \lambda$ . Отсюда на основе интеграла Меллина решение уравнения эволюции малых возмущений в полубесконечных каналах (1.14) в случае волны типа ступенька имеет вид

$$P(z, t) = \frac{\bar{P}_e}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \exp[\lambda(t - zC^{-1}(1 + \beta/\sqrt{\lambda}))^{1/2}] \lambda^{-1} d\lambda. \quad (3.4)$$

Можно показать, что для значений координаты и времени, удовлетворяющих условию  $z > Ct$ , возмущения давления равны нулю ( $P(z, t) = 0$ ). Физически это означает, что передний фронт волны распространяется со скоростью, не превышающей скорость звука в среде.

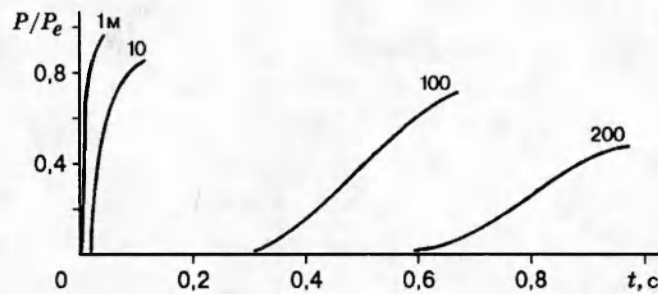


Рис. 4

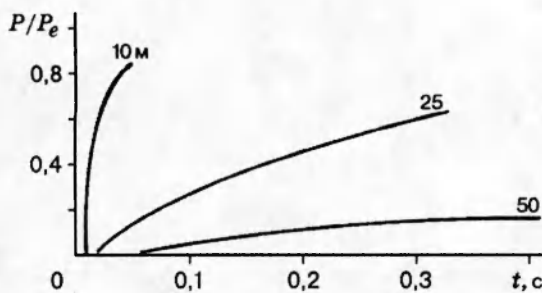


Рис. 5

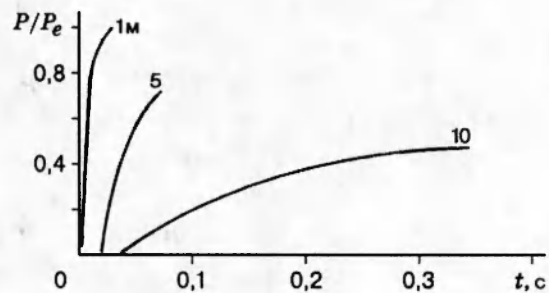


Рис. 6

Перейдем в уравнении (3.4) к интегрированию по мнимой оси ( $s \rightarrow 0$ ), обходя при этом начало координат ( $\lambda = 0$ ), являющееся для подынтегральной функции полюсом первого порядка. При таком переходе ( $\lambda = i\sigma$ ) формула (3.4) примет вид

$$P(z, t) = \frac{P_s}{2} + \frac{P_s}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[-\sigma z C^{-1} \sqrt{\psi} \sin(\varphi/2)] \sin[\sigma(t - z C^{-1} \sqrt{\psi} \cos(\varphi/2))] \sigma^{-1} d\sigma, \quad (3.5)$$

$$y = z/Ct, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\beta}{\beta + \sqrt{2}\sigma}\right), \quad \psi = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}.$$

Из анализа (3.3) следует, что определяющим физическим параметром, влияющим на эволюцию длинноволновых возмущений в полубесконечных каналах с пористыми и проницаемыми стенками, является сжимаемость среды (определяемая скоростью звука). Существенное влияние на процесс затухания (размывания переднего фронта волны) оказывает высота канала (чем меньше высота канала, тем интенсивнее происходит процесс затухания).

На рис. 4, 5 представлены полученные на основе численной реализации решения уравнения (3.5) картины эволюции ударной волны в заполненных воздухом и водой каналах ( $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  м,  $m = 0,2$ ,  $k_c = 10^{-12}$  м<sup>2</sup>). Рис. 6 иллюстрирует распространение этого возмущения с в заполненном воздухом канале, высота которого на порядок меньше ( $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м). Цифры у кривых — расстояние от места иницирования сигнала.

Из рис. 4 и 6 видно, что в заполненном воздухом канале высотой 10 см на расстоянии 200 м от места иницирования сигнала амплитуда переднего участка ударной волны уменьшается примерно в 2 раза. В канале высотой 10 мм на расстоянии уже 10 м от места



инициирования сигнала амплитуда волны составляет примерно 40 % от начальной.

При сравнении рис. 4 и 5 видно, что в воде амплитуда переднего участка волны уменьшается примерно в 2 раза на расстоянии 25 м от места инициирования сигнала, а в случае заполнения канала воздухом такое же примерно уменьшение амплитуды волны наблюдается на расстоянии 200 м.

**4. Влияние вязкости, тепловых потерь и инерционных эффектов.** Для анализа влияния вязкости на динамику возмущений в каналах, полагая, что влияние вязкости проявляется лишь в тонком пограничном слое вблизи стенки канала, толщина которого значительно меньше высоты канала, запишем уравнение импульсов с учетом вязкого трения:

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\tau}{\alpha_0}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\tau$  — касательное вязкостное напряжение на внутренней поверхности стенки канала, которое для рассматриваемой модели можно определить из соотношения  $\tau = -\mu(\partial w'/\partial x)\alpha_0$ , где  $w'(x, z, t)$  — истинное распределение скорости для сечения канала с координатой  $z$  в момент времени  $t$ .

Используя для истинного распределения скоростей уравнение Навье — Стокса и проведя выкладки, аналогичные тем, что были выполнены при получении выражения (1.12), вместо (4.1) получим

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( w + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi\alpha_0}} \int_{-\infty}^t \frac{w}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение неразрывности (1.4) с учетом (1.12) можно привести к виду

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( P + \frac{\sqrt{\nu}m}{\sqrt{\pi\alpha_0}} \int_{-\infty}^t \frac{P}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.3)$$

Дисперсионное уравнение для системы (4.2), (4.3) следующее:

$$K^2 = \omega^2(1 + m/y)(1 + 1/y(\nu))C^{-2}, \quad y(\nu) = \sqrt{-i\omega\alpha_0^2/\nu}. \quad (4.4)$$

Для оценки влияния на динамику возмущений эффектов, связанных с температурной неравновесностью, полагая, что интенсивность теплообмена лимитируется тепловым сопротивлением газовой среды (поскольку коэффициент теплопроводности для газа обычно значительно меньше, чем для твердых тел), запишем для среды в канале уравнение притока тепла:

$$\rho_0 c_g \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{q}{\alpha_0}.$$

Здесь  $T$  — температура;  $c_g$  — теплоемкость газа при постоянном давлении;  $q$  — интенсивность теплообмена, отнесенная к единице площади стенки канала. Принимая допущение, что температурный перепад реализуется в тонком пограничном слое, толщина которого значительно меньше высоты канала, вдали от стенки канала, где поведение газа близко к адиабатическому, получим

$$\rho_0 c_g \frac{\partial T^{\text{ad}}}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad \left( \frac{T^{\text{ad}}}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P}{P_0} \quad \text{или} \quad T^{\text{ad}} = \frac{P}{\rho_0 c_g} \right) \quad (4.5)$$

( $\gamma$  — показатель адиабаты газа). Для распределения температуры  $T'(z, x, t)$  вблизи стенки канала запишем уравнение

$$\rho_0 c_g \frac{\partial T'}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial t}, \quad |x| < \alpha_0. \quad (4.6)$$

Из уравнений (4.5) и (4.6) следует  $\partial \Delta T / \partial t = \alpha_T \partial^2 \Delta T / \partial x^2$ ,  $\Delta T = T' - T^{ad}$ ,  $\alpha_T = \lambda / (\rho_0 c_g)$ . Проведя выкладки, аналогичные тем, что были выполнены при получении выражения (1.13), из уравнения неразрывности (1.1) с учетом (1.2) получим волновое уравнение

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( P + \frac{m\sqrt{\alpha} + (\gamma - 1)\sqrt{\alpha_T}}{\sqrt{\pi}\alpha_0} \int_0^t \frac{P(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

и соответствующее ему дисперсионное выражение

$$K^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{m}{y} + \frac{\gamma - 1}{y(T)} \right) C^{-2}, \quad y(T) = \sqrt{-i \frac{\omega \alpha_0^2}{\alpha_T}}. \quad (4.7)$$

Из выражений (4.4), (4.7) следует, что влияние на эволюцию волн эффектов диссипации энергии, связанных с вязкостью и теплообменом, в сравнении с влиянием фильтрационных эффектов может быть оценено отношениями

$$Skh^{(\nu)} = \frac{1/y(\nu)}{m/y} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}, \quad Skh^{(T)} = \frac{\gamma - 1}{m} \sqrt{\frac{\alpha_T}{\alpha}}.$$

Отсюда видно, что в большинстве случаев, представляющих практический интерес,  $Skh^{(\nu)}, Skh^{(T)} \ll 1$ , и, следовательно, влиянием эффектов диссипации энергии, обусловленных трением и теплообменом между средой в канале и его стенками, можно пренебречь. При построении теоретической модели процесса фильтрации через проницаемые стенки за основу принят закон Дарси. Однако на эволюцию достаточно кратковременных возмущений в каналах с проницаемыми стенками могут оказать влияние инерционные эффекты при фильтрации жидкости в пористом пространстве. Для анализа этого влияния используем уравнение импульсов в наиболее общем виде [9]

$$\rho_0 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = -m \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - \frac{m\mu}{k_c} u^{(1)}.$$

Тогда после соответствующих преобразований получим дисперсионное уравнение

$$K^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{m}{y\sqrt{1 - i\omega/\omega_i}} \right) C^{-2}. \quad (4.8)$$

Из сравнения (4.8) с выражением (2.1) видно, что инерционные эффекты могут оказать существенное влияние на эволюцию возмущений, частотный диапазон которых удовлетворяет условию  $\omega \gg \omega_i = m\nu/k_c$ . В частности, для пористой среды, насыщенной водой, при  $m = 0,1$ ,  $k_c = 10^{-12} \text{ м}^2$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  характерная частота  $\omega_i \simeq 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

В силу вышепринятого основного допущения ( $\lambda = 2\pi C/\omega \geq 2\alpha_0$ ) следует, что теоретическая модель применима для возмущений, частотный диапазон которых определяется из условия  $\omega \ll \omega_* = \pi C/\alpha_0$ . В частности, при  $\alpha_0 = 10^{-2} \text{ м}$  для пористой среды, насыщенной водой, частота, ограничивающая рамки применимости теоретической модели,  $\omega_* = 3 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

Следовательно, диапазон частот, в котором инерционные эффекты, связанные с фильтрационными процессами, могут оказать заметное влияние на эволюцию возмущений в каналах с пористыми и проницаемыми стенками, находится обычно за рамками применимости рассматриваемой модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах // Бюллетени Политехнического общества. 1899. № 5.
2. Allievi L. Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. Milan, 1903. Translated into English by E. E. Halmos. The Theory of Waterhammer. Amer. Soc. Civil Engineering, 1925.
3. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальных жидкостей в трубах. М.: Недра, 1975.
4. Fox J. A. Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks. London, 1977.
5. Сурин А. А. Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним. М.: Трансжелдориздат, 1946.
6. Мостков М. А. Современное состояние и реальные задачи исследований гидроудара // Изв. АН СССР. ОТН. 1954, № 4. С. 85–93.
7. Barez F., Goldsmith W., Sackman J. L. Longitudinal waves in liquid-filled tubes // Int. J. Mech. Sci. 1979. V. 21. P. 213–237.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
9. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.

*Поступила в редакцию 11/VII 1995 г.*

---