

$= \alpha_K(c_Q/c_0)$, рассчитанная по приближенной формуле $\alpha_K = \arccos(c_Q/c_0)$ (формула выведена в предположении $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_F$).

При $\alpha > \alpha_K$, когда предвестник отсутствует, возмущения от подстилающей поверхности не достигают точки пересечения падающей УВ с границей раздела и волновая картина в окрестности этой точки отвечает регулярному преломлению УВ на границе раздела двух газов при отсутствии подстилающей поверхности [12—16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин К. Е. Распространение взрывных волн // Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.
2. Попов Е. Г., Цикулин М. А. Излучательные свойства сильных ударных волн в газах.— М.: Наука, 1977.
3. Gion E. J. Plane shock, interacting with a thermal layer // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20, N 4.
4. Бахрах С. М., Клопов Б. А. и др. Захлопывание щели в стенке при нормальном падении на стенку ударной волны // ЧММСС.— 1978.— Т. 9, № 5.
5. Гвоздева Л. Г., Харитонов А. И. Интерферометрическое исследование движения ударной волны вдоль нагретой поверхности в ударной трубе // Оптические методы исследования газовых потоков и плазмы.— Минск: ИТМО АН БССР, 1982.
6. Гордейчик Б. Н., Немчинов И. В. Образование предвестника при взаимодействии ударной волны с теплым слоем // Прикладные методы механики.— М., 1983.— Деп. в ВИНТИ 20.04.84, № 2529—84.
7. Артемьев В. И., Маркович И. Э. и др. Двумерное автомодельное движение сильной ударной волны над нагретой поверхностью // ДАН СССР.— 1987.— Т. 293, № 5.
8. Заславский Б. И., Морозкин С. Ю., Шлегель В. Р., Щербин М. Д. О движении плоской ударной волны вдоль жесткой поверхности, покрытой слоем легкого газа.— М., 1987.— Деп. в ВИНТИ 04.06.87, № 3965—В87.
9. Бергельсон В. И., Немчинов И. В. и др. Автомодельное развитие предвестника перед ударной волной, взаимодействующей с теплым слоем // ДАН СССР.— 1987.— Т. 296, № 3.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
11. Бойс Ч. Мыльные пузыри.— М.: Гостехиздат, 1934.
12. Henderson L. F. The refraction of a plane shock wave at a gas interface // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 26, pt 3.
13. Henderson L. F., Macpherson A. K. On the irregular refraction of a plane shock wave at a Mach number interface // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 32, pt 1.
14. Henderson L. F. On shock impedance // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 40, pt 4.
15. Abd-el-Fattah A. M., Henderson L. F., Lozzi A. Precursor shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 76, pt 1.
16. Abd-el-Fattah A. M., Henderson L. F. Shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 89, pt 1.

г. Менделеево

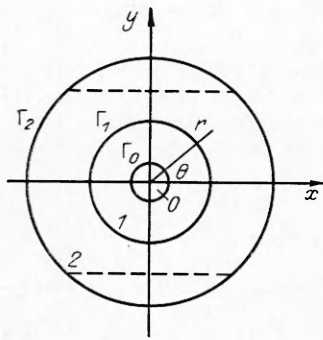
Поступила 4/III 1988 г.

УДК 539.377+532.63+681.7.068.2

А. Л. Ярин

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СВЕТОВОДОВ И РАСЧЕТ ПОЛЯ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ

Один из технологических процессов получения заготовок для производства световодов, предназначенных для передачи поляризованных сигналов, основан на использовании сил поверхностного натяжения стекла в жидком состоянии [1]. Начальное сечение заготовки представлено на рис. 1, где область 0 отвечает сердечнику, по которому распространяется сигнал, а 1 и 2 — напрягающая и внешняя оболочки, предназначенные для создания напряженного состояния в сердечнике. Часть внешней оболочки удаляется, например, как показано штриховыми линиями, после чего заготовка помещается в печь и нагревается. При этом напрягающая и внешняя оболочки становятся жидкими и силы поверхностного натяжения на границе Γ_2 начинают скруглять ее. Возникающее течение жидкого стекла деформирует границу Γ_1 , на которой действует малое межфазное натяжение; в результате она теряет свою круговую форму.



Р и с. 1

Сердечник в этом процессе остается твердым, а граница Γ_0 — неизменной. После завершения процесса скругления границы Γ_2 получается заготовка с некруглой границей Γ_1 . Вследствие различных термоупругих свойств материала в напрягающей и внешней оболочках в заготовке (и стекловолокне) возникает анизотропное поле упругих напряжений и связанное с ним двулучепреломление. Соответственно сердечник приобретает способность передавать сигналы определенной поляризации.

Расчет процесса течения при скруглении внешней границы двухслойной заготовки (в пренебрежении влиянием сердечника 0) был выполнен в [2, 3] в приближении безынерционного стока течения; сравнение с экспериментальными данными представлено в [3]. В настоящей работе решение [2, 3] обобщено на случай трехслойной заготовки. Как показано в [2, 3], структура заготовки практически без изменения сохраняется и в вытягиваемом из нее волокне. Поэтому результаты решения гидродинамической задачи использованы далее в работе для расчета упругих напряжений и двулучепреломления в стекловолокне. Для иной структуры поперечного сечения волокна ряд аналитических решений упругой задачи получен в [4, 5].

1. Гидродинамическая задача решается с использованием уравнений Стокса [6, 7], сводящихся к бигармоническому уравнению для функции тока ψ^* :

$$(1.1) \quad \Delta \Delta \psi^* = 0$$

(здесь и далее Δ — плоский оператор Лапласа).

Построив общее решение (1.1) в виде ряда Фурье, находим с помощью периодической по θ функции тока ψ^* поля скорости, давления и вязких напряжений в областях 1, 2. Некоторые подробности подобного расчета представлены в [2]. Граничные условия гидродинамической задачи здесь, как и в [2, 3], будем линеаризовать, считая, что границы Γ_1 и Γ_2 — это малые возмущения окружностей радиусов R_1 и R_2 . При этом сохраняются все граничные условия (11) из [2], но, в отличие от [2], дополнительно к ним ставится не условие ограниченности решения при $r = 0$, а условия прилипания при $r = R_0$ (на границе сердечника и оболочки 1)

$$(1.2) \quad v_{r1} = 0, v_{\theta 1} = 0$$

(v_r и v_θ — компоненты скорости в полярных координатах, дополнительный индекс 1 отвечает области 1).

При выполнении (1.2) $\psi_1^* = 0$ на границе Γ_0 ($r = R_0$). Условия (1.2) предполагают, что даже в случае несимметричного удаления части оболочки 2 твердый сердечник в процессе скругления границы Γ_2 не проворачивается под действием вязких напряжений, так как заготовка зажата на двух своих твердых концах (при $z = \pm L/2$, где z — осевая координата, L — длина заготовки).

Построив общее решение гидродинамической задачи и удовлетворив граничным условиям (1.2) и (11) из [2], получаем выражения для коэффициентов рядов Фурье, описывающих возмущения границ Γ_1 и Γ_2 в процессе течения:

$$(1.3) \quad \zeta_i = \frac{b_{\zeta_i}(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{ni}(t) \sin n\theta + b_{ni}(t) \cos n\theta] \quad (i = 1, 2)$$

(границы соответствуют $r_i = R_i(1 + \zeta_i)$).

Выражениями для коэффициентов a_{ni} и b_{ni} будут (14), (22), (24) — (28) из [2] с заменой S_1, S_2, S_7, S_8 на

$$(1.4) \quad S_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \{ (-2n - 4 + 2n^2) + [n(-2n^2 - 2n)\gamma_0^{2n+2} - (n+1)(-2n+4-2n^2)\gamma_0^{2n}] \},$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \{ (2n^2 - 2n) + [(n-1)(-2n^2 - 2n)\gamma_0^{2n} - \\
&\quad - n(-2n + 4 - 2n^2)\gamma_0^{2n-2}] \}, \\
S_7 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \{ (-2n^2 - 2n) + [n(-2n^2 - 2n)\gamma_0^{2n+2} - \\
&\quad - (n+1)(-2n^2 + 2n)\gamma_0^{2n}] \}, \\
S_8 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \{ (-2n^2 + 2n) + [(n-1)(-2n^2 - 2n)\gamma_0^{2n} - \\
&\quad - n(-2n^2 + 2n)\gamma_0^{2n-2}] \} \quad \left(\gamma_0 = \frac{R_0}{R_1} \right),
\end{aligned}$$

с добавлением $S_{15} - S_{18}$:

$$\begin{aligned}
(1.5) \quad S_{15} &= (n+2) + [-n^2\gamma_0^{2n+2} - (n+1)(-n+2)\gamma_0^{2n}], \\
S_{16} &= n + [-n(n-1)\gamma_0^{2n} - n(-n+2)\gamma_0^{2n-2}], \\
S_{17} &= 1 + [n\gamma_0^{2n+2} - (n+1)\gamma_0^{2n}], \quad S_{18} = 1 + [(n-1)\gamma_0^{2n} - n\gamma_0^{2n-2}]
\end{aligned}$$

и с заменой $k_1 - k_8$ на

$$\begin{aligned}
(1.6) \quad k_1 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_3S_8 - S_2S_9) - (S_{18}S_{12} - (S_{16}/n)) \times \\
&\quad \times (S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_2 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_4S_8 - S_2S_{10}) - S_{18}S_{13}(S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_3 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_5S_8 - S_2S_{11}) - S_{18}S_{14}(S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_4 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})S_6S_8, \\
k_5 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_1S_9 - S_3S_7) - ((S_{15}/n) - S_{17}S_{12}) \times \\
&\quad \times (S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_6 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_1S_{10} - S_4S_7) + S_{17}S_{13}(S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_7 &= (S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})(S_1S_{11} - S_5S_7) + S_{17}S_{14}(S_1S_8 - S_2S_7), \\
k_8 &= -(S_{15}S_{18} - S_{16}S_{17})S_6S_7.
\end{aligned}$$

В (1.4) μ_1 и μ_2 — вязкость жидкого стекла в оболочках 1 и 2. При $\gamma_0 = 0$ формулы (1.4)–(1.6) приобретают вид результатов [2, 3].

2. После завершения процесса формирования внутренней структуры заготовки с некруглой границей Γ_1 возникает задача о распределении в заготовке (или волокне) упругих напряжений. При ее решении используем коэффициенты ряда Фурье для Γ_1 , отвечающие моменту прекращения течения, a_{n1*} и b_{n1*} , известные из решения гидродинамической задачи; $a_{n2*} \approx 0$, $b_{n2*} \approx 0$ ($n \geq 2$). Упругую деформацию считаем плоской.

В соответствии с [8] расчет упругих напряжений сводится к нахождению потенциала $\chi = \varphi + \psi$ — суммы термоупругого потенциала φ и упругого потенциала ψ , удовлетворяющих уравнениям

$$(2.1) \quad \Delta\varphi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_l (T - T_0), \quad \Delta\psi = 0,$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, который далее считается (как и модуль Юнга E) одинаковым для материала в областях 0 — 2; α_l — коэффициент линейного теплового расширения, различный в областях 0 — 2; T — температура (принимается постоянной по сечению); T_0 — температура, при которой термоупругие напряжения отсутствуют, различная, вообще говоря, в областях 0 — 2. Далее используется обозначение $\bar{\nu}_i =$

$$= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_{li} (T - T_{0i}) \quad (i = 0, 1, 2).$$

С термоупругим потенциалом связаны термоупругие перемещения $u_t = \nabla \varphi$. Они должны быть непрерывны на внутренних границах областей, поскольку перемещения, связанные с ψ , автоматически будут непрерывны. Следовательно, в линейном приближении по возмущениям решение первого уравнения (2.1) должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} r = R_0: \partial \varphi_0 / \partial r &= \partial \varphi_1 / \partial r, \partial \varphi_0 / \partial \theta = \partial \varphi_1 / \partial \theta; \\ r = R_1(1 + \zeta_{1*}): \partial \varphi_1 / \partial r &= \partial \varphi_2 / \partial r, \partial \varphi_1 / \partial \theta = \partial \varphi_2 / \partial \theta. \end{aligned}$$

При этом линеаризованные условия для термоупругих напряжений, связанных с φ и отмечаемых верхним индексом t ,

$$\begin{aligned} r = R_0: \sigma_{rr0}^t &= \sigma_{rr1}^t, \sigma_{r\theta 0}^t = \sigma_{r\theta 1}^t; \\ r = R_1(1 + \zeta_{1*}): \sigma_{rr1}^t &= \sigma_{rr2}^t, \sigma_{r\theta 1}^t + (\sigma_{rr1}^t - \sigma_{\theta\theta 1}^t) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} = \sigma_{rr2}^t + (\sigma_{rr2}^t - \sigma_{\theta\theta 2}^t) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} \end{aligned}$$

удовлетворяются автоматически, а упругие напряжения, связанные с ψ , также непрерывны. Отметим, что термоупругие перемещения пренебрежимо малы даже в сравнении с ζ_{1*} , однако связанные с ними напряжения могут оказаться значительными, поскольку содержат множителем E .

Напряжение σ_{rr} должно быть ограничено при $r = 0$, а на внешней круговой поверхности заготовки (или волокна)

$$r \simeq R_2: \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

Рассчитанное таким образом поле напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \sigma_{rr} &= -\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\beta_i}{2} + \frac{C_i}{r^2} + 2W + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [Q_n(n+2-n^2)r^n + \right. \\ &+ T_n(n-n^2)r^{n-2} - T_{2n}(n+n^2)r^{-n-2}] \sin n\theta + [V_n(n+2-n^2)r^n + \\ &+ Y_n(n-n^2)r^{n-2} - Y_{2n}(n+n^2)r^{-n-2}] \cos n\theta \}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [Q_n(n^2+n)r^n + T_n(n^2-n)r^{n-2} - T_{2n}(n^2+n)r^{-n-2}] \times \\ &\times \cos n\theta + [V_n(-n^2-n)r^n + Y_n(-n^2+n)r^{n-2} + (n^2+n)Y_{2n}r^{-n-2}] \sin n\theta \}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\beta_i}{2} - \frac{C_i}{r^2} + 2W + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [Q_n(n+2)(n+1)r^n + \right. \\ &+ n(n-1)T_n r^{n-2} + n(n+1)T_{2n}r^{-n-2}] \sin n\theta + \\ &+ [V_n(n+2)(n+1)r^n + n(n-1)Y_n r^{n-2} + n(n+1)Y_{2n}r^{-n-2}] \cos n\theta \}. \end{aligned}$$

Здесь принято:

$$(2.3) \quad C_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \frac{R_0^2}{2}(\beta_0 - \beta_1), & i = 1, \\ \frac{R_0^2}{2}(\beta_0 - \beta_1) + \frac{R_1^2}{2}(\beta_1 - \beta_2), & i = 2; \end{cases}$$

$$W = -\frac{\beta_2}{4} - \frac{R_0^2}{4R_2^2}(\beta_0 - \beta_1) - \frac{R_1^2}{4R_2^2}(\beta_1 - \beta_2); \quad Q_n = -(\beta_1 - \beta_2) R_1 R_2^{-n-1} \frac{1}{2\gamma^{n+1}} a_{n1*};$$

$$V_n = -(\beta_1 - \beta_2) R_1 R_2^{-n-1} \frac{1}{2\gamma^{n+1}} b_{n1*}; \quad T_1, Y_1 < \infty, \quad \forall i;$$

$$\begin{aligned}
T_n = & \begin{cases} \frac{(\beta_1 - \beta_2) a_{n1*} R_1^{-n+2}}{2n} [(n+1) \gamma^{-2n} - 1], & i = 0, \\ \frac{(\beta_1 - \beta_2) a_{n1*} R_1^{-n+2}}{2n} [(n+1) \gamma^{-2n} - 1], & i = 1, \\ \frac{(\beta_1 - \beta_2) a_{n1*} (n+1) R_1 R_2^{-n+1}}{2n \gamma^{n+1}}, & i = 2; \end{cases} \\
Y_n = & \begin{cases} \frac{(\beta_1 - \beta_2) b_{n1*} R_1^{-n+2}}{2n} [(n+1) \gamma^{-2n} - 1], & i = 0, \\ \frac{(\beta_1 - \beta_2) b_{n1*} R_1^{-n+2}}{2n} [(n+1) \gamma^{-2n} - 1], & i = 1, \\ \frac{(\beta_1 - \beta_2) b_{n1*} (n+1) R_1 R_2^{-n+1}}{2n \gamma^{n+1}}, & i = 2; \end{cases} \\
T_{2n} = & \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 0, & i = 1, \\ -\frac{(\beta_1 - \beta_2) R_1^{n+2}}{2n} a_{n1*}, & i = 2; \end{cases} \quad Y_{2n} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 0, & i = 1, \\ -\frac{(\beta_1 - \beta_2) R_1^{n+2}}{2n} b_{n1*}, & i = 2, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\gamma = R_2/R_1$. Коэффициент двулучепреломления, согласно [5],

$$(2.4) \quad B = C(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = C[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \cos 2\theta - 2\sigma_{r\theta} \sin 2\theta]$$

(C — коэффициент пропорциональности, значение которого известно). Следовательно, с учетом (2.2) и (2.4) находим в сердечнике ($i = 0$), что

$$\begin{aligned}
B(r, \theta) = & \frac{2CE}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [Q_n(n^2+n)r^n + T_n(n^2-n)r^{n-2}] \sin[(n-2)\theta] + \\
& + [V_n(n^2+n)r^n + Y_n(n^2-n)r^{n-2}] \cos[(n-2)\theta] \}.
\end{aligned}$$

В центре сердечника при $r = 0$ $B = B_*$:

$$(2.5) \quad B_* = \frac{CE}{1+\nu} (\beta_2 - \beta_1) (1 - 3\gamma^{-4}) b_{21*}.$$

Как видим, в линейном приближении величина B_* определяется единственным коэффициентом ряда Фурье (1.3), отвечающим гармонике $\cos 2\theta$, и меняет знак при $\gamma = 3^{1/4}$, что согласуется с результатами [4].

На границе сердечника при $r = R_0 = 0$

$$\begin{aligned}
(2.6) \quad B_0(\theta) = & \frac{B(R_0=0, \theta)}{[2CE(\beta_1 - \beta_2)/(1+\nu)]} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\gamma_0^n (n^2+n)}{2\gamma^{2n+2}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \gamma_0^{n-2} [(n+1) \gamma^{-2n} - 1] (n-1) \right\} \{ a_{n1*} \sin[(n-2)\theta] + b_{n1*} \cos[(n-2)\theta] \}.
\end{aligned}$$

С помощью (2.2)–(2.4) получаем общее выражение для безразмерного коэффициента двулучепреломления в сечении световода в виде

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad B' = & \frac{B(\rho, \theta)}{[2CE(\beta_1 - \beta_2)/(1+\nu)]} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(n^2+n)}{2\gamma^{2n+2}} \rho^n + \frac{1}{2} [(n+1) \gamma^{-2n} - \right. \\
& \left. - \omega] (n-1) \rho^{n-2} \right\} \{ a_{n1*} \sin[(n-2)\theta] + b_{n1*} \cos[(n-2)\theta] \} - \frac{\xi \cos 2\theta}{\rho^2} - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega}{2} (n+1) \rho^{n-2} \{ a_{n1*} \sin[(n+2)\theta] + b_{n1*} \cos[(n+2)\theta] \}; \quad \rho = \frac{r}{R_1};
\end{aligned}$$

$$\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho < 1 + \zeta_{1*}(\theta), \\ 0, & 1 + \zeta_{1*}(\theta) < \rho < \gamma[1 + \zeta_{2*}(\theta)]; \end{cases}$$

$$\omega_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho < 1 + \zeta_{1*}(\theta), \\ 1, & 1 + \zeta_{1*}(\theta) < \rho < \gamma[1 + \zeta_{2*}(\theta)]; \end{cases}$$

$$\sigma_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho < \gamma_0, \\ \frac{\gamma_0^2 (\beta_0 - \beta_1)}{2 (\beta_1 - \beta_2)}, & \gamma_0 < \rho < 1 + \zeta_{1*}(\theta), \\ \frac{\gamma_0^2 (\beta_0 - \beta_1)}{2 (\beta_1 - \beta_2)} + \frac{1}{2}, & 1 + \zeta_{1*}(\theta) < \rho < \gamma[1 + \zeta_{2*}(\theta)]. \end{cases}$$

Здесь ζ_{1*} и ζ_{2*} — возмущения границ Γ_1 и Γ_2 , отвечающие моменту прекращения течения и известные из решения гидродинамической задачи.

Естественно, что выражения (2.5) и (2.6) могут быть получены из (2.7) при $\rho = 0$ и $\rho = \gamma_0 - 0$. Отметим также, что выражения для напряжений в сечении (2.2), (2.3) можно преобразовать к следующему безразмерному виду:

$$\sigma'_{rr} = \frac{\sigma_{rr}(\rho, \theta)}{[E(\beta_1 - \beta_2)/(1 + \nu)]} = - \left[\frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{\rho^2} + 2\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-\frac{(n+2-n^2)}{2\gamma^{2n+2}} \rho^n + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(1-n)}{2} ((n+1)\gamma^{-2n} - \omega) \rho^{n-2} + \frac{(n+1)}{2} \omega_1 \rho^{-n-2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times (a_{n1*} \sin n\theta + b_{n1*} \cos n\theta) \right\} \Bigg];$$

$$\sigma'_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}(\rho, \theta)}{[E(\beta_1 - \beta_2)/(1 + \nu)]} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(n^2+n)}{2\gamma^{2n+2}} \rho^n + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(1-n)}{2} ((n+1)\gamma^{-2n} - \omega) \rho^{n-2} - \frac{(n+1)}{2} \omega_1 \rho^{-n-2} \right] (a_{n1*} \cos n\theta - b_{n1*} \sin n\theta) \right\};$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(\rho, \theta)}{[E(\beta_1 - \beta_2)/(1 + \nu)]} = - \left[\frac{\eta}{2} - \frac{\xi}{\rho^2} + 2\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-\frac{(n+2)(n+1)}{2\gamma^{2n+2}} \rho^n - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(1-n)}{2} ((n+1)\gamma^{-2n} - \omega) \rho^{n-2} - \frac{(n+1)}{2} \omega_1 \rho^{-n-2} \right] (a_{n1*} \sin n\theta + b_{n1*} \cos n\theta) \right\} \Bigg];$$

$$\eta = \begin{cases} \frac{\beta_0}{\beta_1 - \beta_2}, & 0 \leq \rho < \gamma_0, \\ \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, & \gamma_0 < \rho < 1 + \zeta_{1*}(\theta), \\ \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}, & 1 + \zeta_{1*}(\theta) < \rho < \gamma[1 + \zeta_{2*}(\theta)]; \end{cases}$$

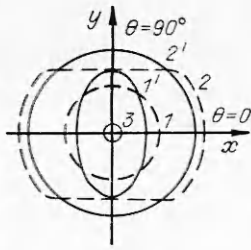
$$\delta = -\frac{\beta_2}{4(\beta_1 - \beta_2)} - \frac{\gamma_0^2 (\beta_0 - \beta_1)}{4\gamma^2 (\beta_1 - \beta_2)} - \frac{1}{4\gamma^2};$$

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{rr} \cos^2 \theta - \sigma'_{r\theta} \sin 2\theta + \sigma'_{\theta\theta} \sin^2 \theta;$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{i}{2} (\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) \sin 2\theta + \sigma'_{r\theta} \cos 2\theta;$$

$$\sigma'_{yy} = \sigma'_{rr} \sin^2 \theta + \sigma'_{r\theta} \sin 2\theta + \sigma'_{\theta\theta} \cos^2 \theta.$$

Результаты решения задачи представлены на рис. 2. Штриховыми линиями 1 и 2 показаны начальные (до нагрева и возникновения течения стекла) конфигурации границ Γ_1 и Γ_2 , а сплошными 1' и 2' — конечные



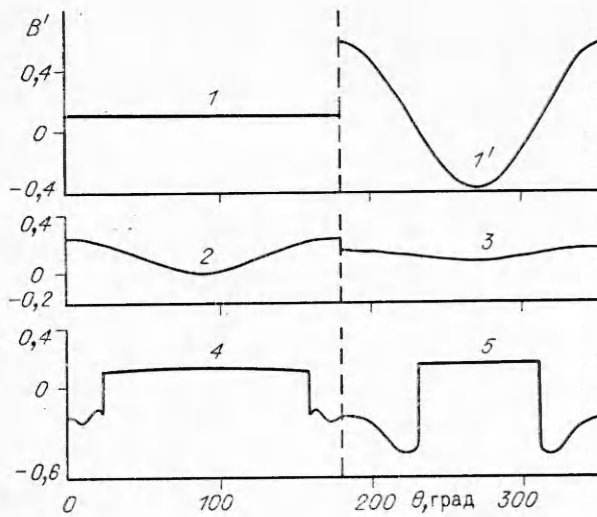
Р и с. 2

(1 и 2' — окружности). Окружность 3 отвечает границе сердечника. В расчете моделировалось плоское срезание внешней оболочки. Считалось, что $\gamma = 2$, $\gamma_0 = 0,2$, $\mu_1/\mu_2 = 0,2$, отношение коэффициентов межфазного и поверхностного натяжения $\alpha_1/\alpha_2 = 0$, использовалось 19 мод ряда Фурье. Рассчитанная конечная форма напрягающей оболочки, соответствующей начальной конфигурации сечения заготовки на рис. 2, близка к эллипсу. Величины

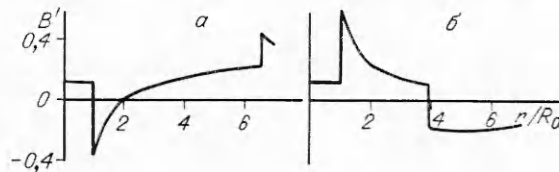
коэффициента b_{21*} , отвечающие различным значениям γ_0 при фиксированных остальных параметрах задачи, следующие: $\gamma_0 = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$, $b_{21*} = -0,2823; -0,2776; -0,2683; -0,2523; -0,2260$. Всем γ_0 соответствует конечная форма напрягающей оболочки в виде «эллипса». При малых $\gamma_0 (\leq 0,4)$ форма границы Γ_1 близка к результатам расчета с помощью решения для двухслойной заготовки [2, 3].

На рис. 3 представлены распределения безразмерного двулучепреломления B' при изменении полярного угла θ в плоскости сечения световода (графики могут быть симметрично продолжены через границу $\theta = 180^\circ$). Линия 1 отвечает $r = R_0 - 0$, $1' - R_0 + 0$; 2 — $2R_0$; 3 — $3R_0$; 4 — $4R_0$; 5 — $5R_0$. В последних двух случаях окружность, на которой вычисляется B' , частично попадает во внешнюю оболочку, с чем связаны скачки на кривых 4 и 5. В расчетах полагалось, что $\beta_0 = \beta_2$, так что $(\beta_0 - \beta_1)/(\beta_1 - \beta_2) = -1$.

Рис. 4 иллюстрирует изменение B' в сечении световода в радиальном направлении ($a - \theta = 90^\circ$, $b - \theta = 0$). Двулучепреломление в сечении световода, подобного рассмотренному здесь (см. рис. 2), рассчитывалось в [9] численно. Полученные в [9] результаты качественно близки к результатам аналитического решения настоящей работы (см. рис. 4). Отметим, что скачки в зависимостях $B'(r)$ на рис. 4 связаны с прохождением границ сердечника и напрягающей оболочки и напрягающей оболочки и внешней оболочки.



Р и с. 3



Р и с. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminov I. R., Rleibel W., Ramaswamy V., Stolen R. H. UK Patent 2012983 A.
2. Ентов В. М., Ярин А. Л. Об одной задаче капиллярной гидродинамики // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 6.
3. Григорьянц В. В., Ентов В. М., Иванов Г. А. и др. О формировании двухслойных заготовок для волоконных световодов с профилированным сердечником // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 4.

4. Varnam M. P., Payne D. N., Barlow A. J., Birch R. D. Analytic solution for the birefringence produced by thermal stress in polarization-maintaining optical fibres // J. Lightwave Technol.— 1983.— V. LT — 1, N 2.
5. Chu P. K., Sammut R. A. Analytical method for calculation of stresses and material birefringence in polarization-maintaining optical fiber // J. Lightwave Technol.— 1984.— V. LT — 2, N 5.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
7. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979.
9. Stolen R. H. Calculation of stress birefringence in fibers by an infinitesimal element method // J. Lightwave Technol.— 1983.— V. LT — 1, N 2.

г. Москва

Поступила 6/VI 1988 г.

УДК 533.6.011.8

В. В. Боголепов, И. И. Липатов, Л. А. Соколов

СТРУКТУРА ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ И КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ

Задача о химически неравновесных течениях в окрестности точки скачкообразного изменения температуры или каталитических свойств поверхности тела обладает несомненной теоретической и практической значимостью. Так, в [1—4] исследовалось влияние разрыва каталитических свойств поверхности на обтекание тела в рамках теорий ламинарного пограничного слоя или гиперзвукового вязкого ударного слоя. В [5—7] эта задача рассматривалась в такой же постановке, только сразу за точкой разрыва дополнительно вводился фиктивный внутренний пограничный слой; при использовании упрощающих допущений удалось получить аналитические решения для функций течения в окрестности за точкой разрыва каталитических свойств поверхности.

Для описания распространения возмущений от точки разрыва вверх по потоку, которое отсутствует для краевых задач параболического типа [1—7], в некоторой окрестности точки учитывалась продольная диффузия [8—10]; обоснование такой модели течения для слабого разрыва представлено в [11], где использовался известный метод срачиваемых асимптотических разложений [12], с помощью которого уже решены многие задачи особых возмущений механики жидкости и газа (см., например, [13, 14] и библиографию к ним).

При анализе окрестности точки разрыва каталитических свойств поверхности нужно учитывать, что при переходе с некаталитической поверхности на идеально каталитическую, например, плотность газа вблизи поверхности тела увеличивается на свою характерную величину, т. е. линии тока смещаются к поверхности тела и фактически обтекает фиктивная вмятина. Для таких течений может нарушаться основное допущение классической теории пограничного слоя Прандтля о малости продольных градиентов функций течения по сравнению с поперечными и становится необходимым использование полных уравнений Навье — Стокса. Систематический анализ режимов течений около малых двумерных неровностей на поверхности тела выполнен в [15]. Решение задачи о разрыве температуры поверхности, которая тоже сводится к анализу обтекания фиктивной неровности, получено в [16], однако там представлены весьма ограниченные результаты.

В настоящей работе исследована окрестность точки разрыва каталитических свойств и температуры поверхности при обтекании холодной пластины ламинарным сверхзвуковым химически неравновесным потоком бинарной смеси при стремлении числа Рейнольдса Re_0 к бесконечности. Получено, что в окрестности точки разрыва химические реакции могут происходить только на каталитической поверхности. Определены основные параметры подобия, представлены распределения индуцированного возмущения давления, напряжения трения, нормальных градиентов энтальпии и массовой концентрации атомов по пластине, выведены асимптотические закономерности изменения этих характеристик.

1. Рассматривается обтекание плоской полубесконечной пластины равномерным сверхзвуковым химически неравновесным потоком вязкого газа при большом, но докритическом Re_0 . Предполагается, что газ представляет собой бинарную смесь атомов и двухатомных молекул, состоящих из тех же атомов, а температура поверхности пластины не превышает уровня, при котором начинается диссоциация молекул при локальном