

В целом при больших значениях хода поршня вклад нелинейных эффектов значительно возрастает, вследствие чего изменение параметров при общем законе (2) существенно отличается от их изменения при использовании отдельных его слагаемых и от простой суммы полученных таким образом результатов.

Работа выполнена в соответствии с грантом № 93—013—17940 Российского фонда фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Saenger R.A., Hudson G.E. Periodic shock waves in resonating gas columns // J. Acoust. Soc. Amer. — 1960. — V. 32, N 8. — P. 961—971.
2. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes // J. Fluid Mech. — 1964. — V. 18, N 1. — P. 44—64.
3. Галиев Ш.У., Ильгамов М.А., Садыков А.В. О периодических ударных волнах в газе // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. — № 2. — С. 57—66.
4. Keller J.J. Third order resonances in closed tubes // ZAMP. — 1976. — V. 27, N 3. — P. 303—323.
5. Zaripov R.G., Ilgamov M.A. Nonlinear gas oscillations in a pipe // J. Sound and Vibr. — 1976. — V. 46, N 2. — P. 245—257.
6. Seymour B.R., Mortell M.R. A finite rate theory of resonance in a closed tube: discontinuous solutions of a functional equation // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 99, N 2. — P. 365—382.
7. Althaus R., Thomann. Oscillations of a gas in a closed tube near half the fundamental frequency // J. Fluid Mech. — 1987. — V. 183, N 2. — P. 147—161.
8. Аганин А.А., Кузнецов В.Б., Кутдусов Р.М. и др. Нелинейные колебания газа в закрытой трубе с подвижным поршнем. — М., 1990. — Деп. в ВИНТИ 04.09.90, № 4883—890.
9. Аганин А.А., Кузнецов В.Б., Кутдусов Р.М. и др. Вынужденные колебания в трубе с закрытым концом. — М., 1990. — Деп. в ВИНТИ 20.04.90, № 2123—В90.

г. Казань

Поступила 10/XII 1993 г.

УДК 534.2

В.Б. Курзин

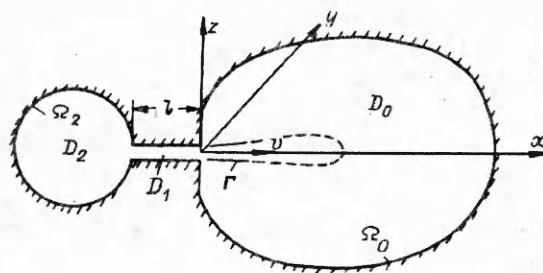
### АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОГО РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОТИТЕЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Для подавления акустических колебаний широкое применение в технике имеют резонансные поглотители типа резонатора Гельмгольца. В классической форме резонатор Гельмгольца действует как реактивный поглотитель и имеет тот недостаток, что его эффективность ограничена довольно узким диапазоном частот. Оказалось, что этот недостаток в значительной мере может быть устранен путем создания струи, истекающей из горла резонатора. В этом случае часть акустической энергии расходуется на образование нестационарной вихревой пелены, сбегаящей с кромки горла резонатора, и, таким образом, осуществляется активное поглощение акустических колебаний.

Некоторые закономерности влияния струи на эффективность применения резонатора в качестве динамического поглотителя акустических колебаний были исследованы численно в рамках плоской модели в [1]. В настоящей работе этот вопрос рассмотрен в более общей пространственной постановке задачи. В асимптотическом приближении получены аналитические зависимости амплитуды вынужденных акустических колебаний в замкнутой области от параметров активного резонатора.

© В.Б. Курзин, 1994

1. Основные предположения и малые параметры задачи. Рассмотрим вынужденные акустические колебания в замкнутой области  $D_0$ , для подавления которых к ней присоединен резонатор Гельмгольца, представляющий собой объединение областей  $D_1 \cup D_2$  (см. рисунок). Задавая форму горла резонатора



$D_1$  в виде кругового цилиндра, в качестве характерных размеров области  $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$  возьмем радиус  $R_1$  и длину  $l$  этого цилиндра, а также радиусы  $R_0$  и  $R_2$  сфер, объемы которых  $V_0$  и  $V_2$  равны объемам областей  $D_0$  и  $D_2$ . Введем следующие предположения о геометрии области  $D$ :

$$(1.1) \quad R_1 \ll R_2 \ll R_0, \quad l \ll R_0;$$

$$(1.2) \quad H_0 < \frac{1}{R_2}, \quad H_2 = 0 \left( \frac{1}{R_2} \right).$$

Здесь  $H_0, H_2$  — средние кривизны в точках поверхностей  $\Omega_0$  и  $\Omega_2$  областей  $D_0$  и  $D_2$ . Предположим также, что источник внешнего возмущения расположен на поверхности  $\Omega_0$ , а частота этих возмущений  $\omega$  близка к одной из низших собственных частот акустических колебаний  $\omega_{0j}$  в области  $D_0$ , т.е.

$$(1.3) \quad \left| \frac{\omega - \epsilon_{ij} \omega_{0j}}{\omega_{0j}} \right| \ll 1.$$

Будем считать, что для активного поглощения акустической энергии в области  $D_0$  из горла резонатора  $D_1$  истекает струя газа со скоростью  $U = \text{const}$ , которую будем моделировать цилиндром радиуса  $\rho = R_1$  и длины  $L = O(R_0)$ . При этом

$$(1.4) \quad M = U/c \ll 1$$

( $c$  — скорость звука газа). В соответствии с предположениями (1.1) и (1.3) введем малые параметры

$$(1.5) \quad \delta = R_1/R_2;$$

$$(1.6) \quad \epsilon = k = \omega R_2/c,$$

которые будут использованы при построении приближенного решения задачи, а предположения (1.3) и (1.4) представим в виде оценок

$$(1.7) \quad k - k_{0j} = O(\epsilon^{3/2}), \quad k_{0j} = \omega_{0j} R_2/c;$$

$$(1.8) \quad M = O(\epsilon).$$

2. Постановка задачи и выбор метода решения. В соответствии с предположениями, введенными в п. 1, задача об определении акустических колебаний в области  $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$  сводится к нахождению амплитудной функции потенциала скорости с точностью до величин первого порядка малости  $\epsilon$ , удовлетворяющей уравнению

$$(2.1) \quad \Delta \varphi + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \lambda^2 = \omega^2/c^2$$

и следующим граничным условиям:

1) непротекания

$$(2.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$$

( $\nu$  — направление внутренней нормали к твердой поверхности области  $D$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частиц газа);

2) динамической совместности на границе струи  $\Gamma$ , представляющей собой поверхность контактного разрыва стационарной и нестационарной составляющих скоростей:

$$(2.3) \quad i\varphi^+ = i\varphi^- + M \frac{\partial \varphi^-}{\partial x}, \quad \rho = R_1, \quad 0 \leq x \leq L$$

( $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  — значения  $\varphi$  на внешней и внутренней частях  $\Gamma$ );

3) Жуковского — Кутта

$$(2.4) \quad [\nabla \varphi] < \infty, \quad x = 0^+, \quad \rho = R_1;$$

4) излучения акустической энергии возмущения поверхностью  $\Omega_0$  области  $D_0$ :

$$(2.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = q(r), \quad r \in \Omega_0.$$

Так как область определения решения поставленной задачи естественным образом подразделяется на три простые подобласти  $D_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ), то для нахождения этого решения целесообразно воспользоваться методом склеивания, который состоит в построении искомой функции  $\varphi$  в каждой из подобластей в отдельности и дальнейшем сопряжении соответствующих выражений  $\varphi_j$  на общих участках границ  $D_j$ . При этом с учетом предположений (1.1)–(1.4) функции  $\varphi_j$  могут быть найдены с помощью метода возмущений. Элементы этого метода уже применены при постановке задачи в уравнении (2.1), в котором отброшены члены второго порядка малости параметра  $\varepsilon$ . Принимая во внимание последнее обстоятельство, решение поставленной задачи будем искать приближенно, с точностью до величин первого порядка малости  $\varepsilon$  и  $\delta$ .

3. Решение в области  $D_1$ . Так как область  $D_1$  является канонической и представляет собой круговой цилиндр, то в осесимметрическом приближении общее решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (2.2), методом разделения переменных получим в виде

$$(3.1) \quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n e^{\sqrt{\zeta_n^2 - \lambda^2} x} + b_n e^{-\sqrt{\zeta_n^2 - \lambda^2} (x+l)}] J_0(\zeta_n \rho).$$

Здесь  $\zeta_0 = 0$ ;  $\zeta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — корни уравнения

$$\frac{\partial J_0}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1;$$

$J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка.

4. Решение в области  $D_2$ . Акустические колебания в области  $D_2$  возбуждаются потоком акустической энергии из области  $D_1$ . Функция  $\varphi_2$ , описывающая эти колебания, может быть построена путем решения уравнения (2.1) при условии (2.2) на твердой границе области  $D_2$  и условии

$$(4.1) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = -l, \quad 0 \leq \rho < R_1.$$

Представим эту функцию в виде суммы трех составляющих

$$(4.2) \quad \varphi_2 = \varphi_{21} + \tilde{\varphi}_2 + \psi_2,$$

где  $\varphi_{21}$  является решением уравнения (2.1) при следующих граничных условиях:

$$(4.3) \quad \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \text{при} \quad x = -l, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 & \text{при} \quad x = -l, \quad \rho > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \left\{ r \left[ \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial r} + i\lambda \varphi_{21} \right] \right\} = 0;$$

$\bar{\varphi}_2$  — произвольная функция, удовлетворяющая условиям:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \nu} = - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \nu}, \quad r \in \Omega_2;$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \nu} = 0, \quad r \in \Omega_{21}.$$

Здесь  $\Omega_{21}$  — общий участок границ областей  $D_2$  и  $D_1$ ;  $\psi_2$  — решение уравнения

$$(4.6) \quad \Delta \psi_2 + \lambda^2 \psi_2 = - (\Delta \bar{\varphi}_2 + \lambda^2 \bar{\varphi}_2) = f$$

при условии

$$(4.7) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} = 0, \quad r \in \Omega_2 \cup \Omega_{21}.$$

Решение задачи (4.3), описывающее акустическое поле, излучаемое участком поверхности  $\Omega_{21}$  плоского экрана, может быть представлено точно с помощью интеграла Гюйгенса — Рэлея [2]

$$(4.8) \quad \varphi(r) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{-i\lambda|r-r_0|} v(r_0) d\sigma_0}{|r-r_0|}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

Переходя к безразмерным параметрам

$$(4.9) \quad \bar{x} = - \frac{x+l}{R_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{R_1}, \quad \bar{l} = \frac{l}{R_1}, \quad \bar{\xi}_n = \xi_n R_1, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_1},$$

из (4.8) с учетом (1.5), (1.6), (3.1) и (4.3), (4.9) для  $\theta = 0$  найдем

$$(4.10) \quad \varphi_{21}(\bar{x}, \bar{\rho}) = \frac{R_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{v}_{12} e^{-i\epsilon \Delta \bar{r}} d\bar{\rho}_0 d\theta_0}{\Delta \bar{r}},$$

где, согласно (4.1),

$$(4.11) \quad v_{12} = \frac{-\partial \varphi_1}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\bar{\xi}_n \bar{\rho}), \quad \bar{x} = 0;$$

$$(4.12) \quad \Delta \bar{r} = \sqrt{\bar{\rho}_0^2 - 2\bar{\rho}_0 \bar{\rho} \cos \theta_0 + \bar{\rho}^2 + \bar{x}^2};$$

$$(4.13) \quad A_n = \xi_n (a_n e^{-\bar{\xi}_n \bar{l}} - b_n), \quad A_0 = i \frac{\epsilon}{R_2} (a_0 e^{-i\epsilon \bar{l}} - b_0).$$

В силу осевой симметрии  $\varphi_1$  выражение (4.10) для  $\varphi_{21}$  будет справедливо для любого  $\theta$ . Произвольную функцию  $\bar{\varphi}_2$ , которая должна удовлетворять условиям (4.4), (4.5), зададим в виде

$$(4.14) \quad \bar{\varphi}_2 = f_1(\bar{\nu}) f_2(r), \quad r(\xi, \eta) \in \Omega_2,$$

где

$$(4.15) \quad f_1 = \begin{cases} R_1 \int_{\bar{\nu}}^1 \exp\left(-\frac{\bar{\nu}^2}{1-\bar{\nu}^2}\right) d\bar{\nu} & \text{при } \bar{\nu} = \nu/R_1 \leq 1, \\ 0 & \text{при } \bar{\nu} > 1; \end{cases}$$

$$(4.16) \quad f_2 = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial r} \cos(\widehat{r, \nu})$$

$(\nu, \xi, \eta)$  — система криволинейных ортогональных координат, для которой  $\nu = 0$  является уравнением поверхности  $\Omega_2$ .

Для определения функции  $\psi_2$  разложим правую часть уравнения (4.6) в ряд по собственным функциям задачи (4.6), (4.7):

$$(4.17) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \psi_{2n}.$$

Тогда

$$(4.18) \quad \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda^2 - \lambda_{2n}^2} \psi_{2n}.$$

Здесь  $\lambda_{2n}$  — собственные значения задачи (4.6), (4.7), причем для  $n = 0$

$$(4.19) \quad \lambda_{20} = 0, \psi_{20} = 1.$$

Нормируя собственные функции так, что

$$(4.20) \quad \int_{V_2} \psi_{2n}^2 dv = V_2,$$

из (4.17) найдем

$$(4.21) \quad d_n = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} f \psi_{2n} dv.$$

Подставляя выражение (4.6) для  $f$  в (4.21) при  $n = 0$  и применяя формулу Грина, с учетом (4.19) имеем

$$(4.22) \quad d_0 = -\frac{1}{V_2} \left( \lambda^2 \int_{V_2} \bar{\varphi}_2 dv + \int_{\Omega_2} \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \nu} d\sigma \right).$$

Учитывая (4.3), (4.4) и (4.11), из (4.22) получим

$$(4.23) \quad d_0 = \pi A_0 \frac{R_1^2}{V_2} [1 + O(\delta \varepsilon^2)].$$

Выделим из (4.18) нулевой член и проведем оценку оставшейся суммы  $\bar{\psi}_2$ , применяя к ней неравенство Гельдера

$$(4.24) \quad |\bar{\psi}| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{2n}^2}{(\lambda^2 - \lambda_{2n}^2)^2} \right)^{1/2}.$$

Из полноты системы собственных функций с учетом (4.20) следует

$$(4.25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} f^2 dv.$$

Подставляя (4.6) в (4.25), с учетом (1.2), (4.10), (4.11), (4.14)–(4.16) находим оценку

$$(4.26) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 = \frac{R_2}{V_2} A_0^2 O(\delta^3).$$

Принимая во внимание асимптотическое поведение собственных функций и собственных значений [3] в области  $V_2$ , имеем

$$(4.27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{2n}^2}{(\lambda^2 - \lambda_{2n}^2)^2} = O(1).$$

Подставляя (4.21) в (4.18), с учетом (1.5), (1.6), (4.23)–(4.27) получим основную составляющую выражения (4.2) для  $\varphi_2$ :

$$\psi_2 = \frac{R_2}{V_2} \frac{\delta^2}{\kappa^2} [1 + \varepsilon^2 O(\delta^{-1/2})] A_0.$$

5. Представление решения в области  $D_0$ . В области  $D_0$  колебания газа происходят под действием трех источников, механизмы возбуждения которых отличаются между собой, а именно: струи, истекающей из горла резонатора, потока акустической энергии из резонатора и внешнего источника. В соответствии с этим амплитудную функцию потенциала скорости в  $D_0$  удобно разбить на три составляющие:

$$(5.1) \quad \varphi_0 = \varphi_c + \varphi_{01} + \varphi_q.$$

Для представления функции  $\varphi_c$ , описывающей колебания, обусловленные взаимодействием струи с окружающей средой, рассмотрим сначала качественно механику этого взаимодействия. Как известно [4], стационарная составляющая струи создает шум, уровень которого пропорционален восьмой степени скорости течения газа в струе. Принимая во внимание (1.8), влиянием этого шума на рассматриваемые акустические колебания будем пренебрегать. Так как струя газа, истекающая из горла резонатора, находится под действием внешнего источника акустических возмущений в области  $D_0$ , то скорость ее истечения будет иметь и нестационарную составляющую. При наличии потока колебательное движение газа в окрестности кромки резонатора частично преобразуется в вихревое [5]. Соответствующие завихренные частицы, срываясь с кромки, движутся со скоростью потока и образуют вихревую пелену переменной интенсивности. В предположении, что интенсивность завихренности фиксированных частиц этой пелены в процессе движения меняется незначительно, согласно [6], акустическими возмущениями в области  $D_0$ , генерируемыми нестационарной составляющей струи, также будем пренебрегать.

Однако помимо акустических возмущений нестационарная вихревая пелена индуцирует и соленоидальную составляющую колебаний скорости газа. Значение этой составляющей в окрестности горла резонатора может оказать существенное влияние на поток акустической энергии из резонатора в области  $D_0$ . Таким образом, в основе функции  $\varphi_c$  возьмем амплитудную функцию потенциала скорости  $\varphi_v$ , индуцируемой нестационарной вихревой пеленой, удовлетворяющую уравнению Лапласа. Налагая на  $\varphi_v$  условие осевой симметрии и для удобства вычисления условие

$$(5.2) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,$$

представим функцию  $\varphi_c$  в виде суммы двух составляющих:

$$(5.3) \quad \varphi_c = \varphi_v + \bar{\varphi}_v.$$

Здесь  $\bar{\varphi}_v$  — невязка, обусловленная неточным выполнением функцией  $\varphi_v$  уравнения (2.1) и граничного условия (2.2).

Нестационарная составляющая интенсивности вихревой пелены  $\gamma$  может быть определена из условия (2.3). С этой целью продифференцируем соотношение (2.3) по  $x$  и преобразуем его к виду

$$i\gamma + \frac{1}{2} M \frac{\partial \gamma}{\partial x} = M \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

где  $\gamma = \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}$ ,  $v_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)$ . Запишем решение этого уравнения в безразмерных координатах

$$(5.4) \quad \gamma = \gamma_0 \exp(-i\alpha \bar{x}) + \gamma_1, \quad \alpha = 2\omega R_1 / U.$$

Здесь  $\gamma_0$  — интенсивность вихрей, сходящих с кромки резонатора, которая находится из условия (2.4):

$$(5.5) \quad \gamma_0 = \frac{1}{K} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = v_0 \text{ при } x \rightarrow 0^-, \quad \bar{\rho} = 1;$$

$\gamma_1$  — составляющая  $\gamma$ , которая возникает за счет растяжения и сжатия струи в акустическом поле скоростей:

$$\gamma_1 = -2e^{-i\alpha\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial v_x}{\partial x} e^{i\alpha\bar{x}} d\bar{x} = -2v_x [1 + O(\delta)].$$

В силу (1.3) акустические колебания в области  $D_0$  будут происходить с преобладанием  $j$ -й гармоники. Поэтому функция  $v_x$  может быть представлена приближенно следующим образом:

$$v_x = \frac{1}{g_j R_0} \sin \beta \bar{x}, \quad \beta = O(\epsilon \delta)$$

( $g_j$  — амплитуда  $\psi$ -й гармоники акустических колебаний в  $D_0$ ). В результате имеем

$$(5.6) \quad \gamma_1 = -2g_j \frac{1}{R_0} \sin \beta \bar{x}.$$

Принимая во внимание условие (5.2), поле скоростей, индуцируемое нестационарной вихревой пеленой в правой полуплоскости, будем определять по формуле

$$\mathbf{v}_v = \nabla \varphi_v(\bar{\mathbf{r}}) = -\frac{R_1}{4\pi} \int_{-L-\pi}^{\pi} \int \frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \boldsymbol{\tau}] \bar{x}_0 \gamma d\theta_0 d\bar{x}_0}{|\bar{x}_0| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},$$

где  $\mathbf{r}$  — безразмерный радиус-вектор, отнесенный к  $R_1$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к поверхности вихревой пелены, имеющий направление вектора элементарного вихря, расположенного в точке  $\mathbf{r}_0$ .

С помощью этой формулы найдем значение функции  $\varphi_v$  при  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{\rho} < 1$ . При этом, учитывая предположение об осевой симметрии, будем полагать  $\theta = 0$ . В дальнейшем показано, что значение  $\varphi_v$ , которое определяется составляющей  $\gamma_1$  вихревого слоя, является величиной второго порядка малости по отношению к возмущению от внешнего источника. Поэтому, подставляя первый член (5.4) с учетом (5.5) в формулу для  $\mathbf{v}_v$  и принимая во внимание, что  $L = O[(\epsilon \delta)^{-1}]$ , для осевой и радиальной составляющих скоростей получим

$$(5.7) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} = \frac{v_0 R_1}{4\pi} \int_{-\infty-\pi}^{\infty} \int \frac{(1 - \bar{\rho} \cos \theta_0) \bar{x}_0 e^{-i\alpha|\bar{x}_0|} d\theta_0 d\bar{x}_0}{|\bar{x}_0| [1 - 2\bar{\rho} \cos \theta_0 + \bar{\rho}^2 + (\bar{x} - \bar{x}_0)^2]^{3/2}},$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\rho}} = \frac{v_0 R_1}{4\pi} \int_{-\infty-\pi}^{\infty} \int \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0) \bar{x}_0 e^{-i\alpha|\bar{x}_0|} d\theta_0 d\bar{x}_0}{|\bar{x}_0| [1 - 2\bar{\rho} \cos \theta_0 + \bar{\rho}^2 + (\bar{x} - \bar{x}_0)^2]^{3/2}}.$$

Из выражения (5.8) следует

$$(5.9) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\rho}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\rho} = 0.$$

Принимая во внимание (5.9), из уравнений движения газа найдем, что при  $\bar{\rho} = 0$

$$(5.10) \quad \frac{\partial p_v}{\partial x} = -\bar{\rho}_0 \frac{U}{R_1} e^{-i\alpha x} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{i\alpha \bar{x}} \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \right),$$

где  $p_v$  — амплитудная функция колебаний давления, индуцируемых вихревой пеленой;  $\rho_0$  — плотность газа.

Интегрируя уравнение (5.10) и полагая  $p_v = 0$  при  $\bar{x} \rightarrow \infty$ , получим

$$(5.11) \quad p_v = \rho_0 \frac{U}{R_1} \left[ \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \Big|_0^{\infty} + i\alpha \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} d\bar{x} \right] \quad \text{при} \quad \bar{x} = \bar{\rho} = 0.$$

Подставляя (5.7) в (5.11), имеем

$$(5.12) \quad \rho_b(0) = \rho_0 v_0 U I_1.$$

Здесь

$$(5.13) \quad I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{(1+t^2)^{3/2}} dt.$$

Подставляя (5.12) в интеграл Коши — Лагранжа и учитывая (5.2), находим

$$(5.14) \quad \varphi_{в0} = i \frac{v_0 U}{\omega} I_1 \text{ при } \bar{x} = \bar{\rho} = 0.$$

Принимая во внимание (5.8), функцию  $\varphi_b(\rho)$  при  $x = 0$  можно вычислить путем интегрирования выражения (5.8) с учетом (5.14):

$$(5.15) \quad \varphi_b = \varphi_{в0} - 2v_0 R_1 I_2$$

$$(I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} F(\rho, \theta, t) d\theta dt d\rho, F(\rho, \theta, t) = \frac{te^{-i\alpha t}}{[1 - 2\rho \cos\theta + \rho^2 + t^2]^{3/2}}).$$

Подставляя (5.14) в (5.15), получим

$$(5.16) \quad \varphi_b(\rho) = i \frac{v_0 U}{\omega} I (I = I_1 + i\alpha I_2).$$

Проведем теперь оценку компоненты  $\varphi_{в1}$ , которая определяется значением составляющей  $\gamma_1$ . Подставляя (5.6) в формулу для  $\bar{v}_b$  и сравнивая соответствующие проекции с (5.7) и (5.8), с учетом (5.13) и (5.14) имеем

$$(5.17) \quad \varphi_{в1} = \frac{gU}{\omega R_0} \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{(1+t^2)^{3/2}} dt = g_1 \bar{G}(\varepsilon^2 \delta).$$

Функция  $\bar{\varphi}_b$  выражения (5.3) может быть определена с помощью решения уравнения

$$(5.18) \quad \Delta \bar{\varphi}_b + \lambda^2 \bar{\varphi}_b = -\lambda^2 \bar{\varphi}_b$$

при граничном условии

$$(5.19) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_b}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi_b}{\partial \nu}, \quad r \in \Omega_0 \cup \Omega_{01}.$$

Амплитудную функцию потенциала скорости  $\varphi_{10}$  выражения (5.1), описывающую акустические колебания в области  $D_0$ , которые возбуждаются потоком акустической энергии из области  $D_1$ , представим в виде

$$(5.20) \quad \varphi_{01} = \bar{\varphi}_{01} + \bar{\varphi}_{01},$$

где  $\bar{\varphi}_{01}$  — главная часть функции  $\varphi_{01}$ , которую будем определять как решение уравнения (2.1) при следующих граничных условиях:

$$(5.21) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_{01}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \text{при } \bar{x} = 0, 0 \leq \bar{\rho} \leq 1, \\ 0 & \text{при } \bar{x} = 0, \bar{\rho} > 1; \end{cases}$$

$$(5.22) \quad \bar{\varphi}_{01} = 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow \infty.$$

Решение задачи (5.21), (5.22), полученное аналогично решению (4.10) задачи (4.3), имеет вид

$$(5.23) \quad \bar{\varphi}_{01}(\bar{x}, \bar{\rho}) = \frac{R_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_0 v_{10} e^{-i\delta \Delta \bar{r}}}{\Delta \bar{r}} d\bar{\rho}_0 d\theta_0.$$

Здесь



$$(5.24) \quad u_{10} = \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(\zeta_n \bar{\rho}), \quad \bar{x} = 0;$$

$$(5.25) \quad B_0 = i \frac{\varepsilon}{R_2} (b_0 e^{-i \varepsilon \delta \bar{t}} - a_0);$$

$$(5.26) \quad B_n = \zeta_n (b_n e^{-\varepsilon \bar{t}} - a_n).$$

Функция  $\bar{\varphi}_{01}$  выражения (5.20) может быть определена с помощью решения уравнения (2.1) при граничном условии

$$(5.27) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_{01}}{\partial \nu} = \begin{cases} -\frac{\partial \bar{\varphi}_{01}}{\partial \nu}, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ 0, & \mathbf{r} \in \Omega_{01}. \end{cases}$$

И наконец, функцию  $\varphi_q$  выражения (5.1) будем определять как решение уравнения (2.1) при условии (2.5) и условии

$$(5.28) \quad \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{01}.$$

Введем функцию

$$(5.29) \quad \bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}_b + \bar{\varphi}_{01} + \varphi_q,$$

компоненты которой должны быть решениями задач (5.18), (5.19); (2.1), (5.27) и (2.1), (2.5), (5.28), и представим ее в виде суммы двух составляющих

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{\psi}_0 + \psi_0$$

( $\bar{\psi}_0$  — произвольная функция, в совокупности удовлетворяющая граничным условиям (2.5), (5.19), (5.27) и (5.28)). Тогда определение функции  $\psi_0$  сведется к решению уравнения

$$(5.30) \quad \Delta \psi_0 + \varepsilon^2 \delta^2 \psi_0 = f_0, \quad f_0 = -(\Delta \bar{\psi}_0 + \varepsilon^2 \delta^2 \bar{\psi}_0)$$

при однородных условиях Неймана на границе  $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \Omega_{01}$ . Функцию  $\bar{\psi}_0$ , как и  $\bar{\varphi}_2$ , будем определять в виде (4.14) — (4.16). Представим функцию  $\psi_0$  в виде ряда по собственным функциям задачи (5.30), аналогично  $\psi_2$  п. 4 найдем

$$(5.31) \quad \bar{\psi}_0 = -\frac{R_2^4}{\bar{\nu}_0} \frac{\delta^2}{\bar{k}^2 - \bar{k}_{0j}^2} \{ I_{0j} [\psi_{0j} + O(\varepsilon^2)] + \pi B_0 \psi_{0j}^* [\psi_{0j} + O(\varepsilon^3 \delta^{-1/2})] \},$$

где  $\psi_{0j}^*$  — значение собственной функции  $\psi_0$  при  $\bar{x} = \bar{\rho} = 0$ ;  $B_0$  — константа (5.25);

$$I_{0j} = \int_{\Omega_0} \psi_{0j} q d\bar{\sigma}.$$

6. Склеивание решений. Функции  $\varphi_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ), представленные выше в соответствующих подобластях  $D_j$ , будут определять общее решение поставленной задачи при выполнении условий склеивания:

$$(6.1) \quad \varphi_0 = \varphi_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{10};$$

$$(6.2) \quad \varphi = \varphi_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{12}.$$

Подставляя главные части асимптотических представлений функций  $\varphi_j$ , найденных в пп. 3—5, в условия (6.1), (6.2), получим

$$(6.3) \quad a_0 + b_0 e^{-i \omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\zeta_n \bar{\rho}) = i \frac{v_0 U}{\omega} I +$$

$$+ \frac{R_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_0 \nu_{10}}{\Delta r} d\bar{\rho}_0 d\theta_0 - \frac{\delta^2 R_2^4}{V_0(k^2 - k_{0j}^2)} (I_{0j} + \pi B_0 \psi_{0j}^* \psi_{0j});$$

$$(6.4) \quad a_0 e^{-i\lambda l} + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\xi_n \bar{\rho}) = -\frac{R_1^2 \pi}{\lambda^2 V_2} A_0 + \frac{R_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_0 \nu_{12}}{\Delta r} d\bar{\rho}_0 d\theta_0.$$

Разлагая правые части соотношений (6.3), (6.4) на отрезке  $(0 \leq \bar{\rho} \leq 1)$  в ряды Фурье — Бесселя второго типа и приравнявая коэффициенты этих рядов соответствующим коэффициентам левых частей указанных соотношений, имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$(6.5) \quad a_0 + b_0 e^{-i\lambda l} = R_2 \nu_0 (i \frac{M}{k} I_1 - 2\delta \bar{I}_2) - \frac{\delta^2 R_2^4}{V_0(k^2 - k_{0j}^2)} (I_{0j} + \pi B_0 \psi_{0j}^* \psi_{0j}) + Q_{10};$$

$$(6.6) \quad a_0 e^{-i\lambda l} + b_0 = -\frac{\delta^2 \pi R_2^4}{k^2 V_2} A_0 + Q_{12};$$

$$(6.7) \quad a_n = \sum_{m=0}^{\infty} h_{nm} B_m + d_n \nu_0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(6.8) \quad b_n = \sum_{m=0}^{\infty} h_{nm} A_m, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$h_{nm} = \frac{R_1}{2\pi C_n} \int_0^{\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\bar{\rho} \rho J_0(\xi_n \bar{\rho}) J_0(\xi_m \bar{\rho}_0)}{\Delta r} d\theta_0 d\bar{\rho} d\bar{\rho}_0; \quad C_n = \int_0^1 \bar{\rho} J_0^2(\xi_n \bar{\rho}) d\bar{\rho};$$

$$d_n = \frac{R_1}{\pi^2 C_n} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \rho J_1 F(\rho, \theta, t) d\theta dt d\rho; \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \rho^2) F(\rho, \theta, t) d\theta dt d\rho;$$

$$(6.9) \quad Q_{ij} = \frac{R_1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}_0 \nu_{ij}}{\Delta r} d\theta_0 d\bar{\rho}_0 d\bar{\rho} \quad (j = 0, 2);$$

$A_m, B_m$  выражаются через  $a_0$  и  $b_0$  по формулам (4.12), (4.13), (5.25), (5.26). Система (6.5) — (6.8) замыкается соотношением, которое вытекает из условия (2.4). Из выражений (5.8) и (5.23) следует, что радиальные компоненты скорости на кромке резонатора при  $x = c, \bar{\rho} = 1$  имеют особенности вида

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial \bar{\rho}} = -\frac{\nu_0 R_1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_{01}}{\partial \bar{\rho}} = \frac{B_0 R_1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Так как

$$\left| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \rho} \right| < \infty,$$

то условие (2.4) будет выполняться, если

$$(6.10) \quad \nu_0 = B_0 = i \frac{\varepsilon}{R_2} (b_0 e^{-i\varepsilon \delta l} - a_0).$$

Асимптотический анализ коэффициентов  $h_{nm}$  при  $m, n \rightarrow \infty$  показывает, что система (6.7), (6.8) сводится к типу систем, которые возникают в теории волноводов [6] при решении соответствующих задач методом склеивания. Принимая во внимание это обстоятельство, с учетом выражений для  $A_m, B_m$  получим оценку

$$(6.11) \quad \|X\|_{\infty} = O(\varepsilon \delta) \|X_0\|_{\infty},$$

где  $X_0, X$  — векторы:

$$X_0 = X_0\{a_0, b_0\}, X = X\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}.$$

Подставляя выражения (4.11) и (5.24) для  $u_j$  в формулу (6.9), с учетом (6.11) приходим к заключению, что величинами  $Q_{1j}$  в уравнениях (6.5) и (6.6) можно пренебречь. Таким образом, уравнения (6.5) и (6.6) с учетом (6.9) в асимптотическом приближении будут представлять собой систему замкнутых уравнений относительно констант  $a_0$  и  $b_0$ .

7. Влияние параметров резонатора и струи на уровень акустических колебаний в области  $D_0$ . Принимая во внимание (5.1), (5.3), (5.20) и (5.29), выражение для амплитудной функции колебаний газа в  $D_0$  преобразуем следующим образом:

$$\varphi_0 = \varphi_v + \bar{\varphi}_{01} + \bar{\varphi}_0$$

( $\varphi_v$  — соленоидальная составляющая, а  $\bar{\varphi}_{01}$  и  $\bar{\varphi}_0$  — акустические). При этом функция  $\bar{\varphi}_{01}$ , описывающая акустическое излучение газа из резонатора со скоростью  $u_0$ , быстро убывает при удалении от горла резонатора, а функция  $\bar{\varphi}_0$ , определяющая резонансные колебания в  $D_0$ , практически равномерна во всей области.

Разрешая систему (6.5) и (6.6) с учетом (6.11), из (6.10) найдем

$$u_0 = \frac{k^2 V_2 \psi_{0j}^* I_{0j}}{\pi V_0 \left[ \left( I - \frac{k^2}{k_{0j}^2} \right) H - \mu \right] k_{0j}^2},$$

а из (5.31)

$$\bar{\varphi}_0 = i \frac{k^2}{k^2} H \frac{\psi_{0j}}{\psi_{0j}^*} u_0,$$

где

$$H = \left( I - \frac{k^2}{\bar{k}^2} \right) - i \bar{M}; \bar{k}^2 = \frac{S_1 R_2^2}{V_2 l}; \bar{M} = \frac{R_2 M k}{l \bar{k}^2} I_1; \mu = \frac{V_2 k^2}{V_0 k_{0j}^2} \psi_{0j}^{*2};$$

$S_1$  — площадь сечения  $D_1$ ;  $\bar{k}$  — приведенная частота резонатора.

Анализ влияния параметров резонатора на поведение амплитудно-частотной характеристики акустических колебаний в  $D_0$  будем проводить с помощью коэффициента динамичности

$$(7.1) \quad \eta(k) = \left| \frac{\bar{\varphi}_0(k)}{\bar{\varphi}_0(0)} \right| = \frac{1}{\left( I - \frac{k^2}{\bar{k}^2} \right) - \frac{\mu}{H}}.$$

В отсутствие струи ( $M = 0$ ) при  $k = \bar{k}$  имеем  $\eta = 0$ . В этом случае, как известно, происходит реактивное подавление колебаний. Вместе с тем при  $M = 0$ , когда резонатор достаточно хорошо настроен на частоту  $\omega_{0j}$  в  $D_0$ , т.е., согласно (1.7),

$$(7.2) \quad \bar{k} \approx k_{0j}(I + \tilde{r}), \tilde{r} = O(\varepsilon^{1/2}),$$

в некоторой малой окрестности  $k_{0j}$ , а именно при

$$(7.3) \quad k = k_{0j}(I + r_p), r_p = \frac{1}{2} \left( \tilde{r} \pm \sqrt{\tilde{r}^2 + \mu} \right), \mu = O(\varepsilon)$$

значение  $\eta$  обращается в бесконечность, т.е. при условии (7.3) имеет место резонанс системы в целом. Это обстоятельство является существенным недостатком резонатора как реактивного поглотителя.

При наличии струи ( $M \neq 0$ ) знаменатель выражения (7.1) — комплексная величина, поэтому значение  $\eta$  в бесконечность обратиться не может.

Физически в этом случае происходит преобразование части акустической энергии в вихревую, и, таким образом, осуществляется активное ее поглощение. Рассмотрим значение  $\eta$  при  $M \neq 0$  на режиме резонанса системы, полагая приближенно условием этого резонанса равенство нулю вещественной части знаменателя выражения (7.1):

$$(7.4) \quad 2r_p [(2\bar{r} - 2r_p + \bar{M}'')^2 + \bar{M}'^2] + \mu(2\bar{r} - 2r_p + \bar{M}') = 0.$$

Здесь  $\bar{r}$  — параметр расстройки частоты резонатора и собственной частоты  $\omega_{0j}$  (7.3);  $\bar{M}'$ ,  $\bar{M}''$  — действительная и мнимая части  $\bar{M}$ ;  $r_p$  — поправка собственного значения  $k_{0j}$  для области  $D_0$  на присоединение активного резонатора (области  $D_1 \cup D_2$ ), являющаяся решением уравнения (7.4).

При условии (7.4) выражение (7.1) преобразуется к виду

$$(7.5) \quad \eta(k_p) = \frac{(1 - \mu) | (2\bar{r} - 2r_p + \bar{M}'')^2 + \bar{M}'^2 |}{\mu \bar{M}'} = \frac{(1 - \mu) | 2\bar{r} - 2r_p + \bar{M}' |}{2\bar{M}' | r_p |}.$$

Уравнение (7.4) и выражение (7.5) в совокупности определяют зависимость величины  $\eta(k_p)$  от параметров резонатора  $\mu$ ,  $\bar{r}$  и  $\bar{M}$ . При этом параметр  $\bar{M}$ , зависящий от числа Маха струи  $M$ , играет роль коэффициента затухания рассматриваемой системы. Как известно из теории активных поглотителей [7], зависимость уровня резонансных колебаний от параметра затухания должна быть немонотонной. Поэтому практический интерес представляет определение оптимального значения  $M = M_0$ , при котором происходит максимальное поглощение резонансных колебаний. Оно может быть найдено из уравнения (7.4) и условия

$$(7.6) \quad \frac{\partial \eta(k_p)}{\partial M} = 0.$$

В явном виде решение системы (7.4), (7.6) относительно величины  $M_0$  получить не удалось, поэтому ограничимся ее оценкой

$$M_0 = O(\epsilon^{3/2}),$$

которая следует из (7.5) с учетом (1.6), (5.13), (7.2) и (7.3), при этом

$$\eta(k_p) = O(\epsilon^{-1/2}),$$

а при  $M \rightarrow 0$   $\eta(k_p) \rightarrow \infty$ , при  $M = O(\epsilon)$   $\eta(k_p) = O(\epsilon^{-1})$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курзии В.Б. Активный резонатор как динамический поглотитель акустических колебаний в ограниченном объеме // ПМТФ. — 1991. — № 2.
2. Скучик Е. Основы акустики. — М.: Мир, 1976. — Т. 2.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.; Л.: Гостехиздат, 1933. — Т. 1.
4. Мэрвин Е. Голдстейн. Аэроакустика. — М.: Машиностроение, 1981.
5. Disseihorst J.H.M., Van Wijngaarden L. Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 99. — P. 2.
6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. — М.: Наука, 1981.
7. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания. — М.: Физматгиз, 1960.

г. Новосибирск

Поступила 1/XI 1993 г.,  
в окончательном варианте — 8/IV 1994 г.