ПМТФ, № 6, 1963

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

А. Е. Якубенко

(*Москва*)

Методом Винера—Хопфа решаются две задачи о течении проводящей жидкости в плоском канале. В первой задаче рассматривается движение полубесконечной пластины в электропроводящей жидкости, заключенной между двумя параллельными плоскостями в поперечном магнитном поле. Во второй задаче рассматривается течение жидкости между параллельными стенками, которые наполовину диэлектрики, наполовину идеальные проводники.

§ 1. Движение полубесконечной пластинки. Рассмотрим движение пластины $y_1 = 0$, $x_1 \geqslant 0$, $-\infty < z_1 < \infty$ с постоянной скоростью U_0 вдоль оси z_1 в проводящей, несжимаемой, вязкой жидкости, заключенной между плоскостями $y_1 = \pm h$ в однородном магнитном поле H_0, направленном вдоль оси y_1. Отметим, что аналогичная задача о движении полубесконечной пластины в жидкости, занимающей все пространство, решена Хазимото [1].

Предположим, что единственной составляющей скорости жидкости будет $v_z = v_z(x_1, y_1)$. В силу этого предположения индуцированное магнитное поле будет иметь также только одну составляющую $H_z = H_z(x_1, y_1)$. Для определения v_z и H_z имеем уравнения [2]

$$\triangle v + 2M\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \triangle H + 2M\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

$$v = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

$$v = 1, \quad H = 0 \quad \text{или} \quad \partial H / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0,\ x \geqslant 0$$

Здесь

$$v = \frac{v_z}{U_0}, \quad H = \frac{2M}{R_m}\frac{H_z}{H_0}, \quad x = \frac{x_1}{h}, \quad y = \frac{y_1}{h}, \quad M = \frac{H_0 h}{2c}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma U_0 h}{c^2}$$

Граничные условия для H при $y = \pm 1$ получены в предположении, что стенки — диэлектрики. Граничное условие $H = 0$ при $y = 0$, $x \geqslant 0$ соответствует движению пластинки из диэлектрика, а условие $\partial H / \partial y = 0$ при $y = 0$, $x \geqslant 0$ соответствует движению идеально проводящей пластинки. Решение системы (1.1) ищем в виде [2]

$$v = u_1 \operatorname{ch} My - u_2 \operatorname{sh} My, \qquad H = -u_1 \operatorname{sh} My + u_2 \operatorname{ch} My \tag{1.2}$$

Для определения функций u_1 и u_2 получим

$$\triangle u_{1,2} - M^2 u_{1,2} = 0$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \qquad u_1 = 1 \quad \text{при } y = 0 \qquad (x \geqslant 0)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \qquad \partial u_2 / \partial y = M \quad \text{при } y = 0 \qquad (x \geqslant 0) \tag{1.3}$$

Формулы (1.2) дают решение задачи как в случае движения проводящей пластины, так и в случае непроводящей. В случае непроводящей пластины надо положить $u_2 = 0$, а u_1 найти, решив (1.3).

Начнем с определения функции u_1. Применим двустороннее преобразование Лапласа по x

$$\Phi(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} u_1(x, y)\, dx, \quad \Phi_+(p, y) = \int_0^{\infty} e^{-px} u_1(x, y)\, dx,$$

$$\Phi_-(p, y) = \int_{-\infty}^{0} e^{-px} u_1(x, y)\, dx \quad (p = \xi + i\eta)$$

Для $\Phi(p, y)$ из уравнения (1.3) получим

$$d^2\Phi / dy^2 - \gamma^2\Phi = 0 \qquad (\gamma = \sqrt{M^2 - P^2}) \tag{1.4}$$

Решение для $\Phi(p, y)$ берем в виде

$$\Phi(p, y) = \begin{cases} A(p)\operatorname{sh}\gamma(1-y) & (y \geqslant 0) \\ B(p)\operatorname{sh}\gamma(1+y) & (y \leqslant 0) \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет граничным условиям при $y = \pm 1$. В силу непрерывности u_1 при $y = 0$ получим, что $A(p) = B(p)$. Таким образом, имеем

$$\Phi(p, y) = A(p)\operatorname{sh}\gamma(1 - |y|) \tag{1.5}$$

Для определения $A(p)$ при $y = 0$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_+(p, +0) + \Phi_-(p, +0) &= A(p)\operatorname{sh}\gamma \\ \Phi_+'(p, +0) + \Phi_-'(p, +0) &= -\gamma A(p)\operatorname{ch}\gamma \\ \Phi_+(p, -0) + \Phi_-(p, -0) &= A(p)\operatorname{sh}\gamma \\ \Phi_+'(p, -0) + \Phi_-'(p, -0) &= \gamma A(p)\operatorname{ch}\gamma \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из граничных условий для u_1 при $y = 0$, $x \geqslant 0$ и непрерывности $\partial u_1 / \partial y$ при $y = 0$, $x \leqslant 0$ найдем

$$\Phi_+(p, +0) = \Phi_+(p, -0) = 1 / p, \qquad \Phi_-'(p, +0) = \Phi_-'(p, -0)$$

Введем функции $D_-(p)$ и $S_+'(p)$ соотношениями

$$\begin{aligned} D_-(p) &= \Phi_-(p, +0) + \Phi_-(p, -0) \\ S_+'(p) &= \Phi_+'(p, +0) - \Phi_+'(p, -0) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для $D_-(p)$ и $S_+'(p)$ из (1.6), (1.7) получим функциональное уравнение

$$S_+'(p) + (2\gamma \operatorname{cth}\gamma)\, p^{-1} = -\gamma\operatorname{cth}\gamma\, D_-(p) \tag{1.8}$$

Функциональное уравнение (1.8) решаем методом Винера — Хопфа [3]. В предположении непрерывности $u_1(x, 0)$ при $x = 0$ ($\lim u_1(x, 0) = 1$ при $x \to 0$) из уравнения (1.8) получим

$$S_+'(p) = -[K_-(0)\, K_+(p)]\, p^{-1} \qquad (0 < \operatorname{Re} p < M) \tag{1.9}$$

Здесь

$$K_-(p)\, K_+(p) = \gamma\operatorname{cth}\gamma, \quad K_\pm(p) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + M^2 b_n^2} \pm b_n p}{\sqrt{1 + M^2 a_n^2} \pm a_n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \quad b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

так как $K_-(p) = K_+(-p)$, то $K_-(0) = \sqrt{M\operatorname{cth} M}$.

Из системы (1.6) находим $A(p)$ и, подставляя в (1.5), получим

$$\Phi(p, y) = \frac{\sqrt{M\operatorname{cth} M}\, K_+(p)\operatorname{sh}\gamma(1 - |y|)}{p\gamma\operatorname{ch}\gamma} = \frac{\sqrt{M\operatorname{cth} M}\operatorname{sh}\gamma(1 - |y|)}{pK_-(p)\operatorname{sh}\gamma}$$

$$(0 < \operatorname{Re} p < M)$$

При помощи формулы обращения преобразования Лапласа найдем

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \Phi(p, y)\, dp \qquad (0 < a < M) \tag{1.10}$$

По теореме Коши о вычетах, получим:

при $x \geqslant 0$ $\quad (\alpha_n = \sqrt{M^2 + n^2\pi^2})$

$$u_1(x, y) = \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{sh} M} + \pi \sqrt{M \operatorname{cth} M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\pi |y| e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n^2 K_+(a_n^2)} \tag{1.11}$$

при $x \leqslant 0$ $\quad (\beta_n = \sqrt{M^2 + [(2n-1)\pi/2]^2})$

$$u_1(x, y) = \sqrt{M \operatorname{cth} M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_+(\beta_n) \cos(2n-1)\pi y / 2\, e^{\beta_n x}}{\beta_n^2} \tag{1.12}$$

В случае движения непроводящей пластинки решение на этом оканчивается. Функции v и H определяются формулами (1.2), (1.11), (1.12) и $u_2 = 0$. В случае движения идеально проводящей пластинки необходимо еще определить функцию u_2. Повторяя аналогичные рассуждения, для определения u_2 получаем функциональное уравнение

$$D_-'(p) + 2M / p = -\gamma \operatorname{cth} \gamma S_+(p) \tag{1.13}$$

Здесь

$$S_+(p) = \psi_+(p, +0) - \psi_+(p, -0), \qquad D_-'(p) = \psi_-'(p, +0) + \psi_-'(p, -0)$$

$$\psi_+(p, y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-px} u_2(x, y)\, dx, \qquad \psi_-(p, y) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-px} u_2(x, y)\, dx$$

Применяя метод Винера — Хопфа к уравнению (1.13), найдем

$$S_+(p) = -\frac{2M}{pK_-(0)K_+(p)}, \quad \psi(p, y) = -\frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y \operatorname{sh} \gamma(1 - |y|)}{\sqrt{\operatorname{cth} M}\, p \operatorname{sh} \gamma K_+(p)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y\, K_-(p) \operatorname{sh} \gamma(1 - |y|)}{\sqrt{\operatorname{cth} M}\, p\, \gamma \operatorname{ch} \gamma}$$

При помощи формулы обращения преобразования Лапласа находим

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \psi(p, y)\, dy \qquad (0 < a < M)$$

По теореме о вычетах получим (1.14)

$$u_2(x, y) = -\frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{sign} y + \frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y}{\sqrt{\operatorname{cth} M}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_+(\beta_n) \cos[(2n-1)\pi y/2]\, e^{-\beta_n x}}{\beta_n^2} \quad (x \geqslant 0)$$

$$u_2(x, y) = -\frac{\pi \sqrt{M}}{\sqrt{\operatorname{cth} M}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\pi y\, e^{\alpha_n x}}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \qquad (x \leqslant 0) \tag{1.15}$$

Решения для v и H находятся при помощи (1.2). Как видно из (1.11), (1.12), (1.14), (1.15) и (1.2), функции v и H при $x \to -\infty$ экспоненциально убывают, т. е. в движение вовлекается тонкий слой жидкости, прилегающий к пластине слева. Этот слой тем тоньше, чем больше M.

При $x \to \infty$ получаем

$$v = \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{sh} M} \operatorname{ch} My + \operatorname{sign} y \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{sh} My$$

$$H = -\frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{sh}} \operatorname{sh} My - \operatorname{sign} y \frac{\operatorname{sh} M(1 \quad |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{ch} My$$

решение, соответствующее движению безграничной идеально проводящей пластинки. Расстояния, на которых v и H переходят в указанные решения, уменьшается с ростом M.

§ 2. Движение проводящей жидкости между параллельными плоскостями. Рассмотрим движение электропроводящей жидкости между плоскостями $y_1 = \pm 1$ в направлении оси z_1 под действием постоянного перепада давления и однородного магнитного поля, направленного вдоль оси y_1. Предполагается, что плоскости $y_1 = \pm 1$ наполовину диэлектрики (при $x \geqslant 0 \ - \infty < z < \infty$) наполовину идеальные проводники (при $x \leqslant 0 \ - \infty < z < \infty$). Для определения скорости v_z и индуцированного магнитного поля H_z имеем уравнения магнитной гидродинамики [4]

$$\triangle v + 2M \frac{\partial H}{\partial y} = -1, \qquad \triangle H + 2M \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{2.1}$$

$$v = 0, \ H = 0 \ \text{при}\ y = \pm 1,\ x \geqslant 0, \qquad v = 0,\ \partial H / \partial y = 0 \ \text{при}\ y = \pm 1,\ x \leqslant 0$$

Здесь

$$v = \frac{\mu v_z}{kh}, \qquad H = \frac{cH_z}{4\pi kh \sqrt{\sigma\mu}}, \qquad k = -\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad x = \frac{x_1}{h}, \qquad y = \frac{y_1}{h}$$

Решение (2.1) ищем в виде

$$v = u_1 \operatorname{ch} My - u_2 \operatorname{sh} My + \frac{\operatorname{ch} 2M - \operatorname{ch} 2My}{4M^2 \operatorname{ch} 2M}$$

$$H = -u_1 \operatorname{sh} My + u_2 \operatorname{ch} My + \frac{\operatorname{sh} 2My - 2My \operatorname{ch} 2M}{4M^2 \operatorname{ch} 2M} \tag{2.2}$$

Для определения u_1 и u_2 получаем

$$\triangle u_{1,2} - M^2 u_{1,2} = 0$$

$$u_1 \operatorname{ch} M - u_2 \operatorname{sh} M = 0, \qquad -\operatorname{sh} M \partial u_1 / \partial y + \operatorname{ch} M \partial u_2 / \partial y = 0$$

$$\text{при}\ y = 1,\ x \leqslant 0$$

$$u_1 \operatorname{ch} M + u_2 \operatorname{sh} M = 0, \qquad \operatorname{sh} M \partial u_1 / \partial y + \operatorname{ch} M \partial u_2 / \partial y = 0$$

$$\text{при}\ y = -1,\ x \leqslant 0$$

$$u_1 = H_1 \operatorname{sh} M, \qquad u_2 = \pm H_1 \operatorname{ch} M \qquad \text{при}\ y = \pm 1,\ x \geqslant 0$$

$$(4M^2 H_1 = 2M - \operatorname{th} 2M)$$

Совершим преобразование Лапласа по переменной x (см. § 1). Для функций $\Phi(p, y)$ и $\psi(p, y)$ решения ищем в виде

$$\Phi(p, y) = A(p) \operatorname{ch} \gamma y, \qquad \psi(p, y) = B(p) \operatorname{sh} \gamma y \tag{2.3}$$

Для $A(p)$ и $B(p)$ из граничных условий получим (2.4)

$$(H_1 \operatorname{sh} M) / p + \Phi_-(p, 1) = A(p) \operatorname{ch} \gamma, \qquad \Phi_+'(p, 1) + \Phi_-'(p, 1) = \gamma A(p) \operatorname{sh} \gamma$$

$$(H_1 \operatorname{ch} M) / p + \psi_-(p, 1) = B(p) \operatorname{sh} \gamma, \qquad \psi_+'(p, 1) + \psi_-'(p, 1) = \gamma B(p) \operatorname{ch} \gamma$$

$$\operatorname{ch} M \Phi_-(p, 1) - \operatorname{sh} M \psi_-(p, 1) = 0, \qquad -\operatorname{sh} M \Phi_-'(p, 1) + \operatorname{ch} M \psi_-'(p, 1) = 0$$

Граничные условия при $y = -1$ в силу (2.3) выполняются автоматически. Введем функцию $S_+'(p)$ соотношением

$$S_+'(p) = \psi_+'(p, 1) - \operatorname{th} M \Phi_+'(p, 1)$$

Для определения функций $S_+'(p)$ и $\Phi_-(p, 1)$ из системы (2.4) получаем функциональное уравнение

$$S_+'(p) - \frac{2\gamma H_1 \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{p \operatorname{sh} 2\gamma \operatorname{ch} M} = \frac{4\gamma \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{\operatorname{sh} 2\gamma \operatorname{sh} 2M} \Phi_-(p, 1) \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) решаем методом Винера — Хонфа. В предположении непрерывности

$$u_1(x, 1) \quad \text{при } x \to 0 \qquad (\lim u_1(x, 1) = H_1 \operatorname{sh} M \text{ при } x \to 0)$$

из (2.5) получим

$$\Phi_-(p, 1) = \frac{H_1 \operatorname{sh} M}{p}\left[\frac{K_-(0)}{K_-(p)} - 1\right] \tag{2.6}$$

По известной функции $\Phi_-(p, 1)$ из системы (2.4) для $\psi_-(p, 1)$ имеем

$$\psi_-(p, 1) = \frac{H_1 \operatorname{ch} M}{p}\left[\frac{K_-(0)}{K_-(0)} - 1\right] \tag{2.7}$$

Здесь

$$K_+(p)\, K_-(p) = \frac{2\gamma \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{\operatorname{sh} 2\gamma}$$

$$K_\pm(p) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{(r_n + 1)/2} \pm 2b_n p)^2 + (r_n - 1)/2}{\sqrt{1 + 4M^2 a_n^2} \pm 2pa_n}$$

$$r_n = \sqrt{1 + 4M^2 b_n^2}, \qquad K_+(p) = K_-(-p), \qquad K_-(0) = \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}$$

Из системы (2.4) находим $A(p)$ и $B(p)$. Для функций u_1 и u_2 по формулам обращения преобразования Лапласа получим

$$u_1(x, y) = \frac{H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{px} \operatorname{ch} \gamma y}{p \operatorname{ch} \gamma K_-(p)}\, dp \tag{2.8}$$

$$u_2(x, y) = \frac{H_1 \operatorname{ch} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{px} \operatorname{sh} \gamma y}{p \operatorname{sh} \gamma K_-(p)}\, dp \tag{2.9}$$

$$(0 < a < \min[M, \sqrt{(r_1 + 1)/2}])$$

По теореме о вычетах найдем при $x \geqslant 0$

$$u_1(x, y) = H_1 \operatorname{th} M \operatorname{ch} My -$$

$$- \frac{\pi H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\beta_n x}}{\beta_n^2 K_+(\beta_n)} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} \tag{2.10}$$

$$u_2(x, y) = H_1 \operatorname{cth} M \operatorname{sh} My - \pi H_1 \operatorname{ch} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n x} \sin n\pi y}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \tag{2.11}$$

При $x \leqslant 0$, воспользовавшись связью между $K_+(p)$ и $K_-(p)$, получим

$$u_1(x, y) = H_1 \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \operatorname{ch} My \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Im}\left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2}\right] \times$$

$$\times \exp(\xi_n x) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} +$$

$$+ H_1 \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \operatorname{sh} My \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Re}\left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2}\right] \times$$

$$\times \exp(\xi_n x) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2} \tag{2.12}$$