Теплофизика и аэромеханика, 2005, том 12, № 3

УДК 532.516.5+536.25

НЕСТАЦИОНАРНОЕ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С МАССОПЕРЕНОСОМ

П. ГАНЕСАН, Г. ПАЛАНИ

Факультет математики Анна университета, Ченнай, Индия

Изучалось нестационарное свободно-конвективное обтекание изотермической вертикальной пластины с постоянным потоком массы. Основные дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в систему обезразмеренных уравнений, которые затем решаются численно конечно-разностным методом. Обезразмеренные уравнения — нестационарные двумерные сопряженные и нелинейные. Из полученных расчетов выбран представительный набор результатов, отображенных в графической форме. Графики показывают влияние различных физических параметров на локальное и усредненное поверхностное трение, число Нуссельта и число Шервуда.

ВВЕДЕНИЕ

В природных условиях, наряду со свободной конвекцией, вызванной разницей температур, существуют также и потоки, вызванные разницей локальных концентраций компонентов среды. К примеру, в атмосферных потоках может проявиться существенная разница концентраций H_2O. В промышленности для повышения эффективности установок часто используют вдув примесного газа. Это позволяет уменьшить касательные напряжения на стенке, дает возможность контроля эффективности массопереноса и теплоотдачи. Обычно это достигается созданием защитного слоя на поверхности тела, который испаряется под воздействием нагревания и затем смешивается с обтекающим тело потоком воздуха. Поэтому представляется актуальным изучение конвекции в условиях тепломассопереноса для поверхностей различной геометрии.

В работах [1] и [2] для изучения стационарной задачи свободноконвективного тепломассопереноса у вертикальной пластины с однородным распределением температуры и концентрации примеси на поверхности был применен интегральный метод. В работе [3], используя автомодельные переменные, получено стационарное решение для естественной конвекции у вертикальной пластины с переменными температурой поверхности и диффузией массы. В [4] найдено численное решение задачи для неустановившейся свободной конвекции с массопереносом на изотермической вертикальной поверхности с использованием неявной конечно-разностной схемы. В работе [5] решена задача неустановившейся свободной конвекции с массообменом на вертикальной пластине с постоянным потоком тепла, с использованием неявной конечно-разностной схемы расчета.

Сопряженная задача тепломассоотдачи на вертикальной пластине путем естественной конвекции еще не рассматривалась. В то же время, не всегда условия для массоотдачи имеют вид распределения концентрации примеси по поверхности. Часто это граничное условие задается в виде потока массы. Поэтому приходится решать задачу переходного нестационарного свободноконвективного течения возле изотермической вертикальной пластины с потоком массы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухмерный нестационарный поток вязкой несжимаемой жидкости возле полубесконечной вертикальной пластины. Пусть концентрация C' диффундирующего компонента в бинарной смеси будет намного меньше концентрации остальных химических компонентов таким образом, что можно пренебречь эффектами Соре и Дюфура. Предполагается, что в уравнении энергии можно пренебречь эффектом вязкой диссипации. Начальные условия предполагают равенства температуры и концентрации для пластины и обтекающей жидкости. В момент времени $t' \geq 0$ температура стенки повышается до T'_w, и через стенку с постоянной скоростью подается постоянный поток массы. Ось x направлена вдоль пластины, а ось y — по нормали к стенке. Тогда, согласно стандартному приближению Буссинеска, течение в пограничном слое описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta(T'-T'_\infty)+g\beta^*(C'-C'_\infty)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u\frac{\partial T'}{\partial x} + v\frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + u\frac{\partial C'}{\partial x} + v\frac{\partial C'}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}.$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$t' \leq 0: \ u = 0, \ v = 0, \ T' = T'_\infty, \ C' = C'_\infty$$

$$t' > 0: \ u = 0, \ v = 0, \ T' = T_w, \ \frac{\partial C'}{\partial y} = -\frac{q_w}{D} \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = 0, \ T' = T'_\infty, \ C' = C'_\infty \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$u \to 0, \ T \to T'_\infty, \ C' \to C'_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Вводя безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y=\frac{y}{L}\mathrm{Gr}^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu}\mathrm{Gr}^{-1/2}, \quad V=\frac{vL}{\nu}\mathrm{Gr}^{-1/4},$$

$$t = \frac{\nu t'}{L^2}\mathrm{Gr}^{1/2}, \quad T = \frac{T'-T'_\infty}{T'_w-T'_\infty}, \quad C = \frac{(C'-C'_\infty)}{\left[q_w L/D\right]}\mathrm{Gr}^{1/4},$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3(T'_w-T'_\infty)}{\nu^2}, \qquad \mathrm{Gc} = \frac{g\beta^* L^4 q_w}{\nu^2 D}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad N = \frac{\mathrm{Gc}}{\mathrm{Gr}},$$

приводим исходные уравнения к следующему виду:

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=T+\mathrm{Nu}\,\mathrm{Gr}^{-1/4}C+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial X}+V\frac{\partial C}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Sc}}\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \qquad (4)$$

Соответствующие начальные и граничные условия для безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} &t \le 0: U=0, \quad V=0, \quad T=0, \quad C=0, \\ &t>0: U=0, \quad V=0, \quad T=1, \quad \frac{\partial C}{\partial Y}=-1 \quad \text{при} \quad Y=0, \\ &\qquad U=0, \quad T=0, \quad C=0 \quad \text{при} \quad X=0, \\ &\qquad U\to 0, \quad T\to 0, \quad C\to 0 \quad \text{при} \quad Y\to\infty. \end{aligned} \qquad (5)$$

Локальное и среднее поверхностное трение в безразмерном виде описывается выражениями:

$$\tau_X = \mathrm{Gr}^{3/4}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0}, \qquad (6)$$

$$\bar{\tau}=\mathrm{Gr}^{3/4}\int_0^1\left[\frac{\partial U}{\partial Y}\right]_{Y=0}dX. \qquad (7)$$

Локальное и среднее числа Нуссельта связаны с безразмерными величинами следующими соотношениями:

$$\mathrm{Nu}_X=-X\,\mathrm{Gr}^{1/4}\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0}, \qquad (8)$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}=-\mathrm{Gr}^{1/4}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0}\right]dX. \qquad (9)$$

Локальное и усредненное числа Шервурда в безразмерных переменных:

$$\mathrm{Sh}_X=-X\,\mathrm{Gr}^{1/4}\left(\frac{\partial C}{\partial Y}\right)_{Y=0}, \qquad (10)$$

$$\overline{\mathrm{Sh}}=-\mathrm{Gr}^{1/4}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial C}{\partial Y}\right)_{Y=0}\right]dX. \qquad (11)$$

Производные в уравнениях с (6) по (11) описываются пятиточечной схемой аппроксимации и затем интегралы вычисляются по формуле интегрирования Ньютона — Котесса.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для решения обезразмеренных уравнений (1) – (4) при начальных и граничных условиях (5) применялась неявная конечно-разностная схема типа Кранка — Николсона. Методы решения конечно-разностных уравнений типа Кранка — Николсона обсуждались в работе [5]. Область интегрирования берется в виде прямоугольника со сторонами X_{max} (= 1,0) и Y_{max} (= 22,0), где Y_{max} соответствует $Y = \infty$ и лежит далеко за пределами динамического теплового и диффузионного пограничных слоев. Для расчетов размер сетки выбран ΔX = 0,05, ΔY = 0,25, а временной шаг — равным Δt = 0,01. Вычисления проводились до достижения стационарного состояния. Такое стационарное решение считается достигнутым, если абсолютная разница между вычисленными значениями скорости U, а также температуры T и концентрации C на двух последовательных временных шагах была меньше чем 10^{-5} для всех точек сетки. Неявная конечно-разностная схема Кранка — Николсона всегда устойчива и сходится.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1, 2, 3 представлены локальные значения поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шервурда, соответственно. Из рис. 1 видно, что увеличение Sc ведет к падению поверхностного трения при постоянном N, но локальный коэффициент

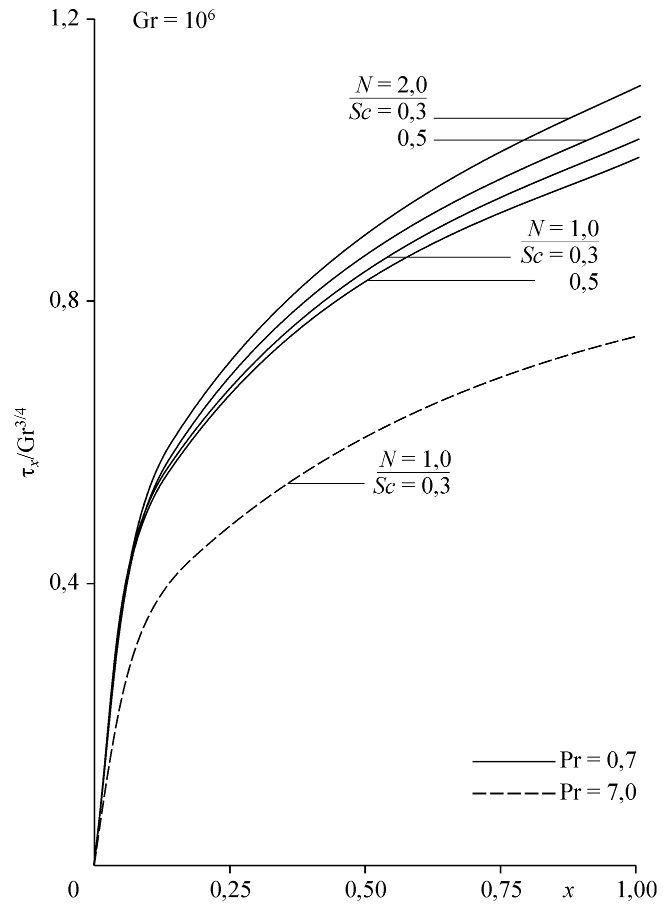

Рис. 1. Локальное поверхностное трение.

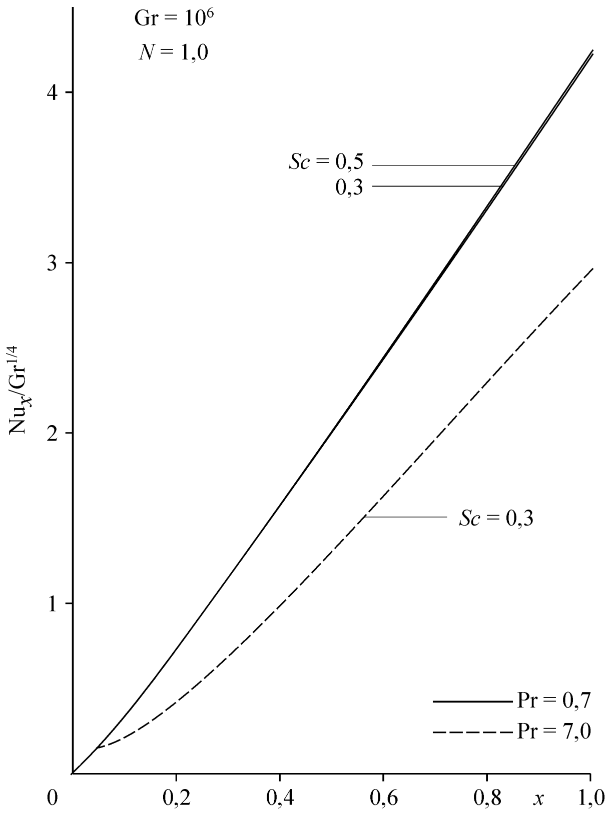

Рис. 2. Локальное число Нуссельта.

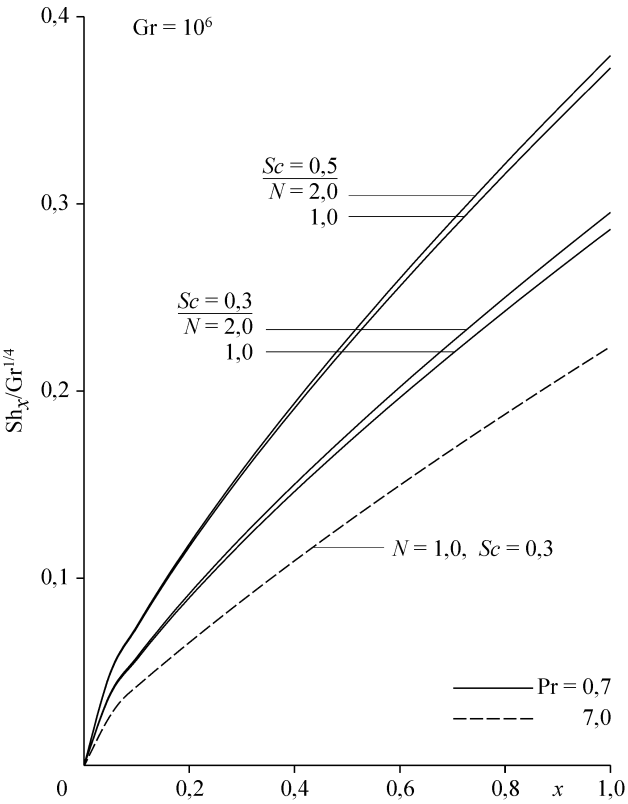

Рис. 3. Локальное число Шервуда.

трения с ростом N возрастает. На передней кромке пластины локальное поверхностное трение почти не зависит от присутствия газовой примеси в ее окрестности, поскольку там тепло- и массоперенос определяются чистой теплопроводностью и чистой диффузией газовой добавки, так что поле скорости не зависит от конвективных потоков тепла и массы. На рис. 2 можно отметить, что рост Sc вызывает рост локального числа Нуссельта, но при этом рост числа Pr вызывает его падение. При малых величинах X, т. е. близко к переднему краю пластины, число Sc не влияет на локальное число Нуссельта, поскольку там реализуются условия чистой диффузии и теплопроводности. Можно заключить из данных на рис. 3, что рост критериев Sc или N приводит к росту локального числа Шервурда. При малых X, из-за чистой теплопроводности и диффузии, параметры Sc и N не оказывают какого-либо влияния на локальное число Шервурда.

На рис. 4, 5 и 6 представлены графики усредненных величин поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шервурда соответственно.

Усредненное поверхностное трение возрастает на малых начальных промежутках времени t, но затем на больших интервалах времени остается независимым от t, т. е. временная зависимость проявляется только при малых временах в режиме установления. Усредненное поверхностное трение уменьшается с ростом величины Sc, однако оно возрастает с ростом N для всего переходного периода и также для стационарного состояния. Можно прийти к выводу, что усредненное поверхностное трение уменьшается с ростом числа Pr. Видно (см. рис. 5), что усредненное число Нуссельта резко падает на малом начальном промежутке времени t, но не зависит от изменений в Sc или N; однако при больших временах t число Нуссельта уже не зависит от времени. Усредненное число Нуссельта снижается с уменьшением

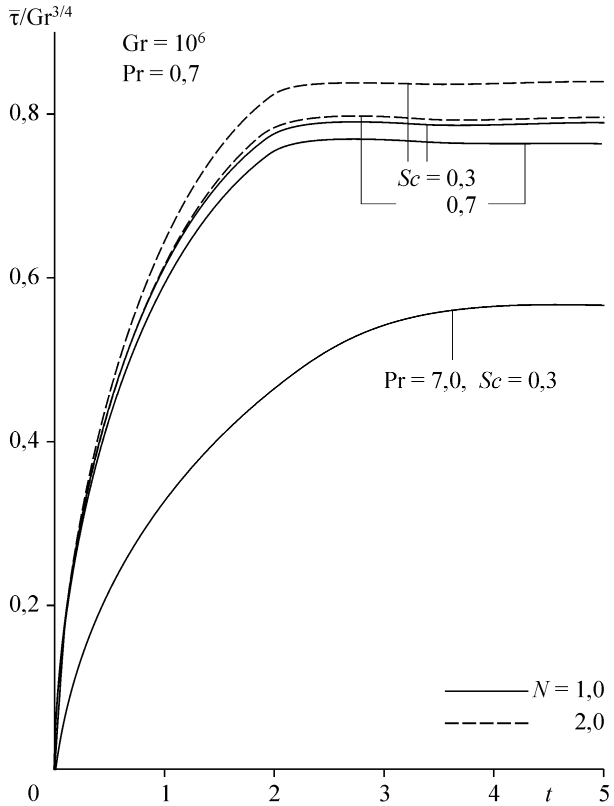

Рис. 4. Усредненное поверхностное трение.

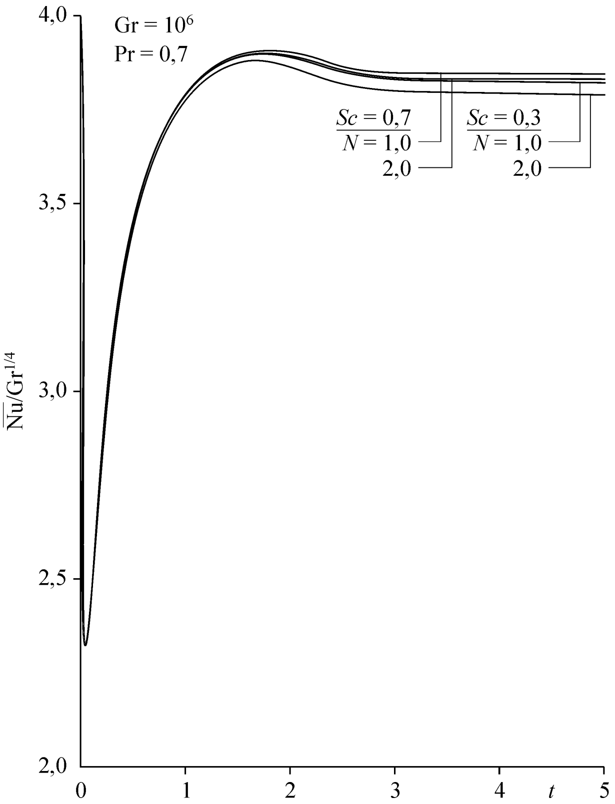

Рис. 5. Усредненное число Нуссельта.

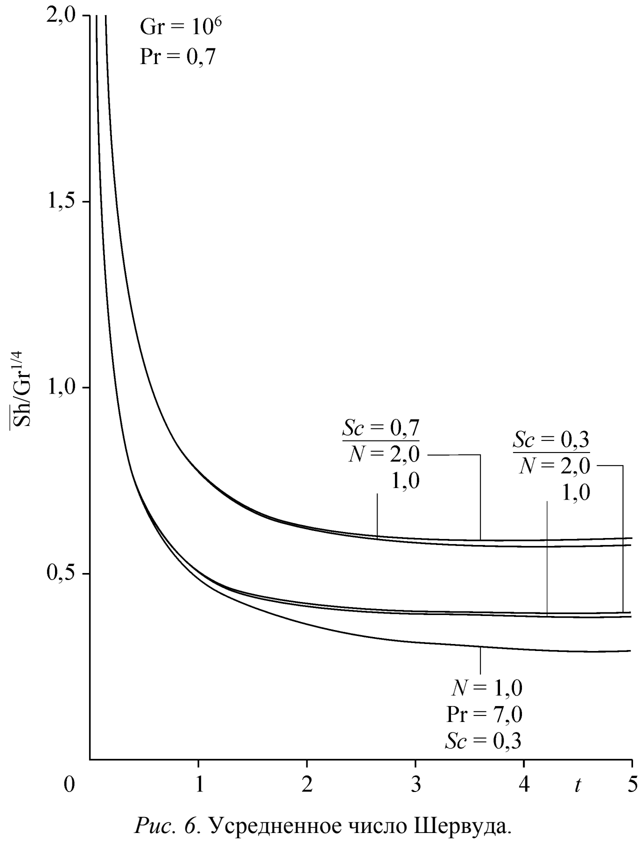

Рис. 6. Усредненное число Шервуда.

величины Sc, но возрастает с увеличением N для переходного и стационарного периодов. Ход усредненного числа Шервурда (см. рис. 5) такой же, как и для локального числа Шервурда в зависимости от чисел Sc, Pr и N. Но усредненное число Шервурда при больших временах становится независимым от времени.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

C' — концентрация компонента,
C — безразмерная концентрация компонента,
D — коэффициент диффузии в смеси,
Gc — число Грасгофа по массе,
Gr — число Грасгофа,
g — ускорение силы тяжести,
$\overline{\mathrm{Nu}}$ — безразмерное усредненное число Нуссельта,
Nu_X — безразмерное локальное число Нуссельта,
Pr — число Прандтля,
q_w — поток массы через единицу площади;
Sc — число Шмидта,
$\overline{\mathrm{Sh}}$ — безразмерное усредненное число Шервуда,
α — коэффициент температуропроводности,
β — объемный коэффициент теплового расширения,
β^* — объемный коэффициент расширения при изменении концентрации,
Sh_X — безразмерное локальное число Шервуда,
T' — температура,
T — безразмерная температуры,
t' — время,
t — безразмерное время,
u, v — компоненты скорости в направлении x, y соответственно,
U, V — безразмерные компоненты скорости в направлении X, Y соответственно,
x — пространственная координата вдоль пластины,
X — безразмерная пространственная координата,
y — пространственная координата вверх по нормали к пластине,
Y — безразмерная пространственная координата вверх по нормали к пластине,
ν — кинематическая вязкость,
ρ — плотность,
τ_X — безразмерное локальное поверхностное трение,
τ — безразмерное усредненное поверхностное трение.

ИНДЕКСЫ

W — условия на стене,
∞ — условие свободного потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Somers E.V.** Theoretical considerations of combined thermal and mass transfer from a vertical flat plate // J. Appl. Mech. — 1956. — Vol. 23. — P. 295–301.
2. **Wilcox W.R.** Simultaneous heat and mass transfer in free convection // Chem. Engng. Sci. — 1961. — Vol. 13. — P. 113–119.
3. **Gebhart B, Pera L.** The nature of vertical natural convection flows resulting from the combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1971. — Vol. 14. — P. 2025–2050.
4. **Callahan G.D., Marner W.J.** Transient free convection with mass transfer on an isothermal vertical flat plate // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1976. — Vol. 19. — P. 165–174.
5. **Soundalgekar V.M., Ganesan P.** Transient free convection with mass transfer on a vertical plate with constant heat flux // Energy Research. — 1985. — Vol. 9. — P. 1–17.

Статья поступила в редакцию 1 октября 2004 г.