

УДК 532.528:532.58:534.12

ПАДЕНИЕ ТЕЛА С ПЛОСКИМ УПРУГИМ ДНОМ НА ТОНКИЙ СЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД МАЛЫМ УГЛОМ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

С использованием нелинейных уравнений мелкой воды и метода сращиваемых асимптотических разложений в плоской постановке решена задача об ударе тела типа ящика с плоским упругим днищем по тонкому слою жидкости под малым углом. Установлено, что при некоторых значениях входных параметров задачи давление жидкости вблизи ребра тела становится меньше атмосферного, происходит отрыв жидкости от днища ящика. Выполнены расчеты, демонстрирующие влияние упругости днища и отрыва жидкости на движение тела. Показано, что наличие упругого днища приводит к существенному изменению распределения гидродинамического давления и может стать причиной более высоких, чем в случае жесткого тела, нагрузок.

Ключевые слова: удар, образование струй, нелинейные уравнения мелкой воды, отрыв жидкости от тела, упругая пластина, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Задача о соударении тел с жидкостью вызывает интерес исследователей при моделировании природных явлений, таких как падение астероида, а также технических процессов, например аварийной посадки летательных аппаратов. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что наибольшие гидродинамические давления имеют место при ударе тел с плоским днищем под малым углом или гладких затупленных тел. Удар по тонкому слою жидкости значительно опаснее удара по глубокой воде. Таким образом, рассматриваемый случай является наиболее опасным. Теоретические и экспериментальные исследования [1–3] также показывают, что при ударе затупленного тела по тонкому слою воды не происходит образования солитона. Жидкость, вытесняемая телом, поднимается вверх в виде струи, толщина которой сравнима с толщиной слоя жидкости.

Помимо численных алгоритмов существуют аналитические подходы к решению задачи об ударе. Первый из них — приближение Вагнера для случая гладкого затупленного тела и бесконечно глубокой жидкости [4]. Вторым подходом предложен А. А. Коробкиным для случая удара по тонкому слою жидкости [1, 5]: задача решалась в двумерной постановке методом сращиваемых асимптотических разложений. В работах [6–8] развита теория удара по поверхности жидкости конечной глубины. В последние годы проводятся исследования несимметричного и косоугольного удара тел [8–14], влияния деформируемости конструкции [13, 15, 16], отрыва жидкости от тела на процесс удара [12–14, 18]. В [12, 14] исследован наклонный удар гладкого затупленного тела по тонкому слою жидкости, при этом в точке отрыва ставились условия $p = p_x = 0$. В [13, 17] рассмотрен случай косоугольного удара упру-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00076а).

© Ткачева Л. А., 2014

гой пластины по жидкости бесконечной глубины, исследованы различные условия в точке отрыва, проведено сравнение результатов и показано, что при $p = p_x = 0$ выполняются условия Бриллюэна — Вилла.

В работе [15] изучена задача о симметричном ударе тела типа ящика с плоским днищем под нулевым углом с учетом деформаций днища. В [18] исследовано несимметричное падение жесткого ящика на тонкий слой жидкости под малым углом с учетом отрыва. В настоящей работе подход [1, 5] применяется для решения задачи о несимметричном ударе тела с плоским днищем о тонкий слой жидкости с учетом вращения этого тела, упругости дна и отрыва жидкости от тела.

1. Основные предположения и формулировка задачи. Задача рассматривается в двумерной постановке в предположении, что тело падает вертикально вниз со скоростью V_0 под малым углом к горизонту. Схема течения жидкости и движения тела показана на рис. 1. Днище тела плоское, упругое, деформируется при ударе. В начальном положении жидкость находится в покое и занимает область $0 < y < h_0$, тело касается поверхности жидкости левым ребром в точке A . Остальная часть поверхности жидкости свободна. Жидкость полагается идеальной несжимаемой, ее течение — потенциальным. Упругое днище тела моделируется тонкой упругой пластиной. В момент времени $t = 0$ тело начинает погружаться, а жидкость вытесняется, при этом образуются две струи: правая струя течет вдоль поверхности тела (см. рис. 1), левая струя — вверх. С течением времени жидкость, вытекающая из-под тела, оттесняет левую струю на некоторое расстояние от него. Координата $c(t)$ — абсцисса точки поворота жидкости и образования правой струи. Полагается, что толщина слоя жидкости значительно меньше горизонтальных размеров тела: $h_0 \ll L$ (L — полудлина тела, $\varepsilon = h_0/L \ll 1$ — малый параметр), угол наклона тела мал: $\theta = O(\varepsilon)$. Прогиб упругого днища тела также полагается малым: $w(x, t)/L = O(\varepsilon)$. Введены две системы координат: неподвижная декартова система координат Oxy и система координат $O'x_1y_1$, связанная с телом. Справедливы соотношения

$$x_1 = -L + (x - x_a)/\cos \theta, \quad \mathbf{n} = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)),$$

где x_a — абсцисса точки A ; \mathbf{n} — вектор нормали к нижней поверхности тела.

Область течения жидкости делится на девять подобластей (см. рис. 1). В работе [1] с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений получено решение в

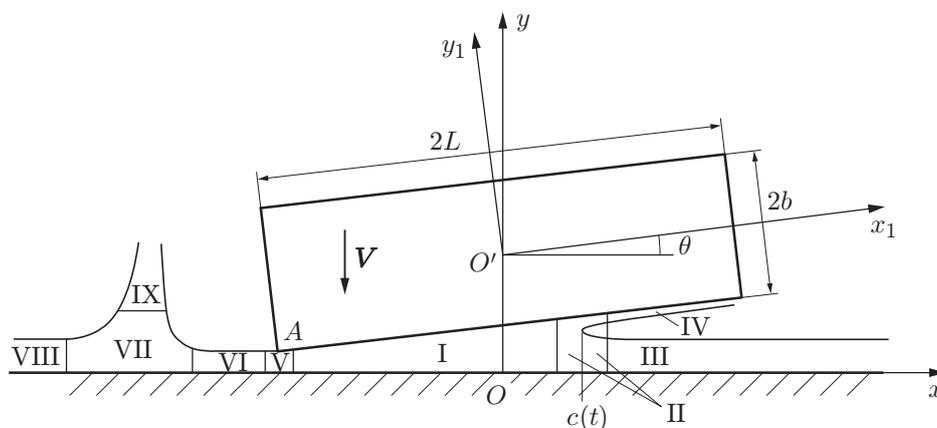


Рис. 1. Схема движения тела и жидкости:

I–IX — подобласти течения жидкости (I — под телом, II — поворота жидкости и образования правой струи, III — покоящаяся жидкость справа, IV — правая струя, V — окрестность левого угла тела, VI — инерционного движения жидкости, VII — поворота жидкости и образования левой струи, VIII — покоящаяся жидкость слева, IX — левая струя)

областях V–IX для случая, когда тело движется с постоянной скоростью, в работе [5] — для областей I–IV при симметричном ударе гладкого затупленного тела о мелкую воду. Для определения движения тела достаточно выявить закономерность движения жидкости только в областях I, II и V, контактирующих с ним.

В процессе удара можно выделить четыре стадии [5, 7, 8].

1. На первой стадии $s(t) \ll c(t) \ll h_0$, где $s(t)$ — глубина погружения тела. На этой стадии влиянием толщины слоя жидкости можно пренебречь, справедливо приближение Вагнера для жидкости бесконечной глубины.

2. На второй стадии $s(t) \ll c(t) = O(h_0)$. Влияние толщины слоя жидкости становится существенным. Этот случай анализируется в работах [7, 8].

3. На третьей стадии $s(t) \ll h_0 \ll c(t)$. Эта стадия анализируется в [8].

4. На четвертой стадии $s(t) = O(h_0) \ll c(t)$.

Продолжительность каждой последующей стадии значительно больше продолжительности предыдущих. Следовательно, для точки поворота $c(t)$ на каждой стадии начальные условия являются нулевыми в главном порядке. Поэтому каждая стадия процесса удара может рассматриваться отдельно и независимо от предыдущих стадий [5, 7, 8].

В настоящей работе изучается четвертая стадия процесса удара. Эту стадию, в свою очередь, можно разделить на три временных периода. В первый период справа вдоль пологой стороны тела образуется струя, смоченная область расширяется. Во второй период точка $c(t)$ достигает правого конца ящика, давление в этой точке падает до атмосферного, струя жидкости отрывается от тела и направлена под некоторым углом к нему (рис. 2). Продолжительность второго периода мала. В третий период правый конец тела начинает погружаться в воду и реализуется схема течения, представленная на рис. 1 для левой струи.

В [1, 5] показано, что при сделанных предположениях в первый период в главном порядке выполняется следующее: 1) в области I

$$\begin{aligned} x = O(L), \quad y = O(h_0), \quad t = O(h_0 V_0^{-1}), \quad u = O(V_0 L h_0^{-1}), \quad v = O(V_0), \\ p = O(\rho V_0^2 (L h_0^{-1})^2), \quad c = O(L), \quad c' = O(V_0 L h_0^{-1}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

граница области I меняется со временем, горизонтальная компонента скорости и давление жидкости не зависят от координаты y , т. е. гидростатические силы малы по сравнению с гидродинамическими, движение жидкости описывается нелинейными уравнениями мелкой воды; 2) область II движется в направлении оси x со скоростью $c'(t)$, $x = c(t) + O(h_0)$, $y = O(h_0)$, горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости имеют одинаковый порядок $u = O(V_0 L / h_0)$, $v = O(V_0 L / h_0)$; 3) в областях II и V движение жидкости квазистационарное в главном порядке; 4) в области II скорость тела мала по сравнению со скоростью жидкости; 5) в области IV давление жидкости равно атмосферному, жидкие

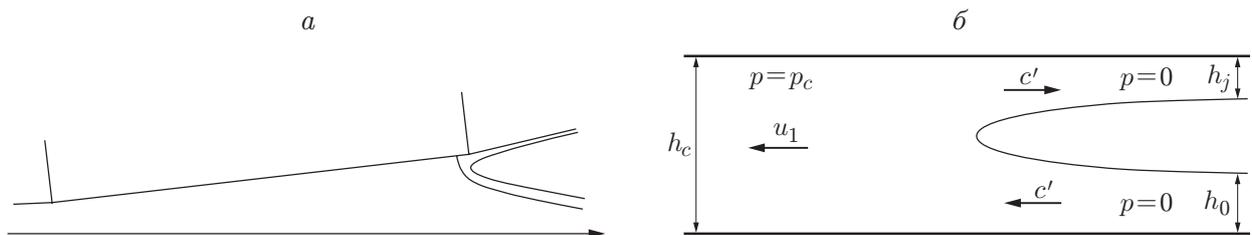


Рис. 2. Схема течения жидкости в области II:

a — положение области II в течение второго периода, b — основные параметры течения жидкости в области II

частицы движутся инерциально и тангенциально к поверхности тела (течение в этой области изучено в [19], показано, что влиянием струи на движение жидкости в области II можно пренебречь); 6) в области V давление равно атмосферному, вертикальная компонента скорости жидких частиц мала по сравнению с горизонтальной, а горизонтальная компонента скорости не зависит от координаты x ; 7) в области IX толщина струи сравнима с начальной толщиной слоя жидкости; 8) в области II решение строится приближенно на основе законов сохранения и сращивается с решением в области I и решением, соответствующим состоянию покоя в области III, решение в этих областях не зависит от особенностей течения жидкости в других областях.

Во второй период в области II имеем $x = L + O(h_0)$, $y = O(h_0)$, $u = O(VL_0/h_0)$, $v = O(V_0L/h_0)$, $c' = O(V_0L/h_0)$, тогда $t = O(h_0^2/(V_0L)) = O(\varepsilon h_0/V_0)$, т. е. продолжительность второго периода равна $T_2 = O(\varepsilon T)$, где T — продолжительность четвертой стадии.

В третий период выполняются соотношения (1.1), горизонтальная скорость и давление жидкости не зависят от координаты y , движение жидкости описывается нелинейными уравнениями мелкой воды. Так как продолжительность второго периода мала, то в главном порядке в третьем периоде можно использовать начальные условия из первого периода, не рассматривая второй период.

В случае отрыва жидкости от тела прослойка воздуха полагается очень тонкой и изменением толщины слоя жидкости можно пренебречь. Предполагается также, что в момент отрыва вертикальная и угловая компоненты скорости движения тела не меняются, а меняются ускорения, так как изменяются сила и момент гидродинамических сил.

2. Уравнения движения жидкости и тела. Уравнения движения тела запишем в виде законов изменения количества движения и момента количества движения (смещениями по горизонтали пренебрегаем в силу их малости):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(MY'(t) + \rho_1 h_1 \cos \theta(t) \int_{-L}^L w_t(x_1, t) dx_1 \right) &= -Mg + \cos \theta(t) \int_{-L}^{c_1(t)} [p(x_1, t) - p_0] dx_1, \\ \frac{d}{dt} \left(J\theta'(t) + \rho_1 h_1 \int_{-L}^L x_1 w_t(x_1, t) dx_1 \right) &= \int_{-L}^{c_1(t)} x_1 [p(x_1, t) - p_0] dx_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь M , J — масса и момент инерции тела без деформаций; Y — вертикальная координата центра тяжести тела; g — ускорение свободного падения; p — гидродинамическое давление; p_0 — атмосферное давление; $w(x_1, t)$ — прогиб днища; ρ_1 , h_1 — плотность и толщина днища ящика; $c_1(t)$ — абсцисса точки поворота и образования правой струи в системе координат, связанной с телом:

$$c_1(t) = -L + (c(t) - x_a) / \cos \theta(t).$$

Уравнение колебаний днища имеет вид

$$\rho_1 h_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_1, t) + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \mathbf{n} \right) + D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} = p(x_1, t) - p_0, \quad D = \frac{Eh_1^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $\mathbf{r}(x_1, t)$ — радиус-вектор точки x_1 при движении тела без учета деформаций; \mathbf{n} — нормаль к днищу.

Прогиб днища удовлетворяет краевым условиям

$$w(\pm L, t) = 0, \quad kw'(\pm L, t) + Dw''(\pm L, t) = 0,$$

где штрих обозначает производную по координате x_1 , параметр k характеризует жесткость заделки.

В приближении мелкой воды течение жидкости в области I описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad h_t + (uh)_x = 0, \quad (2.2)$$

$$h(x, t) = y_a(t) + \operatorname{tg} \theta(t)(x - x_a) + \cos \theta(t)w(x_1, t),$$

где $u(x, t)$ — горизонтальная скорость жидкости; ρ — плотность жидкости; $h(x, t)$ — толщина слоя жидкости; x_a, y_a — координаты точки A , которые связаны с координатами центра тяжести тела X, Y соотношениями

$$x_a = X - L \cos \theta + b \sin \theta, \quad y_a(t) = Y(t) - b \cos \theta - L \sin \theta.$$

На левой границе области I из условий срачивания решений в областях I и V задаем условие равенства давления атмосферному $p(-L, t) = p_0$ [1]. В начальный момент имеем условия

$$y_a(0) = h_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad Y'(0) = -V_0, \quad \theta'(0) = 0, \quad w(x_1, 0) = w_t(x_1, 0) = 0.$$

На правой границе области I в первый период ставятся условия срачивания решения с решением в области II.

Течение жидкости в области II существенно двумерное. Область II движется со скоростью $c'(t)$. В работе [5] показано, что в этой области течение жидкости приближенно квазистационарное (в главном порядке). Точное внутреннее решение в области II построено в [20]. Однако для определения решения в главном порядке и срачивания решений в областях I, II, III можно использовать интегральные законы сохранения.

Течение жидкости в области II определяем в квазистационарном приближении [5, 20], переходя в систему координат, движущуюся со скоростью c' . Скоростью тела в главном порядке пренебрегаем. Поскольку угол наклона тела порядка ε и $w(x, t)/L = O(\varepsilon)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ поверхность тела можно приближенно заменить горизонтальной пластиной (см. рис. 2, б). Из условий срачивания решений в областях I, II и III находим скорости струй и давление (см. рис. 2). Закон сохранения массы, интеграл Бернулли и закон сохранения импульса запишем в виде

$$h_0 c' = h_j c' + u_1 h_c, \quad \frac{p_0}{\rho} + \frac{c'^2}{2} = \frac{p_c}{\rho} + \frac{u_1^2}{2}, \quad (p_c - p_0 + \rho u_1^2) h_c = \rho c'^2 (h_0 + h_j), \quad (2.3)$$

где h_j — толщина струи; $h_c = h(c, t)$ — толщина слоя жидкости в точке $c(t)$; $u_1 = c' - u_c(t)$; $u_c(t) = u(c(t), t)$ — скорость жидкости в точке $c(t)$; $p_c = p(c(t), t)$ — давление жидкости в точке $c(t)$. Из соотношений (2.3) находим

$$\frac{u_c}{c'} = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_c}} \right), \quad \frac{h_j}{h_0} = \left(1 - \sqrt{\frac{h_c}{h_0}} \right)^2, \quad p_c = \frac{\rho u_c^2}{2(\sqrt{h_c/h_0} - 1)} + p_0. \quad (2.4)$$

Во второй период схема, приведенная на рис. 2, б, становится несправедливой. В этом случае необходимо учитывать, что струя отделяется от ящика и направлена под некоторым углом к нему (см. рис. 2, а). В [18] показано, что угол отклонения струи от поверхности днища ящика порядка $O(\varepsilon)$. В уравнение сохранения количества движения в горизонтальном направлении входит косинус этого угла

$$\cos \varepsilon = 1 + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно, в главном порядке изменение угла струи можно не учитывать.

В третий период падения тела на правой границе области I ставится условие равенства гидродинамического давления атмосферному $p(L, t) = p_0$. В случае отрыва жидкости от днища ящика точка отрыва x_* находится из условий

$$p(x_*, t) = p_0, \quad p_x(x_*, t) = 0. \quad (2.5)$$

3. Определение течения жидкости в области I. Из уравнения мелкой воды (2.2) находим

$$u(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \left(u_a(t) y_a(t) - \int_{x_a}^x h_t(\xi, t) d\xi \right), \quad (3.1)$$

где $u_a(t) = u(x_a, t)$ — скорость жидкости в точке A. Интегрируя уравнение Эйлера, получаем

$$p(x, t) = \frac{\rho}{2} [u^2(x_a, t) - u^2(x, t)] - \rho \int_{x_a}^x u_t(\xi, t) d\xi + p_0; \quad (3.2)$$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \left(u'_a(t) y_a(t) + u_a(t) y'_a(t) - \int_{x_a}^x h_{tt}(\xi, t) d\xi \right) - \frac{h_t(x, t)}{h^2(x, t)} \left(u_a(t) y_a(t) - \int_{x_a}^x h_t(\xi, t) d\xi \right). \quad (3.3)$$

Из условий сращивания следует уравнение

$$p_c(t) = \frac{\rho}{2} [u_a^2(t) - u_c^2(t)] - \rho \int_{x_a}^{c(t)} u_t(\xi, t) d\xi + p_0.$$

Подставляя в это уравнение выражение (3.3), определяем ускорение

$$u'_a(t) = -\frac{u_a(t) y'_a(t)}{y_a(t)} + \frac{1}{S y_a(t)} \left(\frac{u_a^2(t)}{2} - \frac{u_c^2(t)}{2} - \frac{p_c(t) - p_0}{\rho} + \int_{x_a}^{c(t)} \frac{d\xi}{h(\xi, t)} \int_{x_a}^{\xi} h_{tt}(\eta, t) d\eta + u_a(t) y_a(t) \int_{x_a}^{c(t)} \frac{h_t(\xi, t) d\xi}{h^2(\xi, t)} - \int_{x_a}^{c(t)} \frac{h_t(\xi, t) d\xi}{h^2(\xi, t)} \int_{x_a}^{\xi} h_t(\eta, t) d\eta \right), \quad (3.4)$$

$$S = \int_{x_a}^{c(t)} \frac{d\xi}{h(\xi, t)}.$$

4. Определение движения тела. Введем безразмерные переменные, параметры и функции

$$x = Lx', \quad Y = h_0 Y', \quad t = \frac{h_0}{V_0} t', \quad c = Lc', \quad h(x, t) = h_0 h'(x', t'),$$

$$w(x, t) = h_0 w'(x', t'), \quad u(x, t) = \frac{V_0 L}{h_0} u'(x', t'), \quad p(x, t) - p_0 = \frac{\rho V_0^2 L^2}{h_0^2} p'(x', t'),$$

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L}, \quad \gamma = \frac{gh_0}{V_0^2}, \quad \sigma = \frac{h_0 M}{\rho L^3}, \quad \alpha = \frac{J}{\rho L^4}, \quad \mu = \frac{\rho_1 h_1 h_0}{\rho L^2}, \quad \chi = \frac{D}{kL}$$

(штрих, обозначающий безразмерные переменные, далее опускается).

Прогиб днища тела представим в виде разложения по собственным функциям

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a_{km}(t) W_{km}(x),$$

где a_{km} — искомые коэффициенты разложения; W_{2m} , W_{1m} — соответственно четные и нечетные собственные функции, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 W_{km}}{dx^4} = \lambda_{km}^4 W_{km}$$

и краевым условиям

$$W_{km}(\pm 1) = 0, \quad W'_{km}(\pm 1) + \chi W''_{km}(\pm 1) = 0.$$

Собственные функции являются ортогональными

$$\int_{-1}^1 W_{km}(x) W_{jn}(x) dx = \delta_{kj} \delta_{mn} B_{km}$$

и имеют вид

$$W_{1m}(x) = \sin(\lambda_{1m}x) - S_{1m} \operatorname{sh}(\lambda_{1m}x), \quad S_{1m} = \frac{\sin \lambda_{1m}}{\operatorname{sh} \lambda_{1m}},$$

$$W_{2m}(x) = \cos(\lambda_{2m}x) - S_{2m} \operatorname{ch}(\lambda_{2m}x), \quad S_{2m} = \frac{\cos \lambda_{2m}}{\operatorname{ch} \lambda_{2m}},$$

$$B_{1m} = 1 - S_{1m}^2 + 2\chi \sin^2 \lambda_{1m}, \quad B_{2m} = 1 + S_{2m}^2 + 2\chi \cos^2 \lambda_{2m}.$$

Собственные числа λ_{km} удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{cth} \lambda_{1m} - \operatorname{ctg} \lambda_{1m} + 2\chi \lambda_{1m} = 0, \quad \operatorname{th} \lambda_{2m} + \operatorname{tg} \lambda_{2m} + 2\chi \lambda_{2m} = 0.$$

Используя выражения (3.3), (3.4) и выделяя члены, зависящие от вторых производных, перепишем формулу для давления (3.2). Переходя в систему координат, связанную с телом, и отбрасывая члены второго порядка малости, в главном порядке получаем представление для давления

$$p(x_1, t) - p_0 = \rho \left[Y''(t) \cos^2 \theta(t) Q_1(x_1) + \frac{1}{2\varepsilon} \theta''(t) \cos \theta(t) Q_2(x_1) + \cos^3 \theta(t) \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km}(t) Q_{km}(x_1) \right] + p_1(x_1, t), \quad (4.1)$$

где выражения при вторых производных имеют смысл коэффициентов присоединенных масс; давление $p_1(x_1, t)$ зависит от параметров Y , Y' , θ , θ' , a_{km} , a'_{km} :

$$\frac{p_1(x_1, t)}{\rho} = \frac{1}{S(c_1)} \left[\frac{u_a^2(t)}{2} (S(c_1) - S(x_1)) + \left(\frac{u_c^2(t)}{2} + \frac{p_c(t) - p_0}{\rho} \right) S(x_1) \right] - \frac{u^2(x_1, t)}{2} - \frac{b\theta'^2 \cos \theta}{h_0} Q_1(x_1) + Q_p(x_1); \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
Q_k(x_1) &= S_k(x_1) - \frac{S(x_1)S_k(c_1)}{S(c_1)}, & Q_p(x_1) &= S_p(x_1) - \frac{S(x_1)S_p(c_1)}{S(c_1)}, \\
S(x_1) &= \int_{-1}^{x_1} \frac{d\xi_1}{h(\xi_1, t)}, & S_k(x_1) &= \int_{-1}^{x_1} \frac{\xi_1^k d\xi_1}{h(\xi_1, t)}, & S_p(x_1) &= \int_{-1}^{x_1} \frac{G_p(\xi_1) d\xi_1}{h^2(\xi_1, t)}, \\
G_p(\xi_1) &= \left(Y' \cos \theta + \frac{\theta' \xi_1}{\varepsilon} + \cos^2 \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a'_{km} W_{km}(x_1) \right) \left(u_a(t) y_a(t) - Y'(t) \cos \theta (\xi_1 + 1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta'(\xi_1^2 - 1)}{2\varepsilon} - \cos^2 \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a'_{km} [\Psi_{km}(x_1) - \Psi_{km}(-1)] \right), \\
Q_{km}(x_1) &= S_{km}(x_1) - \frac{S(x_1)S_{km}(c_1)}{S(c_1)}, & S_{km}(x_1) &= \int_{-1}^{x_1} \frac{\Psi_{km}(\xi_1) d\xi_1}{h(\xi_1, t)}, \\
h(x_1, t) &= y_a(t) + \sin \theta(t) \frac{x_1 + 1}{\varepsilon} + \cos \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a_{km}(t) W_{km}(x_1), \\
\Psi_{km}(x_1) &= \int_{-1}^{x_1} W_{km}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

В случае отрыва жидкости от днища ящика в точке отрыва ставятся условия (2.5). Если отрыв происходит вблизи левого конца, точка A уже не принадлежит области I . В этом случае целесообразно использовать следующее представление для скорости:

$$u(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \left(u_0(t) y_0(t) - \int_0^x h_t(\xi, t) d\xi \right),$$

где $u_0(t) = u(0, t)$, $y_0 = h(0, t)$ — скорость и глубина жидкости при $x = 0$. Предполагается, что к моменту отрыва середина днища ящика уже смочена. В противоположном случае можно выбрать любую другую точку в области I . Из уравнений (2.2) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{p_x}{\rho} &= - \frac{u'_0(t) y_0(t) + u_0(t) y'_0(t)}{h(x, t)} + Y''(t) \frac{x}{h(x, t)} + \theta'' \frac{x^2}{2\varepsilon \cos^2 \theta h(x, t)} + \\
&\quad + \frac{\cos^2 \theta}{h(x, t)} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km}(t) [\Psi_{km}(x_1) - \Psi_{km}(0)] + u(x, t) \frac{h_t(x, t)}{h(x, t)} - uu_x - \frac{b\theta'^2 x}{h_0 \cos \theta h(x, t)}, \\
\frac{p(x, t) - p_0}{\rho} &= - \frac{u^2(x, t)}{2} + \frac{u^2(x_*, t)}{2} - [u'_0(t) y_0(t) + u_0(t) y'_0(t)] \int_{x_*}^x \frac{d\xi}{h(\xi, t)} + \\
&\quad + Y''(t) \int_{x_*}^x \frac{\xi d\xi}{h(\xi, t)} + \frac{\theta''(t)}{2\varepsilon \cos^2 \theta} \int_{x_*}^x \frac{\xi^2 d\xi}{h(\xi, t)} + \cos^2 \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km}(t) \int_{x_*}^x \frac{[\Psi_{km}(\xi) - \Psi_{km}(0)] d\xi}{h(\xi, t)} + \\
&\quad + \int_{x_*}^x u(\xi, t) \frac{h_t(\xi, t)}{h(\xi, t)} d\xi - \frac{b\theta'^2}{h_0 \cos \theta} \int_{x_*}^x \frac{\xi d\xi}{h(\xi, t)}.
\end{aligned}$$

Из условия $p(c, t) = p_c(t)$ находим

$$u'_0(t) = -\frac{u_0(t)y'_0(t)}{y_0(t)} + \frac{1}{Sy_0(t)} \left(\frac{u_*^2(t)}{2} - \frac{u_c^2(t)}{2} - \frac{p_c(t) - p_0}{\rho} + \int_{x_*}^{c(t)} \frac{d\xi}{h(\xi, t)} \int_0^\xi h_{tt}(\eta, t) d\eta + \right. \\ \left. + u_0(t)y_0(t) \int_{x_*}^{c(t)} \frac{h_t(\xi, t) d\xi}{h^2(\xi, t)} - \int_{x_*}^{c(t)} \frac{h_t(\xi, t) d\xi}{h^2(\xi, t)} \int_0^\xi h_t(\eta, t) d\eta \right).$$

Подставим выражения для давления (4.1), (4.2) в уравнения движения тела (2.1), члены со вторыми производными перенесем в левую часть. В безразмерных переменных система уравнений относительно неизвестных функций $Y(t)$, $\theta(t)$, $a_{km}(t)$, $u_a(t)$, $c_1(t)$ в главном порядке имеет вид

$$\left[\sigma - \cos^3 \theta \left(\frac{S_1^2(c_1)}{S(c_1)} - S_2(c_1) \right) \right] Y''(t) - \frac{\theta''}{2\varepsilon} \cos^2 \theta \left(\frac{S_1(c_1)S_2(c_1)}{S(c_1)} - S_3(c_1) \right) - \\ - \cos^4 \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km}(t) \left(\frac{S_1(c_1)S_{km}(c_1)}{S(c_1)} - S_{1km}(c_1) \right) + 2\mu \cos \theta \sum_{m=1}^N a''_{2m}(t) \Psi_{2m}(1) = \\ = -\gamma\sigma + \frac{\cos \theta}{\rho} \int_{-1}^{c_1} p_1(x_1, t) dx_1,$$

$$\left[\alpha - 4\mu \frac{b}{L} \sum_{m=1}^N a_{2m}(t) \Psi_{2m}(1) - \frac{\cos \theta}{4\varepsilon} \left(\frac{S_2^2(c_1)}{S(c_1)} - S_4(c_1) \right) \right] \theta''(t) - \\ - Y'' \frac{\cos^2 \theta}{2} \left(\frac{S_1(c_1)S_2(c_1)}{S(c_1)} - S_3(c_1) \right) - \frac{\cos^3 \theta}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km} \left(\frac{S_2(c_1)S_{km}(c_1)}{S(c_1)} - S_{2km}(c_1) \right) + \\ + 2\mu \sum_{m=1}^N a''_{1m}(t) \left(\Psi_{1m}(1) + \frac{2 \sin \lambda_{1m}}{\lambda_{1m}^2} \right) = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^{c_1} x_1 p_1(x_1, t) dx_1 + 4\mu \frac{b}{L} \theta' \sum_{m=1}^N a'_{2m}(t) \Psi_{2m}(1),$$

$$\mu \left(a''_{km}(t) B_{km} + 2 \cos \theta \delta_{2k} \Psi_{2m}(1) Y''(t) + 2 \frac{\theta''}{\varepsilon} \delta_{1k} \left(\Psi_{1m}(1) + \frac{2 \sin \lambda_{1m}}{\lambda_{1m}^2} \right) \right) - \\ - Y''(t) \cos^2 \theta \left(\frac{S_1(c_1)S_{km}(c_1)}{S(c_1)} - S_{1km}(c_1) \right) - \theta'' \frac{\cos \theta}{2\varepsilon} \left(\frac{S_2(c_1)S_{km}(c_1)}{S(c_1)} - S_{2km}(c_1) \right) - \\ - \cos^3 \theta \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^N a''_{jn} \left(\frac{S_{km}(c_1)S_{jn}(c_1)}{S(c_1)} - S_{kmjn}(c_1) \right) = \int_{-1}^{c_1} p_1(x_1, t) W_{km}(x_1) dx_1 -$$

$$- \beta \lambda_{km}^4 B_{km} a_{km} - 2\mu \theta'^2 \delta_{2k} \Psi_{2m}(1) \frac{b}{h_0},$$

$$\begin{aligned}
u'_a(t) = & -\frac{u_a(t)y'_a(t)}{y_a(t)} + \frac{1}{y_a(t) \cos \theta S(c_1)} \left[\frac{u_a^2(t)}{2} - \frac{u_c^2(t)}{2} - \frac{p_c(t) - p_0}{\rho} + S_p(c_1) + \right. \\
& + \left(Y''(t) \cos \theta - \frac{b\theta'^2}{h_0} \right) \cos \theta (S_1(c_1) + S(c_1)) + \frac{\theta'' \cos \theta}{2\varepsilon} (S_2(c_1) - S(c_1)) + \\
& \left. + \cos^2 \theta \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^N a''_{km}(t) (S_{km}(c_1) - \Psi_{km}(-1)S(c_1)) \right], \\
c'_1(t) = & \frac{u_c(t)}{2 \cos \theta (1 - \sqrt{h_0/h_c})}, \\
S_{jkm}(x_1) = & \int_{-1}^{x_1} \frac{\xi_1^j \Psi_{km}(\xi_1) d\xi_1}{h(\xi_1, t)}, \quad S_{kmjn}(x_1) = \int_{-1}^{x_1} \frac{\Psi_{km}(\xi_1) \Psi_{jn}(\xi_1) d\xi_1}{h(\xi_1, t)},
\end{aligned}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Данная система справедлива в первый период падения тела, до тех пор пока $c(t) < 1$. В третий период $c_1(t) \equiv 1$, последнее уравнение отбрасывается, а в четвертом уравнении $p_c(t) \equiv p_0$. Полученная система уравнений сводится к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Точка отрыва x_* определялась из трансцендентного уравнения $p_x(x_*, t) = 0$ численно итерациями. В случае отрыва вблизи нижнего конца тела в интегралах полученной системы уравнений нижний предел -1 заменяется на x_* .

В отличие от задачи о косом ударе гладкого затупленного тела (когда тело не препятствует течению жидкости в зоне отрыва) [14, 15] в данной задаче область отрыва находится под телом. Так как сила и момент, действующие на тело, зависят от размеров области его контакта с жидкостью, необходимо выяснить, как будет двигаться жидкость в зоне отрыва. Жидкость в зоне отрыва находится при атмосферном давлении, ее верхняя поверхность — под углом к горизонту и ограничена днищем тела, при этом жидкость имеет достаточно большую горизонтальную скорость. Можно предположить, что жидкость должна вновь натекает на днище ящика и вытесняет воздух как более легкий, однако это возможно только в случае, если давление в зоне отрыва больше атмосферного.

Поскольку давление нелинейно зависит от входных параметров, отрыв жидкости может возникать и прекращаться скачком или постепенно, в зависимости от значений входных параметров. Кроме того, при отрыве возможен захват воздуха. Предполагается, что слой воздуха тонкий, зоны захвата малы и не оказывают существенного влияния на движение жидкости и тела. Таким образом, полагаем, что для жидкости в зоне отрыва справедливо уравнение (2.2), а ее давление в этой зоне равно атмосферному.

Для расчетов необходимо правильно выбрать начальные данные. В начальный момент времени все величины разложим в ряды Тейлора по времени. В размерных переменных имеем

$$\begin{aligned}
Y(t) = Y(0) - V_0 t + O(t^2), \quad \theta(t) = \theta_0 + O(t^2), \quad a_{km}(t) = O(t^2), \\
h(x, t) = h_0 - V_0 t + \text{tg } \theta_0 (x - x_a) + O(t^2), \quad c(t) = x_a + c'(0)t + O(t^2), \\
u_a(t) = u'_a(0)t + O(t^2), \quad p_c(t) = p_0 + p'_c(0)t + O(t^2).
\end{aligned}$$

Поскольку упругие смещения днища тела имеют второй порядок малости по t , начальные данные получаем такие же, как и для жесткого тела. Из выражения (3.1) для скорости находим

$$u_c(t) = \frac{u'_a(0)h_0 t + V_0 c'(0)t}{h_0 - V_0 t + \text{tg } \theta_0 c'(0)t} + O(t^2) = \left(u'_a(0) + \frac{V_0 c'(0)}{h_0} \right) t + O(t^2). \quad (4.3)$$

Проведя преобразования первого уравнения (2.4), получаем

$$\frac{u_c(t)}{c'(0)} = (c'(0) \operatorname{tg} \theta_0 - V_0) \frac{t}{h_0} + O(t^2). \quad (4.4)$$

Из формул (4.3), (4.4) находим

$$\frac{u'_a(0)}{c'(0)} = \frac{c'(0) \operatorname{tg} \theta_0 - 2V_0}{h_0}.$$

Из третьего уравнения (2.4) следует

$$\frac{p_c(t) - p_0}{\rho} = c'^2(0) \frac{(c'(0) \operatorname{tg} \theta_0 - V_0)t}{h_0} + O(t^2). \quad (4.5)$$

Из уравнений (3.2), (3.3) получаем

$$\frac{p_c(t) - p_0}{\rho} = -c'^2(0) \frac{(c'(0) \operatorname{tg} \theta_0 - 2V_0)t}{h_0} + O(t^2). \quad (4.6)$$

Приравнявая два выражения для давления, из формул (4.5), (4.6) находим

$$c'(0) = \frac{3V_0}{2 \operatorname{tg} \theta_0}.$$

Тогда

$$u_a(t) = -\frac{3V_0^2 t}{4h_0 \operatorname{tg} \theta_0} + O(t^2), \quad u_c(t) = \frac{3V_0^2}{4h_0 \operatorname{tg} \theta_0} t + O(t^2), \quad a_{km}(t) = O(t^2),$$

$$\frac{p_c(t) - p_0}{\rho} = \frac{9V_0^3 t}{8h_0 \operatorname{tg}^2 \theta_0} + O(t^2), \quad u(x, t) = -\frac{3V_0^2 t}{4h_0 \operatorname{tg} \theta_0} + \frac{V_0(x - x_a)}{h_0} + O(t^2).$$

В безразмерных переменных имеем

$$u_a(t) = -\frac{3\varepsilon t}{4 \operatorname{tg} \theta_0} + O(t^2), \quad u_c(t) = \frac{3\varepsilon t}{4 \operatorname{tg} \theta_0} + O(t^2), \quad p_c(t) = p_0 + \frac{9\varepsilon^2 t}{8 \operatorname{tg}^2 \theta_0} + O(t^2),$$

$$u(x, t) = -\frac{3\varepsilon t}{4 \operatorname{tg} \theta_0} + x - x_a + O(t^2), \quad y_a(t) = 1 - t + O(t^2),$$

$$h(x, t) = 1 - t + (x - x_a) \operatorname{tg} \theta_0 / \varepsilon + O(t^2), \quad a_{km}(t) = O(t^2).$$

Полученные выражения позволяют определить значения неизвестных функций на первом шаге по времени.

5. Результаты численных расчетов. В работе [13] бóльшая часть расчетов выполнена для легкого тела типа полого ящика, так как такое тело является более маневренным, легко поворачивается, его движение более разнообразно, угол его наклона может менять знак. В случае упругого днища движение легкого ящика неустойчиво, поскольку масса подвижной части сравнима с массой всего тела, соответственно неустойчивой становится процедура вычислений. Поэтому в случае упругого днища рассматривалось достаточно тяжелое тело. При приближении тела к нижней поверхности слоя жидкости для устойчивости процедуры вычислений шаг по времени приходилось уменьшать, вследствие чего при достижении некоторого малого расстояния до этой поверхности расчет прекращался.

Численные расчеты выполнялись для ящика с грузом, изготовленного из стальных листов (толщина листа $h_1 = 0,02$ м, плотность $\rho_1 = 7800$ кг/м, модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²). Форма и размеры ящика, плотность груза менялись. Груз полагался однородным и заполняющим всю внутренность ящика. Жесткость заделки днища $\chi = 10$. Далее приводятся примеры расчетов, демонстрирующие влияние упругости днища и отрыва жидкости на режимы движения жидкости и тела. Точки излома кривых для жесткого тела соответствуют моменту времени, когда точка поворота правой струи достигает правой концевой точки ящика $c(t) = 1$ и происходит смена граничного условия.

На рис. 3, 4 представлены зависимости от времени вертикальной скорости центра масс $V = dY/dt$ и угла наклона тела θ , размера области контакта, вертикальных координат концевых точек тела $y_b(t)$, $y_a(t)$, скоростей вытекающей жидкости u_a , u_c , а также распределения прогиба дна и безразмерного давления жидкости $P = (p - p_0)/(\rho(V_0 L h_0^{-1})^2)$ по координате x в различные моменты времени для ящика с размерами $b = 1$ м, $L = 0,5$ м при $V_0 = 2$ м/с, $\theta_0 = 0,1$, $h_0 = 0,1$ м. Плотность груза $\rho_2 = 1500$ кг/м³. В этом случае отрыв жидкости от тела небольшой и кратковременный, его влияние на движение тела незначительно. Отрыв наблюдался вблизи верхнего конца тела, зоны отрыва показаны на рис. 3, б.

На рис. 5, 6 приведены аналогичные зависимости для тела с размерами $L = b = 0,5$ м (остальные параметры такие же, как в предыдущем случае).

На рис. 3–6 видно, что упругость днища оказывает существенное влияние на все величины, несмотря на то что их поведение в случаях жесткого и деформируемого тел аналогично. Скорость падения упругого тела меняется более плавно. При учете деформаций распределение гидродинамического давления существенно отличается от распределения в случае жесткого тела, при этом значения давления могут быть существенно больше или меньше. Как и в случае жесткого тела, абсолютное значение скорости падения тела увеличивается до тех пор, пока гидродинамическое давление не достигнет значительной величины. Затем модуль скорости начинает уменьшаться, но при приближении к нижней поверхности слоя жидкости может вновь начать увеличиваться, если давление под ящиком будет уменьшаться (см. рис. 5, а). В случае ящика с размерами $b = L = 0,5$ м зоны отрыва достаточно большие, однако значительного влияния на движение тела не оказывают. Существенное различие величин скорости вытекающей жидкости при учете отрыва и без него обусловлено тем, что для случая отрыва приведены значения скорости жидкости в точке отрыва.

Следует отметить, что в случае жесткого ящика отрыв жидкости во всех проведенных расчетах наблюдался вблизи нижнего конца [18]. В случае ящика с упругим днищем отрыв на нижнем конце наблюдался редко и в течение малого промежутка времени, в основном отрыв происходил вблизи верхнего конца. При отсутствии деформаций наиболее существенное влияние отрыва отмечено в случае ящика с размерами $b = 0,5$ м, $L = 1$ м [18]. Аналогичные расчеты для такого же ящика с упругим днищем показали, что давление в области под ящиком уменьшается и становится отрицательным в середине области, в то время как на границах области контакта оно больше атмосферного. Это свидетельствует о возможности кавитации, причем в начале погружения тела в воду. Данное явление требует построения другой модели и в настоящей работе не рассматривается.

При увеличении начальной скорости или массы тела (плотности груза) длительность отрыва и размер зоны отрыва меньше, возможен безотрывный процесс удара. Такой же результат получен для жесткого тела [18].

Заключение. Решена задача об ударе тела типа ящика с плоским упругим днищем по тонкому слою жидкости под малым углом. Показано, что скорость движения тела

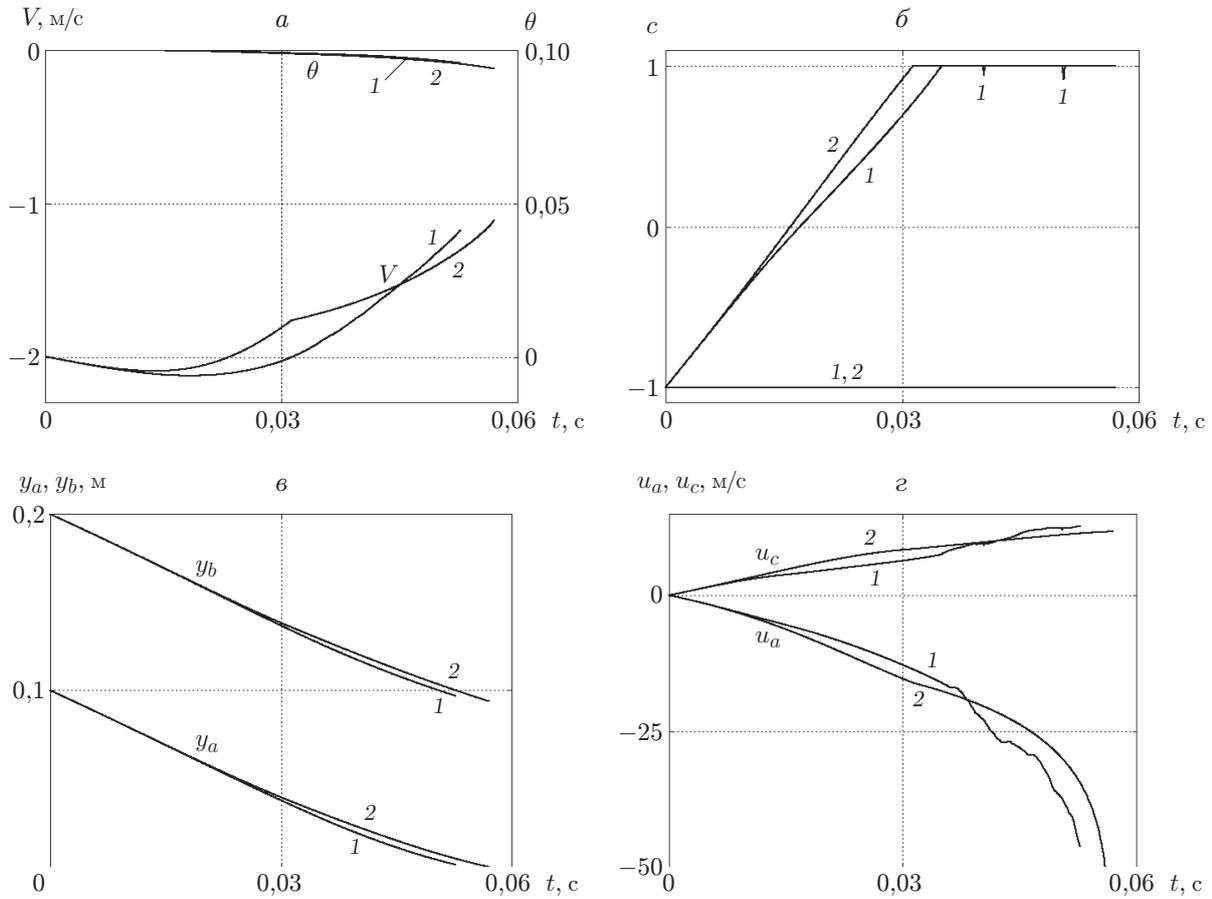


Рис. 3. Зависимости вертикальной скорости и угла наклона тела (а), размера области контакта (б), вертикальных координат концевых точек y_a, y_b (в), скоростей вытекающей жидкости u_a, u_c (г) от времени для ящика с размерами $b = 1$ м, $L = 0,5$ м при $V_0 = 2$ м/с, $\theta_0 = 0,1$, $h_0 = 0,1$ м:

1 — ящик с упругим дном, 2 — жесткое тело такой же формы и массы

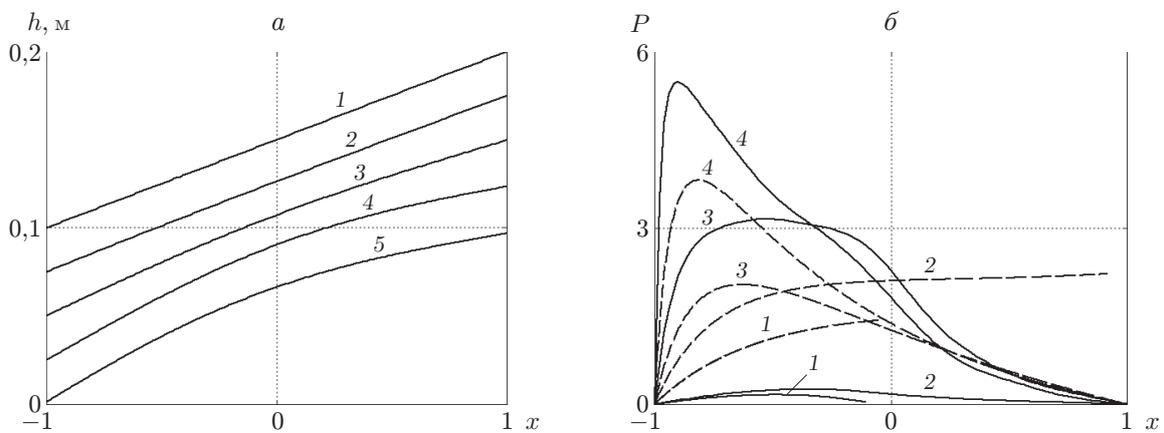


Рис. 4. Распределения прогиба дна (а) и безразмерного давления жидкости P (б) по координате x в различные моменты времени для случая, представленного на рис. 3: а — 1 — $t = 0$, 2 — $t = 0,012$ с, 3 — $t = 0,024$ с, 4 — $t = 0,037$ с, 5 — $t = 0,053$ с; б — 1 — $t = 0,015$ с, 2 — $t = 0,03$ с, 3 — $t = 0,04$ с, 4 — $t = 0,05$ с; сплошные кривые — с учетом отрыва, штриховые — без учета отрыва

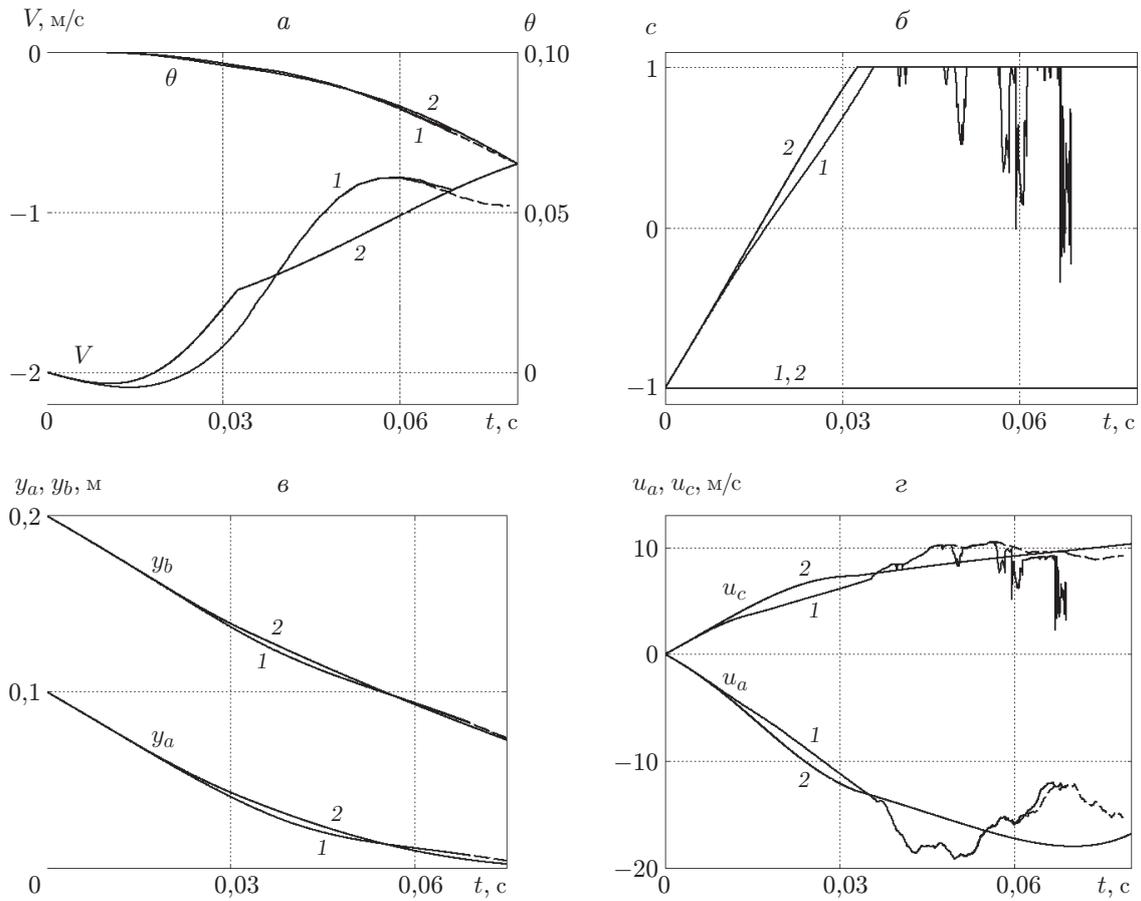


Рис. 5. Зависимости вертикальной скорости и угла наклона тела (*а*), размера области контакта (*б*), вертикальных координат концевых точек y_a , y_b (*в*), скоростей вытекающей жидкости u_a , u_c (*г*) от времени для ящика с размерами $b = L = 0,5$ м при $V_0 = 2$ м/с, $\theta_0 = 0,1$, $h_0 = 0,1$ м:

1 — ящик с упругим дном, 2 — жесткий ящик; сплошные кривые — с учетом отрыва, штриховые — без учета отрыва

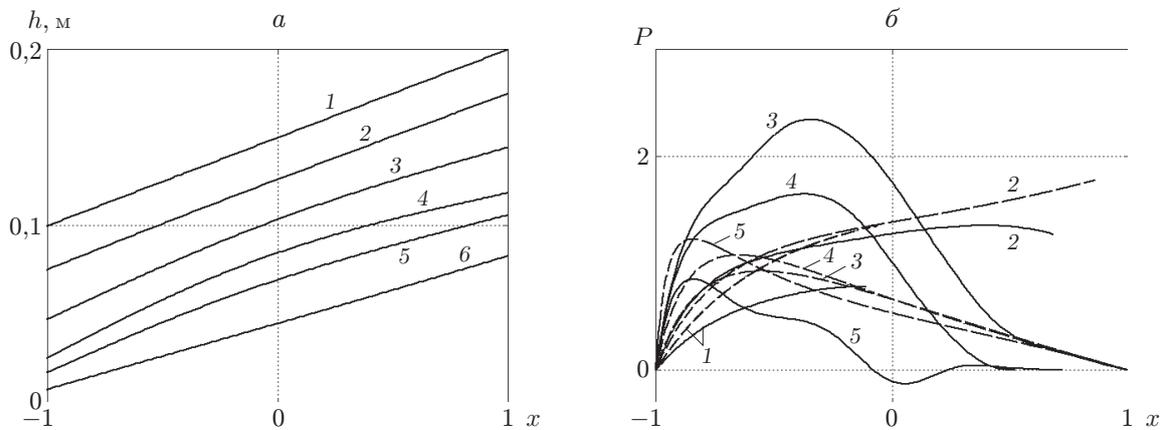


Рис. 6. Распределения прогиба дна (*а*) и безразмерного давления жидкости P (*б*) по координате x в различные моменты времени для случая, представленного на рис. 5: *а* — 1 — $t = 0$, 2 — $t = 0,012$ с, 3 — $t = 0,026$ с, 4 — $t = 0,04$ с, 5 — $t = 0,05$ с, 6 — $t = 0,069$ с; *б* — 1 — $t = 0,015$ с, 2 — $t = 0,03$ с, 3 — $t = 0,04$ с, 4 — $t = 0,05$ с, 5 — $t = 0,069$ с; сплошные кривые — с учетом отрыва, штриховые — без учета отрыва

существенно уменьшается вследствие сопротивления воды. Упругость днища и форма тела оказывают значительное влияние на движение тела и действующие на него нагрузки. Если в случае жесткого тела отрыв наблюдался вблизи нижнего конца, то для тела с упругим дном отрыв вблизи нижнего конца в проведенных расчетах был небольшим и кратковременным, в основном он происходил вблизи верхнего конца. Гидродинамическое давление существенно зависит от деформаций и может быть как значительно выше, так и ниже давления для аналогичного ящика с жестким днищем. Упругость днища может стать причиной повышенных по сравнению с жестким телом нагрузок. Возможно явление кавитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Korobkin A.** Shallow-water impact problems // *J. Engng Math.* 1999. V. 35, N 1/2. P. 233–250.
2. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Гравитационные волны при падении тела на мелкую воду // *ПМТФ.* 1996. Т. 37, № 2. С. 90–98.
3. **Kang H. D., Oh S. H., Kwon S. H., et al.** An experimental study of shallow water impact // *Proc. of the 23rd Intern. workshop on water waves and floating bodies, Jeju (Korea), 13–16 Apr. 2008.* Seoul: Seoul State Univ., 2008. P. 92–95.
4. **Wagner H.** Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // *Z. angew. Math. Mech.* 1932. Bd 12. S. 193–215.
5. **Korobkin A.** Impact of two bodies one of which is covered by a thin layer of liquid // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 300. P. 43–58.
6. **Ворович И. И., Юдович В. И.** Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // *Прикл. математика и механика.* 1957. Т. 21, вып. 4. С. 525–532.
7. **Howison S. D., Ockendon J. R., Oliver J. M.** Deep- and shallow-water slamming at small deadrise angles // *J. Engng Math.* 2002. V. 42. P. 373–388.
8. **Oliver J. M.** Water entry and related problems: PhD thesis. Oxford, 2002.
9. **Howison S. D., Ockendon J. R., Oliver J. M.** Oblique slamming, planning and skimming // *J. Engng Math.* 2004. V. 48, N 3/4. P. 321–337.
10. **Hicks P. D., Smith F. T.** Skimming impacts and rebounds on shallow liquid layers // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 2010. V. 467. P. 653–674.
11. **Moore M. R., Howison S. D., Ockendon J. R., Oliver J. M.** Three-dimensional oblique water-entry problems at small deadrise angles // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 711. P. 259–280.
12. **Хабакпашева Т. И., Коробкин А. А.** Соударение упругих тел с тонким слоем жидкости // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского.* 2011. № 4, ч. 3. С. 1222–1224.
13. **Reinhard M., Korobkin A., Cooker M. J.** Elastic plate impact onto water at high horizontal speed // *Proc. of the 26th Intern. workshop on water waves and floating bodies, Athens (Greece), 17–20 Apr. 2011.* [Electron. resource]. Режим доступа: <http://www.iwwfb.org/Workshops/26.htm>.
14. **Khabakhpasheva T. I., Korobkin A. A.** Oblique impact of a smooth body on a thin layer of the inviscid liquid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 2013. V. 469. 20120615.
15. **Ткачева Л. А.** Удар ящика с упругим дном по тонкому слою жидкости // *Прикл. математика и механика.* 2008. Т. 72, вып. 4. С. 601–612.
16. **Khabakhpasheva T. I.** Fluid-structure interaction during the impact of a cylindrical shell on a thin layer of water // *J. Fluids Structure.* 2009. V. 25, N 3. P. 431–444.

17. **Reinhard M., Korobkin A., Cooker M. J.** The bounce of a blunt body from a water surface at high horizontal speed // Proc. of the 27th Intern. workshop on water waves and floating bodies, Kopenhagen (Denmark), 22–25 Apr. 2012. [Electron. resource]. Режим доступа: <http://www.iwwwfb.org/Workshops/27.htm>.
18. **Ткачева Л. А.** Удар тела с плоским дном по тонкому слою жидкости под малым углом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 77–90.
19. **Howison S. D., Ockendon J. R., Wilson S. K.** Incompressible water-entry problems at small deadrise angles // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 215–230.
20. **Tuck E. O., Dixon A.** Surf-skimmer planning hydrodynamics // J. Fluid Mech. 1989. V. 205. P. 581–592.

*Поступила в редакцию 7/III 2013 г.,
в окончательном варианте — 16/V 2013 г.*
