УДК 517.948

Об исследовании одной обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности

А.И. Сидикова

Южно-уральский государственный университет, просп. им. В.И. Ленина, 76, Челябинск, 454080
E-mail: 7413604@mail.ru

Сидикова А.И. Об исследовании одной обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 81–98.

В данной работе исследуется и решается комбинированная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. В постановке этой задачи выделены три интервала. Первый от 0 до T_1 посвящен нагреву камеры внутреннего сгорания, второй от T_1 до T_2 — охлаждению камеры и более медленному охлаждению ее стенки и третий интервал посвящен естественному остыванию стенки камеры, в то время как температура самой камеры совпадает с окружающей средой. Далее доказана применимость к решению этой задачи преобразования Фурье по t, после применения которого основное уравнение сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению. Используя это уравнение, имеем решение обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности нелинейным методом проекционной регуляризации и получена оценка погрешности приближенного решения.

DOI: 10.15372/SJNM20190106

Ключевые слова: *оценка погрешности, модуль непрерывности, преобразование Фурье, некорректная задача.*

Sidikova A.I. The study of an inverse boundary problem for the heat conduction equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 81–98.

This paper is concerned with investigating and solving the mixed initial boundary value problem for the heat conduction equation. The statement of the problem includes the three intervals: the first one (from $0 \to T_1$) describes heating the combustion chamber, the second (from $T_1 \to T_2$) — cooling the chamber and a slower cooling of its wall. Finally, the third interval describes natural cooling of the chamber wall when the chamber has the temperature coinciding with that of environment. The validity of the application of the Fourier transform with respect to this problem has been proved. This made possible to transform the governing equation to the ordinary differential equation. By using the resulting equation, the inverse boundary value problem for the heat conduction equation by applying the nonlinear method of projection regularization was solved and the error of approximate solution was obtained.

Keywords: *error estimation, modulus of continuity, Fourier transform, ill-posed problem.*

1. Введение

Эффективность принятых практико-конструкторских и технологических решений во многом зависит от глубины и достоверности изучения явлений теплообмена, от адекватности модельных представлений теплофизических процессов, протекающих на поверхностях раздела различных фаз, внутри материалов и конструкций [1]. При этом большое значение придается экспериментальным исследованиям, стендовой и натуральной обработке тепловых режимов и, как следствие, созданию эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов по результатам экспериментов и испытаний.

Успешное применение методов обратных задач в тепловом моделировании и обработке результатов тепловых испытаний в значительной степени определяется глубиной проработки математических вопросов, связанных с постановкой и алгоритмизацией задач, выяснением специфических трудностей их решения [2–13].

В данной статье решается обратная граничная задача для комбинированной системы уравнений. В ней процесс, происходящий внутри камеры сгорания, разделен на три части: в первой от 0 до T_1 происходит нагрев камеры, что приводит к неоднородной краевой задаче, во второй от T_1 до T_2 — нагревание в камере прекращается и происходит естественное охлаждение камеры и более медленное охлаждение ее стенки, что приводит к неоднородной краевой задаче с граничными условиями третьего рода, и последний промежуток, в котором температура камеры совпадает с температурой окружающей среды и происходит естественное остывание ее стенки, что приводит к однородной краевой задаче третьего рода. Данная задача более адекватно отражает процесс, происходящий в элементах теплонагруженных технических конструкций.

Хорошо известно, что удобным инструментом решения уравнений с частными производными являются преобразование Лапласа и преобразование Фурье по t. В силу некорректности решаемой в статье задачи преобразование Лапласа не применимо, поскольку сводит искомую задачу к другой некорректной задаче, а использование преобразования Фурье сопряжено с трудностями, обусловленными его свойствами.

Кроме того, в силу постановки задачи необходимо было проверить дополнительно точки стыковки функций $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ для получения оценки погрешности $\|q_\delta - q_0\|$. Все вышесказанное потребовало подробного исследования прямой задачи.

Полученные результаты являются новыми. В частности новым является обоснование применимости преобразования Фурье по t в данной постановке обратной граничной задачи.

Получено приближенное решение обратной граничной задачи нелинейным методом проекционной регуляризации [14], а также получена точная по порядку оценка погрешности полученного приближенного решения задачи.

2. Постановка прямой задачи на временном отрезке $[0, T_1]$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x < 1, \quad 0 < t \le T_1, \tag{1}$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le t \le T_1, \tag{3}$$

$$u_1(1,t) = q_1(t), \quad 0 \le t \le T_1. \tag{4}$$

Предположим, что функция $q_1(t)$ такая, что

$$q_1(t) \in H^3[0, T_1], \quad q_1(0) = q_1'(T_1) = q_1''(T_1) = 0, \tag{5}$$

нам дана, а функцию $u_1(x,t)$, удовлетворяющую условиям (1)–(5), требуется определить.

Решая задачу (1)–(4) методом разделения переменных, получим

$$u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + q_1(t), \tag{6}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, а

$$C_n(t) = \frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{(n+\frac{1}{2})\pi}\int_0^t q_1'(\tau)e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\tau}d\tau. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть $q_1(t)$ удовлетворяет условию (5). Тогда существует решение $u_1(x,t)$ задачи (1)–(4) такое, что $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) на множестве $[0,1)\times(0,T]$, начальному условию (2), граничным условиям (3) и (4), а также $u_1(x,t)\in C([0,1]\times[0,T])\cap C^{2,1}([0,1)\times[0,T])$.*

Доказательство. Проинтегрировав правую часть формулы (7) по частям два раза, получим

$$C_n(t) = \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}\int_0^t q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)}d\tau + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1'(t) -$$
$$\left[\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q'(0) + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}q_1''(t) + \frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}q_1''(0)\right]. \tag{8}$$

Так как $|C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x| \le |C_n(t)|$ для любого n, а из неравенства Коши–Буняковского

$$\left|\int_0^t q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)}d\tau\right| \le \|q_1'''(t)\|_{L_2[0,T_1]}\frac{1}{\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}, \tag{9}$$

то, ввиду (5), (8) и (9), для любого $t\in[0,T_1]$ и любого n

$$|C_n(t)| \le \frac{\sqrt{2}\|q_1'''(t)\|_{L_2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^6\pi^6} + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1'(t) +$$
$$\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1'(0) + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}q_1''(t) + \frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}q_1''(0). \tag{10}$$

Из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ и формул (8)–(10) по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость ряда (6) на $[0,1]\times[0,T_1]$.

Так как функция $q_1'''(\tau)e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\tau}\in L_2[0,T_1]$, то

$$\int_0^t q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)}d\tau = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}\int_0^t q_1'''(\tau)e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\tau}d\tau \in C[0,T_1]. \tag{11}$$

Таким образом, учитывая, что $q_1(t)$, $q_1'(t)$ и $q_1''(t)\in C[0,T_1]$, а также формулы (8) и (11), получим $C_n(t)\in C[0,T_1]$. С учетом последнего условия и равномерной сходимости ряда (6) на $[0,1]\times[0,T_1]$ получим $u_1(x,T_1)\in C([0,1]\times[0,T_1])$. Продифференцировав функцию $C_n(t)\cos(n+\frac{1}{2})\pi x$ по x и учитывая (10), будем иметь

$$\left|(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x)_x'\right| \le \frac{\sqrt{2}\|q_1'''(t)\|_{L_2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5} + \frac{2q_1'(t)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} +$$
$$\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}q_1'(0) + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}q''(t) + \frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}q_1''(0).$$

Из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ и предыдущего соотношения будет следовать равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)'_x \quad \text{на} \quad [0,1]\times[0,T_1].$$

В результате с учетом (6) имеем

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)'_x \text{ на } [0,1]\times[0,T_1] \text{ и } \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\in C([0,1]\times[0,T_1]).$$

Теперь перейдем к исследованию функции $\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}$.

Продифференцировав функцию $C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ по x дважды и используя (8), получим

$$\left(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)''_{xx}=\frac{-2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}\int_0^t q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)}d\tau-$$
$$\frac{2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}q_1'(t)+\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}q_1'(0)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x+$$
$$\frac{2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1''(t)+\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1''(0)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

Так как числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$ сходятся, то по признаку Вейерштрасса функциональные ряды:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)}d\tau\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}\right),$$
$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x,$$
$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1''(t),$$
$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

сходятся абсолютно и равномерно на $[0,1]\times[0,T_1]$.

Осталось проверить сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$.

Для любого $\varepsilon>0$ этот ряд по признаку Дирихле сходится равномерно на множестве $[0,1-\varepsilon]$. Так как для любого $\varepsilon>0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)''_{xx}$ сходится равномерно на $[0,1-\varepsilon]\times[0,T_1]$, а слагаемые этого ряда непрерывны, то

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x)''_{xx},$$
$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\in C([0,1)\times[0,T_1]),\quad 0\le x<1,\ 0\le t\le T_1. \qquad \square$$

Теперь исследуем функцию $u_1(x,T_1)$.

Лемма 2. *Функция* $u_1(x,T_1)$, *определенная формулами* (6), (8), *принадлежит пространству* $H^4[0,1]$.

Доказательство. Из (5), (6) и (8) следует, что

$$u_1(x,T_1)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(T_1)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x+q_1(T_1),$$

где

$$C_n(T_1)=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}\int_0^{T_1}q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(T_1-\tau)}\,d\tau-$$
$$\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2T_1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}q_1'(0)-\frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2T_1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^5\pi^5}q_1''(0). \tag{12}$$

Поскольку справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x,T_1)}{\partial x}&=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)\pi C_n(T_1)\sin(n+1/2)\pi x,\\ \frac{\partial^2 u_1(x,T_1)}{\partial x^2}&=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)^2\pi^2 C_n(T_1)\cos(n+1/2)\pi x,\\ \frac{\partial^3 u_1(x,T_1)}{\partial x^3}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)^3\pi^3 C_n(T_1)\sin(n+1/2)\pi x,\\ \frac{\partial^4 u_1(x,T_1)}{\partial x^4}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)^4\pi^4 C_n(T_1)\cos(n+1/2)\pi x,\end{aligned} \tag{13}$$

то из (12) и (13) по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость указанных рядов и, как следствие,

$$u_1(x,T_1),\quad \frac{\partial u_1(x,T_1)}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u_1(x,T_1)}{\partial x^2}\quad \text{и}\quad \frac{\partial^3 u_1(x,T_1)}{\partial x^3}\in C[0,1]. \tag{14}$$

Покажем, что $\dfrac{\partial^4 u_1(x,T_1)}{\partial x^4}\in L_2[0,1]$. Из (12) и (13) получим

$$(n+1/2)^4\pi^4C_n(T_1)=\frac{2}{(n+1/2)\pi}\int_0^{T_1}q_1'''(\tau)e^{-(n+1/2)^2\pi^2(T_1-\tau)}\,d\tau-$$
$$2(n+1/2)\pi e^{-\left(n+1/2\right)^2\pi^2T_1}q_1'(0)-\frac{2e^{-(n+1/2)^2\pi^2T_1}}{(n+1/2)\pi}q_1''(0).$$

Из (9) следует, что

$$\left|\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\int_0^{T_1}q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(T_1-\tau)}\,d\tau\right|\le\frac{\sqrt{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\|q_1'''(t)\|_{L_2[0,T_1]},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\int_0^{T_1}q_1'''(\tau)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(T_1-\tau)}\,d\tau\right|<\infty.$$

Второй ряд:

$$2q'(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 T_1} < \infty.$$

Третий ряд:

$$2q_1''(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 T_1}}{(n+\frac{1}{2})\pi}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,1]\times[0,T_1]$. Поэтому $\dfrac{\partial^4 u_1(x,T_1)}{\partial x^4}\in L_2[0,1]$. □

3. Продолжение прямой задачи (1)–(5) на временной промежуток $[T_1, T_2]$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2},\quad 0\le x<1,\ \ T_1\le t\le T_2, \tag{15}$$

$$u_2(x,T_1)=u_1(x,T_1)=f_1(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=0,\quad T_1\le t\le T_2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}+\kappa u_2(1,t)=\kappa g_2(t),\quad T_1\le t\le T_2,\ \ \kappa>0, \tag{18}$$

где $g_2(t)\in H^3[T_1,T_2]$, $g_2'(T_1)=g_2''(T_1)=g_2(T_2)=g_2'(T_2)=g_2''(T_2)=0$. Обозначим через $u_2(1,t)=q_2(t)$, $T_1\le t\le T_2$.

Сделав замену $u_2(x,t)=g_2(t)x^2+U(x,t)-\frac{2g_2(t)}{\kappa}$, перейдем к следующей задаче:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}+2g_2(t)-\left(x^2-\frac{2}{\kappa}\right)g_2'(t),\quad 0\le x<1,\ \ T_1\le t\le T_2,$$

$$U(x,T_1)=f(x)-g_2(T_1)x^2+\frac{2g_2(T_1)}{\kappa},\quad 0\le x\le 1,$$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U(1,t)}{\partial x}+\kappa U(1,t)=0,\quad T_1\le t\le T_2,\ \ \kappa>0.$$

Решая данную задачу методом разделения переменных, получим

$$u_2(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(t)\cos\lambda_n x+g_2(t)x^2-\frac{2g_2(t)}{\kappa},\quad 0\le x\le 1,\ T_1\le t\le T_2, \tag{19}$$

где для любого n

$$S_n(t)=a_n e^{-\lambda_n^2(t-T_1)}+\frac{4\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\int_{T_1}^{t}\left[\left(2g_2(\tau)+\frac{2}{\kappa}g_2'(\tau)-g_2'(\tau)\right)\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n}-\right.$$
$$\left.\frac{2g_2'(\tau)}{\lambda_n^2}\cos\lambda_n+\frac{2}{\lambda_n^3}g_2'(\tau)\sin\lambda_n\right]e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau, \tag{20}$$

$$a_n=\frac{4\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\int_0^1\left(f_1(\xi)-g_2(T_1)\xi^2+\frac{2g_2(T_1)}{k}\right)\cos\lambda_n\xi\,d\xi,$$

а λ_n — это все положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\lambda=\dfrac{\lambda}{\kappa}$.

Тогда $\cos\lambda - \dfrac{\lambda}{\kappa}\sin\lambda = 0$ и $\left(1+\dfrac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\lambda - \dfrac{\lambda}{\kappa}\left(1+\dfrac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\lambda = 0$. Обозначим: $\sin\gamma = \left(1+\dfrac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{\lambda}{\kappa}\left(1+\dfrac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\sin(\gamma-\lambda) = 0$ и, следовательно, $\gamma - \lambda = -\pi n$.

В результате имеем $\sin(\lambda_n + \pi n) = \left(1+\dfrac{\lambda_n^2}{\kappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, а

$$\lambda_n = \pi n + \gamma_n, \tag{21}$$

где $\gamma_n \to +0$ при $n \to \infty$, монотонно убывая. Из вышесказанного вытекает, что

$$|\sin\gamma_n| \le \frac{\kappa}{\pi n}. \tag{22}$$

Из (22) следует существование чисел d_1 и $d_2 > 0$ таких, что для любого $n > 0$

$$d_1 n \le \lambda_n \le d_2 n. \tag{23}$$

Лемма 3. *Числовой ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\lambda_n}{\lambda_n}\right| < \infty$.

Доказательство. Из (21) имеем

$$\sin\lambda_n = \sin(\pi n + \gamma_n) = \sin\pi n\cos\gamma_n + \sin\gamma_n\cos\pi n = (-1)^n\sin\gamma_n, \tag{24}$$

а из (22) и (24) имеем, что $|\sin\lambda_n| \le \dfrac{\kappa}{\pi n}$. Таким образом, получим $\left|\dfrac{\sin\lambda_n}{\lambda_n}\right| \le \dfrac{\kappa}{\pi n\lambda_n}$.

Откуда, по признаку сравнения, следует утверждение леммы. □

Интегрируя правую часть равенства (20) дважды по частям, получим

$$\begin{aligned}
S_n(t) = {} & a_n e^{-\lambda_n^2(t-T_1)} + \frac{8\sin\lambda_n}{\lambda_n^2(2\lambda_n+\sin2\lambda_n)}\left[g_2(t) - g_2(T_1)e^{-\lambda_n^2(t-T_1)}\right] - \\
& \frac{8\sin\lambda_n}{\lambda_n^2(2\lambda_n+\sin2\lambda_n)}\left(\frac{g_2'(t)}{\lambda_n^2} - \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2}\int_{T_1}^{t} g_2''(\tau)e^{\lambda_n^2\tau}d\tau\right) + \\
& \frac{4}{2\lambda_n+\sin2\lambda_n}\left[\frac{2}{\kappa}\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n^3} + \frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^4}\right]g_2'(t) + \frac{4}{2\lambda_n+\sin2\lambda_n}\times \\
& \left[\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{2\sin\lambda_n}{\kappa\lambda_n^2} + \frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n^3} - \frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^4}\right]\left(\frac{g''(t)}{\lambda_n^2} - \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2}\int_{T_1}^{t} g_2'''(\tau)e^{-\lambda_n^2\tau}d\tau\right),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
a_n = {} & \frac{4\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin2\lambda_n}\frac{2g_2(T_1)}{\kappa} - \frac{4g_2(T_1)}{2\lambda_n+\sin2\lambda_n}\left[\sin\lambda_n + \frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n} - \frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}\right] + \\
& \frac{4\lambda_n}{2\lambda_n+\sin2\lambda_n}\int_0^1 f_1(\xi)\cos\lambda_n\xi\,d\xi.
\end{aligned} \tag{26}$$

Исследуем функцию $u_2(x, T_2)$.

Лемма 4. *Функция* $u_2(x, T_2)$, *определенная формулами* (19), (25) *и* (26), *принадлежит пространству* $H^4[0,1]$.

Доказательство. Из (19), (25) следует, что

$$u_2(x,T_2)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(T_2)\cos\lambda_n x,$$

где

$$S_n(T_2)=-\frac{8g_2(T_1)\sin\lambda_n}{\lambda_n^2(2\lambda_n+\sin 2\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2(T_2-T_1)}+\frac{8\sin\lambda_n}{\lambda_n^4(2\lambda_n+\sin 2\lambda_n)}\int_{T_1}^{T_2} g_2''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}\,d\tau-$$
$$\frac{4}{\lambda_n^2(2\lambda_n+\sin 2\lambda_n)}\left[\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}-\frac{2\sin\lambda_n}{\kappa\lambda_n^2}+\frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n^3}-\frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^4}\right]\times$$
$$\int_{T_1}^{T_2} g_2'''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}\,d\tau. \tag{27}$$

Так как справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_2(x,T_2)}{\partial x}=-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(T_2)\lambda_n\sin\lambda_n x, &&\frac{\partial^2 u_2(x,T_2)}{\partial x^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(T_2)\lambda_n^2\cos\lambda_n x,\\
&\frac{\partial^3 u_2(x,T_2)}{\partial x^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(T_2)\lambda_n^3\sin\lambda_n x, &&\frac{\partial^4 u_2(x,T_2)}{\partial x^4}=-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(T_2)\lambda_n^4\cos\lambda_n x,
\end{aligned}\tag{28}$$

то $u_2(x,T_2)$, $\frac{\partial u_2(x,T_2)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_2(x,T_2)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 u_2(x,T_2)}{\partial x^3}\in C[0,1]$. Покажем, что

$$\frac{\partial^4 u_2(x,T_2)}{\partial x^4}\in L_2[0,1].$$

Из (27) и (28) имеем

$$\lambda_n^4 S_n(T_2)=-\frac{8\lambda_n^2 g_2(T_1)\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}e^{-\lambda_n^2(T_2-T_1)}+\frac{8\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\int_{T_1}^{T_2} g_2''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}\,d\tau-$$
$$\frac{4}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\left[\sin\lambda_n-\frac{2\sin\lambda_n}{\kappa}+\frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n}-\frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}\right]\times$$
$$\int_{T_1}^{T_2} g_2'''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}d\tau. \tag{29}$$

Так как $\frac{2\sin\lambda_n}{\kappa}-\frac{2\cos\lambda_n}{\lambda_n}=0$, а из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} g_2''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}\,d\tau\right|\le\|g_2''(\tau)\|_{L_2[T_1;T_2]}\frac{1}{\sqrt{2}\lambda_n},$$
$$\left|\int_{T_1}^{T_2} g_2'''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}d\tau\right|\le\|g_2'''(\tau)\|_{L_2[T_1;T_2]}\frac{1}{\sqrt{2}\lambda_n},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{8\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\int_{T_1}^{T_2} g_2''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}d\tau\right|<\infty,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{4}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\left[\sin\lambda_n-\frac{2\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}\right]\int_{T_1}^{T_2} g_2'''(\tau)e^{-\lambda_n^2(T_2-\tau)}d\tau\right|<\infty.$$

Пользуясь признаком Вейерштрасса, получим сходимость оставшегося ряда в формуле (29). Таким образом, $u_2(x,T_2)\in H^4[0,1]$. □

4. Продолжение прямой задачи (15)–(18) на временной промежуток $[T_2,\infty)$

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2},\quad 0\le x<1,\quad t>T_2, \tag{30}$$
$$u_3(x,T_2)=u_2(x,T_2)=f_2(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{31}$$
$$\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\ge T_2, \tag{32}$$
$$\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial x}+\kappa u_3(1,t)=0,\quad t\ge T_2,\quad \kappa>0. \tag{33}$$

Решая задачу (30)–(33) методом разделения переменных, получим

$$u_3(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n^2(t-T_2)}\cos\lambda_n x,\quad 0\le x\le 1,\quad t\ge T_2, \tag{34}$$

где для любого n

$$A_n=\frac{4\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\int_0^1 f_2(x)\cos\lambda_n x\,dx, \tag{35}$$

а λ_n — это все положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\lambda=\dfrac{\lambda}{\kappa}$.

Лемма 5. *Пусть A_n определено формулой* (35). *Тогда*

$$A_n=\frac{4\lambda_n}{2\lambda_n+\sin 2\lambda_n}\left\{\frac{1}{\lambda_n^4}\left[\int_0^1 f_2^{(4)}(x)(x)\cos\lambda_n x\,dx-f_2'''(1)\sin\lambda_n\right]-\frac{1}{\lambda_n^3}f_2'''(1)\sin\lambda_n\right\},$$

где $f_2^{(4)}(x)$ — четвертая производная по x от функции $f_2(x)$.

Доказательство. Так как A_n определяется формулой (35), то проинтегрировав $\int_0^1 f_2(x)\cos\lambda_n x\,dx$ по частям два раза, получим

$$\int_0^1 f_2(x)\cos\lambda_n x\,dx=\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}\left[\lambda_n f_2(1)+\frac{\lambda_n}{\kappa}f_2'(1)\right]-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^1 f_2''(x)\cos\lambda_n x\,dx.$$

Ввиду того, что

$$\frac{\sin\lambda_n}{\lambda_n^2}\left[\lambda_n f_2(1)+\frac{\lambda_n}{\kappa}f_2'(1)\right]=\frac{\sin\lambda_n}{\kappa\lambda_n}[f_2'(1)+\kappa f_2(1)],$$

с учетом (33) имеем $f_2'(1)+\kappa f_2(1)=0$. В результате получим

$$\int_0^1 f_2(x)\cos\lambda_n x\,dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^1 f_2''(x)\cos\lambda_n x\,dx.$$

Проинтегрировав правую часть предыдущего равенства по частям дважды, получим

$$\int_0^1 f_2(x)\cos\lambda_n x\,dx = \frac{1}{\lambda_n^4}\left[\int_0^1 f_2^{(4)}(x)\cos\lambda_n x\,dx - f_2'''(1)\sin\lambda_n\right] - \frac{1}{\lambda_n^3}f_2''(1)\sin\lambda_n. \qquad \square$$

Из лемм 4 и 5 следует, что $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^2|A_n| < \infty$, откуда с учетом (34) получим

$$\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t} = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2 A_n e^{-\lambda_n^2(t-T_2)}\cos\lambda_n, \tag{36}$$

$$\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t} \in C(T_2,\infty) \ \text{ и существует } \lim_{t\to T_2-0}\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t} < \infty. \tag{37}$$

Обозначим $q_3(t) = u_3(1,t)$. Из (36) и (37) следует, что $q_3(t) \in H^1[T_2,\infty)$.

Лемма 6. *Пусть функция* $\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t}$ *определена формулой* (36). *Тогда существует* $d_3>0$ *такое, что для любого* $t \geq T+1$

$$\left|\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t}\right| \leq d_3 e^{-(t-T-1)} + A_0 e^{-\lambda_0^2(t-T_2)}.$$

Доказательство. Из (35) и (36) следует

$$\left|\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t}\right| \leq d_3\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(t-T_2)},$$

где d_3 — некоторое число.

Предположим, что $t \geq T+1$, а $n > 0$, тогда

$$\lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2}e^{-\lambda_n^2(t-T_2-1)} \leq \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2}e^{-(t-T_2-1)}.$$

Из (23) следует, что при $n > 0$

$$\lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2} \leq d_2 n^2\left[e^{-d_1^2}\right]^n. \tag{38}$$

Из (38) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^2[e^{-d_1^2}]^n < \infty$, и потому существует число d_4 такое, что для любого $t \geq T_2+2$

$$\left|\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t}\right| \leq d_4 e^{-(t-T_2-1)} + A_0 e^{-\lambda_0^2(t-T_2)}. \qquad \square$$

Из формулы (37) и леммы 6 следует, что

$$\frac{\partial u_3(1,t)}{\partial t} \in C[T_2,\infty) \cap L_1[T_2,\infty) \cap L_2[T_2,\infty).$$

Теперь исследуем поведение $\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t}$.

Из формулы (19) следует, что

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 A_n e^{-\lambda_n^2 (t-T_2)} \cos \lambda_n x, \tag{39}$$

где на основании леммы 5,

$$\lambda_n^2 A_n = \frac{4\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\int_0^1 f_2^{(4)} \cos \lambda_n x \, dx - f_2'''(1) \sin \lambda_n \right] - \frac{1}{\lambda_n} f_2''(1) \sin \lambda_n \right\}. \tag{40}$$

Из (23), (40) и леммы 4 следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |A_n| < \infty$, и тогда по признаку Вейерштрасса ряд, стоящий в правой части формулы (39), сходится равномерно на множестве $[T_2, \infty)$, и потому справедлива формула

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} \in C([0,1) \times [T_2, \infty)). \tag{41}$$

Теперь оценим скорость убывания функций

$$u_3(x,t), \quad \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} \ \text{ при } \ t \to \infty.$$

Из (19) и (20) следует для любого $\varepsilon > 0$ существование числа $d_5(\varepsilon)$ такого, что для любого $t \geq T_2 + 2$ и любого $x \in [0, 1-\varepsilon]$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ |u_3(x,t)|, \left| \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} \right| \right\} \leq d_5(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 e^{-(t-T_2-1)}}. \tag{42}$$

Так как из (23) следует, что

$$e^{-\lambda_n^2} \leq [e^{d_1^2}]^{-n}, \tag{43}$$

то из (42) и (43) следует существование числа $d_6(\varepsilon) = d_5(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2}$ такого, что для любого $t \geq T_2 + 2$ и для любого $x \in [0, 1-\varepsilon]$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ |u_3(x,t)|, \left| \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} \right| \right\} \leq d_6(\varepsilon) e^{-(t-T_2-1)}.$$

Введем обозначения:

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t), & t \in [0, T_1], \\ q_2(t), & t \in [T_1, T_2], \\ q_3(t), & t > T_2, \end{cases} \quad \text{и} \quad u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & t \in [0, T_1], \\ u_2(x,t), & t \in [T_1, T_2], \\ u_3(x,t), & t > T_2, \end{cases} \quad x \in [0,1]. \tag{44}$$

Тогда из (41), (44) для любого $\varepsilon > 0$ следует, что существование функции $\chi_\varepsilon(t)$ такой, что для любого $t \geq 0$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1-\varepsilon} \left\{ |u(x,t)|, \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right| \right\} \leq \chi_\varepsilon(t), \tag{45}$$

где

$$\chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} d_7(\varepsilon), & 0 \le t \le T+2, \\ d_6(\varepsilon)e^{-(t-T-1)}, & t > T+2. \end{cases}$$

Так как $\chi_\varepsilon(t) \in L_1[0,\infty)$, то для комбинированной прямой задачи (1)–(5), (15)–(18) и (30)–(33) применимо преобразование Фурье по t.

Из леммы 1 и формулы (45) следует

Теорема 1. *Пусть $\Phi(t) \in C(-\infty,\infty)$ и ограничена на этой прямой. Тогда справедливы соотношения*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Phi(t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\Phi(t)\,dt\right], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Phi(t)\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\Phi(t)\,dt\right].$$

5. Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что функция $q(t)$, используемая в комбинированной задаче (1)–(5), (15)–(18), (30)–(33), неизвестна, а вместо нее дана функция $f(t) = u(x_0,t)$, где $x_0 \in (0,1)$, $t \ge 0$.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует функция $q_0(t) \in H^1[0,\infty)$ такая, что при подстановке ее в граничное условие задачи (1)–(5), (15)–(18), (30)–(33) получим решение $u_0(x,t)$ этой задачи такое, что

$$u_0(x_0,t) = f_0(t), \tag{46}$$

но функция $f_0(t)$ нам неизвестна, а вместо нее даны $f_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2[0,\infty)} \le \delta. \tag{47}$$

Требуется, используя исходные данные $f_\delta(t)$ и δ обратной граничной задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33), (46) и (47), найти ее приближенное решение $q_\delta(t)$ и получить оценку погрешности $\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0,\infty)}$.

6. Решение нелинейным методом проекционной регуляризации обратной граничной задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33), (46) и (47)

Пусть $\overline{H} = L_2(-\infty;\infty) + iL_2(-\infty;\infty)$ — пространство над полем комплексных чисел, а множество $M_r \subset \overline{H}$ и определено формулой

$$M_r = \left\{ q(t) \;\;:\;\; q(t) \in \overline{H},\; \int_0^{+\infty} |q(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |q'(t)|^2 dt \le r^2 \right\},$$

где r — известное положительное число.

Для решения задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33), (46) и (47) введем оператор F, действующий из $\overline{H}$ в $\overline{H}$ и называемый преобразованием Фурье:

$$\hat{q}(\sigma) = F[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} q(t) e^{-i\sigma t} dt, \quad \sigma \in R, \ q(t) \in \overline{H} \bigcap \overline{L}_1[0,\infty),$$

$\overline{L}_1[0,\infty)$ — пространство над полем комплексных чисел.

Обозначим через $\overline{F}$ расширение оператора F до пространства $\overline{H}$. Из теоремы Планшереля следует, что оператор $\overline{F}$ изометрично отображает $\overline{H}$ на $\overline{H}$.

Пусть $\hat{q}(\sigma) \in \overline{H}$, тогда имеет место формула

$$\overline{F}^{-1}[\hat{q}(\sigma)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \hat{q}(\sigma) e^{it\sigma}\, d\sigma, \quad -\infty < t < \infty,$$

где предел понимается в смысле среднеквадратичной сходимости.

Из теоремы 1 следует применимость преобразования Фурье к решению задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33).

Используя преобразование F, сведем задачу (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33) к следующей:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x,\sigma)}{\partial x^2} = i\sigma \hat{u}(x,\sigma), \qquad x \in (0,1), \quad -\infty < \sigma < \infty, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \hat{u}(0,\sigma)}{\partial x} = 0, \quad \hat{u}(x_0,\sigma) = \hat{f}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \tag{49}$$

где

$$\hat{u}(x,\sigma) = F[u(x,t)], \qquad \hat{f}(\sigma) = F[f(t)].$$

Решения (48), (49) имеют вид

$$\hat{u}(x,\sigma) = \begin{cases} D_1(\sigma) e^{\mu_0\sqrt{\sigma}x} + D_2(\sigma) e^{-\mu_0\sqrt{\sigma}x}, & \sigma \geq 0, \\ D_1(\sigma) e^{-\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}x} + D_2(\sigma) e^{\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}x}, & \sigma < 0, \end{cases}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\overline{\mu}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, $D_1(\sigma)$ и $D_2(\sigma)$ — функции, удовлетворяющие условиям (46) и (49).

Используя условие $\hat{u}(1,\sigma) = \hat{q}(\sigma)$, получим

$$\hat{q}(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\sigma}}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\sigma}x_0}\hat{f}(\sigma), & \sigma \geq 0, \\ \dfrac{\operatorname{ch}\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}}{\operatorname{ch}\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}x_0}\hat{f}(\sigma), & \sigma < 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача (48), (49) сведется к уравнению

$$A\hat{q}(\sigma) = \hat{f}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty. \tag{50}$$

Пусть $\hat{f}_0(\sigma) = F[f_0(t)]$, $\hat{f}_\delta(\sigma) = F[f_\delta(t)]$, тогда

$$\|\hat{f}_\delta(\sigma) - \hat{f}_0(\sigma)\|_{\overline{H}} \leq \delta. \tag{51}$$

Обозначим через $\hat{M}_r$ множество из $\overline{H}$ такое, что $\hat{M}_r \supset F[M_r]$ и

$$\hat{M}_r = \Big\{\hat{q}(\sigma)\ :\ \hat{q}(\sigma) \in \overline{H},\ \ \int_{-\infty}^{\infty} (1+\sigma^2)|\hat{q}(\sigma)|d\sigma \le 2r^2\Big\}. \tag{52}$$

Из того, что $q_0(t) \in M_r$, будет следовать, что $\hat{q}_0(\sigma) \in \hat{M}_r$.

Для решения задачи (50)–(52) используем регуляризующее семейство операторов, определяемое формулой

$$\hat{q}^{\alpha}_{\delta}(\sigma) = P_\alpha \hat{f}_\delta(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\sigma}}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\sigma}x_0}\hat{f}_\delta(\sigma), & 0 \le \sigma \le \alpha, \\ \dfrac{\operatorname{ch}\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}}{\operatorname{ch}\overline{\mu}_0\sqrt{|\sigma|}x_0}\hat{f}_\delta(\sigma), & -\alpha \le \sigma < 0, \\ \qquad 0, & |\sigma| > \alpha. \end{cases} \tag{53}$$

Для выбора параметра регуляризации $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{f}_\delta, \delta)$ в формуле (53) по исходным данным $(\hat{f}_\delta, \delta)$ используем уравнение $\|A\hat{q}^{\alpha}_{\delta}(\sigma) - \hat{f}_\delta(\sigma)\|^2 = 16\delta^2$.

Определим приближенное решение уравнения (50) формулой $\hat{q}_\delta(\sigma) = q_\delta^{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}(\sigma)$.

Из теоремы, сформулированной в [14, с. 284], следует

$$\|\hat{q}_\delta(\sigma) - \hat{q}_0(\sigma)\| \le 7\omega(\delta, r), \tag{54}$$

$\omega(\delta, r) = \{\|\hat{q}(\sigma)\|\ :\ \ \hat{q}(\sigma) \in \hat{M}_r,\ \ \|A\hat{q}(\sigma)\| \le \delta\}$.

Пусть $\{P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}\ :\ 0 < \delta \le \delta_0\}$ — метод приближенного решения уравнения (50) на классе $\hat{M}_r$. Тогда для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ введем количественную характеристику точности этого метода на множестве $\hat{M}_r$:

$$\Delta_\delta\Big[P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}\Big] = \sup_{\hat{f}_0,\hat{f}_\delta}\{\|P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}\hat{f}_\delta(\sigma) - \hat{q}_0(\sigma)\|\ :\ \hat{q}_0(\sigma) \in \hat{M}_r,\ \hat{f}_\delta(\sigma) \in \overline{H},\ \|\hat{f}_\delta(\sigma) - A\hat{q}_0(\sigma)\| \le \delta\}.$$

Из теоремы, доказанной в [13], следует справедливость оценки

$$\Delta_\delta\Big[P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}\Big] \ge \omega(\delta, r). \tag{55}$$

Пусть

$$\Theta^2(\alpha) = \sup\Big\{\int_{\alpha}^{\infty} |\hat{q}_0(\sigma)|^2 d\sigma + \int_{-\infty}^{-\alpha} |\hat{q}_0(\sigma)|^2 d\sigma\ :\ \hat{q}_0(\sigma) \in \hat{M}_r\Big\}. \tag{56}$$

Из (52) и (56) получаем, что $\Theta^2(\alpha) = \frac{2r^2}{1+\alpha^2}$ при условии $\hat{q}_0(\sigma) \in \hat{M}_r$.

Лемма 7. *Пусть* $\alpha_0 = \dfrac{1}{2x_0^2}\ln^2 2$. *Тогда при* $\alpha \ge \alpha_0$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{4}e^{(1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \le \|P_\alpha\| \le 4e^{(1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Доказательство леммы следует из определения нормы оператора.

Следуя лемме [15, лемма 2], для вычисления модуля непрерывности $\omega(\delta, r)$ необходимо решить уравнение

$$r\alpha G(\alpha) = \delta. \tag{57}$$

После чего решение $\overline{\alpha}(\delta)$ этого уравнения подставить в функцию $G(\alpha)$, определяемую параметрически формулами

$$\widetilde{G}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad \alpha = e^{(x_0-1)\sqrt{\frac{\beta}{2}}}. \tag{58}$$

Тогда из (57) и (58) будет следовать, что

$$\omega(\delta, r) = rG(\overline{\alpha}(\delta)). \tag{59}$$

Таким образом, из (54), (58) и (59) получим оценку

$$\|\hat{q}_\delta(\sigma) - \hat{q}_0(\sigma)\| \le 7rG(\overline{\alpha}(\delta)). \tag{60}$$

Для упрощения оценки (60) рассмотрим два уравнения:

$$e^{(x_0-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{\delta}, \qquad e^{2(x_0-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{\delta}. \tag{61}$$

Решения уравнений (61) обозначим через $\overline{\alpha}_1(\delta)$ и $\overline{\alpha}_2(\delta)$ соответственно.

Тогда из (57), (61) получим, что при достаточно малых значениях δ, определяемых $\overline{\alpha}(\delta)$, справедливы соотношения

$$\overline{\alpha}_2(\delta) \le \overline{\alpha}(\delta) \le \overline{\alpha}_1(\delta),$$

где $\overline{\alpha}_1(\delta) = \frac{2}{(x_0-1)^2}\ln^2\frac{r}{\delta}$ и $\overline{\alpha}_2(\delta) = \frac{1}{2(x_0-1)^2}\ln^2\frac{r}{\delta}$, а из предыдущего неравенства

$$\overline{\alpha}(\delta) \sim \ln^2\delta \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Из теоремы, доказанной в [15], следует, что

$$G(\overline{\alpha}_2(\delta)) \le G(\overline{\alpha}(\delta)) \le G(\overline{\alpha}_1(\delta)), \tag{62}$$

где

$$G(\overline{\alpha}_1(\delta)) = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{(x_0-1)^4}\ln^4\delta}} \qquad G(\overline{\alpha}_2(\delta)) = \frac{1}{4\sqrt{1+\frac{1}{4(x_0-1)^4}\ln^4\delta}}.$$

Из (55) получаем, что оценка является точной по порядку, т. е.

$$\sup\left\{\|\hat{q}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\sigma) - \hat{q}_0(\sigma)\| : \hat{q}_0(\sigma)\in\hat{M}_r, \|\hat{f}_\delta(\sigma) - \hat{f}_0(\sigma)\|\le\delta\right\} \ge \frac{r}{4\sqrt{1+\frac{1}{4(x_0-1)^4}\ln^4\frac{r}{\delta}}}. \tag{63}$$

Из леммы 7, (60), (62) и (63) следует

Теорема 2. *Для метода* $\{P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)} : 0 < \delta \le \delta_0\}$ *имеет место точная по порядку оценка погрешности*

$$\frac{r}{4\sqrt{1+\frac{1}{4(x_0-1)^4}\ln^4\delta}} \le \Delta_\delta[P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta,\delta)}] \le \frac{74r}{\sqrt{1+\frac{4}{(x_0-1)^4}ln^4\delta}}.$$

Применяя к $\hat{q}_\delta(\sigma)$ преобразование

$$q_\delta(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\overline{F}^{-1}[\hat{q}_\delta(\sigma)]\right], & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\overline{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье, получим приближенное решение $q_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33).

Таким образом, для приближенного решения $q_\delta(t)$ задачи (1)–(3), (15)–(18), (30)–(33) будет справедлива точная по порядку оценка погрешности

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq \frac{28r}{\sqrt{1 + \frac{4}{(x_0-1)^4}\ln^4\delta}}.$$

7. Заключение

В данной статье используется конструкция, максимально приближенная к реальной, т. е. процесс нагрева границы объекта разделен на три интервала. Первый — нагревание границы. Второй и третий — прекращение нагрева и свободное охлаждение стенки объекта. При этом детально исследуются точки стыковки различных интервалов и доказательство принадлежности искомой граничной функции классу $H^1[0,\infty)$. Все это позволяет использовать для решения задачи преобразование Фурье и, как следствие, получение оценки погрешности решения.

Литература

1. **Алифанов О.М.** Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
3. **Гласко В.Б., Кулик Н.И., Шкляров И.Н., Тихонов А.Н.** Об одной обратной задаче теплопроводности // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1979. — Т. 19, № 3. — С. 768–774.
4. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некоторые задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980; Перевод: Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., and Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. — Moscow: Nauka Publ., 1980.
5. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978; Перевод: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — The Netherlands: VSP, 2002.
6. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Некорректные задачи. Численные методы и приложения — М.: Физматлит, 1989.
7. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009; Перевод: Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.
8. **Белоносов А.С., Шишленин М.А.** Задача продолжения для параболического уравнения с данными на части границы // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 22–34.
9. **Денисов А.М.** Введение в теорию обратных задач. — М: Изд-во МГУ, 1994.
10. **Кабанихин С.И., Хасанов А.Х., Пененко А.В.** Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск. — 2008. — Vol. 11, № 1. — С. 41–51; Перевод: Kabanikhin S.I.,

Hasanov A., Penenko A.V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, iss. 1. — P. 34–45.

11. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: УИФ "Наука", 1993.
12. **Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н.** Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. — М.: БИНОМ, 2014.
13. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. матем. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
14. **Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.С.** Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Тр. ИММ УРО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 281–288.
15. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18, № 8. — P. 935–944.

Поступила в редакцию 13 ноября 2017 г.
После доработки 19 мая 2018 г.
Принята к публикации 5 октября 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Alifanov O.M.** Obratnye zadachi teploobmena. — M.: Mashinostroenie, 1988.
2. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.
3. **Glasko V.B., Kulik N.I., Shklyarov I.N., Tikhonov A.N.** Ob odnoy obratnoy zadache teploprovodnosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1979. — T. 19, № 3. — S. 768–774.
4. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P.** Nekotorye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. — M.: Nauka, 1980; Perevod: Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., and Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. — Moscow: Nauka Publ., 1980.
5. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978; Perevod: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — The Netherlands: VSP, 2002.
6. **Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V.** Nekorrektnye zadachi. Chislennye metody i prilozheniya — M.: Fizmatlit, 1989.
7. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sib. nauch. izd-vo, 2009; Perevod: Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.
8. **Belonosov A.S., Shishlenin M.A.** Zadacha prodolzheniya dlya parabolicheskogo uravneniya s dannymi na chasti granicy // Sib. elektron. matem. izv. — 2014. — T. 11. — S. 22–34.
9. **Denisov A.M.** Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach. — M: Izd-vo MGU, 1994.
10. **Kabanikhin S.I., Khasanov A.Kh., Penenko A.V.** Metod gradientnogo spuska dlya resheniya obratnoy koefficientnoy zadachi teploprovodnosti // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk. — 2008. — Vol. 11, № 1. — S. 41–51; Perevod: Kabanikhin S.I., Hasanov A., Penenko A.V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, iss. 1. — P. 34–45.
11. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Nekorrektnye zadachi s apriornoy informaciey. — Ekaterinburg: UIF "Nauka", 1993.
12. **Yagola A.G., Van Yanfey, Stepanova I.E., Titarenko V.N.** Obratnye zadachi i metody ikh resheniya. Prilozheniya k geofizike. — M.: BINOM, 2014.

13. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti po poryadku metoda proekcionnoy regulyarizacii pri reshenii obratnykh zadach // Sib. zhurn. industr. matem. — 2004. — T. 7, № 2. — S. 117–132.

14. **Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S.** Ob ocenke pogreshnosti priblizhennogo resheniya odnoy obratnoy zadachi v klasse kusochno-gladkikh funkciy // Tr. IMM URO RAN. — 2012. — T. 18, № 1. — S. 281–288.

15. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18, № 8. — P. 935–944.