

14. Трусов П. В. Большие упругопластические деформации: некоторые аспекты теории и приложения // Прикл. проблемы прочности и пластичности/Всесоюз. межвуз. сб.— Горький: Горьк. ун-т, 1984.— Вып. 28.
15. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975.
16. Трусов П. В. О построении образа процесса нагружения и методе корректирующего анализа при исследовании больших пластических деформаций.— Пермь, 1984.— Деп. в ВИНТИ 21.08.84, № 5939—84.
17. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.— М.: ИЛ, 1963.
18. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
19. Dienes J. K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta mech.— 1979.— V. 32, N 2.

Поступила 2/VII 1986 г.

УДК 539.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ДАВЛЕНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Г. П. Пухначева
(Новосибирск)

Пусть в прямолинейную границу вдавливаются без трения плоский штамп длиной l , так что под штампом возникает распределенное давление q . Впервые подобная задача рассмотрена Прандтлем в предположении о непрерывности напряжения всюду, кроме точек у концов штампа, для постоянного условия текучести (см., например, [1]).

Пусть σ_1, σ_2 — главные напряжения в плоскости (x, y) . С помощью $2p = \sigma_1 + \sigma_2$ и $2\tau = \sigma_1 - \sigma_2$ любое условие текучести для изотропного материала может быть записано в виде $\tau = \tau(p)$.

Обозначая через ψ угол между первым главным направлением и осью x , выразим компоненты тензора напряжений через p, τ и ψ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= p + \tau \cos 2\psi, & \sigma_y &= p - \tau \cos 2\psi, \\ \sigma_{xy} &= \tau \sin 2\psi. \end{aligned}$$

Подставив (1) в уравнения равновесия, получим следующую систему уравнений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial(p + \tau \cos 2\psi)/\partial x + \partial(\tau \sin 2\psi)/\partial y &= 0, \\ \partial(\tau \sin 2\psi)/\partial x + \partial(p - \tau \cos 2\psi)/\partial y &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $|\tau'| < 1$, тогда система (2) гиперболическая. Для нее можно выписать два семейства характеристик и соотношений вдоль них:

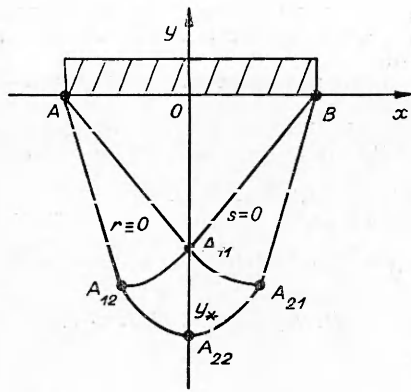
$$(\cos 2\psi + \tau')dy = (\sin 2\psi + \sqrt{1 - (\tau')^2})dx,$$

$$\psi + \int_{p_0}^p \frac{\sqrt{1 - (\tau')^2}}{2\tau} d\xi = r - \text{const},$$

$$(\cos 2\psi - \tau')dy = (\sin 2\psi - \sqrt{1 - (\tau')^2})dx,$$

$$\psi - \int_{p_0}^p \frac{\sqrt{1 - (\tau')^2}}{2\tau} d\xi = s - \text{const}.$$

Рассмотрим поля напряжений в плоскости течений (рисунок) и в плоскости характеристик. В области ABA_{11} возникает простейшее поле напряжений: $p_0 = \tau(p_0) - q$, $\psi = 0$, ей соответствует начало координат в плоскости характеристик. В области $A_{11}BA_{21}$ имеет место простая центрированная s -волна, а в $AA_{11}A_{12}$ — также простая центрированная



r -волна. И наконец, $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$ — это область взаимодействия двух простых центрированных волн. Справа от линии BA_{21} $p_1 = -\tau(p_1)$, $2\psi = \pi$.

Известно, что решение Прандтля полно, найденное поле скоростей кинематически допустимо и возможно продолжение решения в жесткие зоны как угодно далеко. В случае произвольного условия текучести по-прежнему справедливы теоремы Генки, в силу которых продолжения крайней правой r -характеристики и крайней левой s -характеристики должны пересечься. Назовем точку их пересечения

y_* , лежащую на оси y , глубиной пластической зоны и укажем способ ее определения.

Рассмотрим параметры r и s вдоль $A_{11}A_{21}$. Имеем $s \equiv 0$ или $\psi =$

$$= \frac{1}{2} \int_{p_0}^r \frac{V \sqrt{1 - (\tau')^2}}{2\tau} d\xi = \frac{1}{2} \int_{p_0}^r \lambda(\xi) d\xi. \text{ Следовательно, вдоль } A_{11}A_{21}$$

$$r = \int_{p_0}^p \lambda(\xi) d\xi, \text{ откуда } r_{A_{22}} = r_{A_{21}} = r_* = \int_{p_0}^{p_1} \lambda(\xi) d\xi = 2\psi|_{p=p_1} = \pi.$$

Для функции $\tau(p)$ как функции r и s сохраним прежнее обозначение. Определим новую переменную $\theta(r - s)$ соотношением $\tau'(r - s) = -\cos\theta(r - s)$. Тогда уравнения равновесия на плоскости характеристик в области $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$ приобретают вид

$$(3) \quad \frac{\partial x}{\partial r} + \operatorname{tg} \left(\frac{r + s + \theta(r - s)}{2} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s} + \operatorname{tg} \left(\frac{r + s - \theta(r - s)}{2} \right) \frac{\partial y}{\partial s} = 0.$$

Обозначим $2\alpha(r, s) = r + s - \theta(r - s)$, $2\beta(r, s) = r + s + \theta(r - s)$.

Так как характеристики $A_{11}A_{12}$ и $A_{11}A_{21}$ и распределения вдоль них искомых p и ψ известны, то можно получить для p и ψ условия на части границы области. Затем с помощью отображения на плоскости характеристик определить условия для x, y на отрезках характеристик:

$$(4) \quad x(r, 0) = 1 + c \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^r \operatorname{ctg} \theta(\xi) d\xi \right) \sin \alpha(r, 0) (\sin \theta(r))^{-1/2},$$

$$y(0, s) = c \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^s \operatorname{ctg} \theta(-\xi) d\xi \right) \cos \beta(0, s) (\sin \theta(-s))^{-1/2}, \quad c = \text{const.}$$

Соотношения (3), (4) представляют собой задачу Гурса. Локально ее решение существует и единственно. Однако для всего квадрата $[0, \pi] \times [-\pi, 0]$ это уже неочевидно, ввиду того что внутри квадрата вдоль линий $r + s = \pm(\pi - \theta)$ коэффициенты разрывны. Введем новые переменные, разбив квадрат на два треугольника:

$$(5) \quad \begin{aligned} u &= x \operatorname{ctg} \beta + y, \quad v = x + y \operatorname{tg} \alpha, \quad r \geq 0, \quad s \geq -r, \\ U &= x + y \operatorname{tg} \beta, \quad V = x \operatorname{ctg} \alpha + y, \quad r \geq 0, \quad s \leq -r. \end{aligned}$$

Они связаны простой линейной зависимостью $u = U \operatorname{ctg} \beta$, $v = V \operatorname{tg} \alpha$ с непрерывными на линии $r + s = 0$ коэффициентами.

Для u, v, U, V выполнены следующие соотношения:

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial (\operatorname{tg} \alpha)}{\partial s} g_1 (v \operatorname{ctg} \beta - u) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial (\operatorname{ctg} \beta)}{\partial r} g_1 (v - u \operatorname{tg} \alpha) &= 0, \quad r > 0, \quad s \geq -r, \\ \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\partial (\operatorname{ctg} \alpha)}{\partial s} g_2 (V \operatorname{tg} \beta - U) &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial (\operatorname{tg} \beta)}{\partial r} g_2 (V - U \operatorname{ctg} \alpha) &= 0, \quad r > 0, \quad s \leq -r; \\ (7) \quad v(r, 0) &= 1, \quad U(0, s) = -1; \\ (8) \quad u(r, -r) &= U(r, -r) \operatorname{ctg} \beta(r, -r), \\ v(r, -r) &= V(r, -r) \operatorname{tg} \alpha(r, -r), \end{aligned}$$

где $g_1 = (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1)^{-1}$; $g_2 = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 1)^{-1}$.

Если перейти к системе интегральных уравнений, то нетрудно показать, что решение задачи (6)–(8) для $(r, s) \in [0, \pi] \times [-\pi, 0]$ существует и единственно. Гладкость его зависит в конечном счете от гладкости функции $\tau(p)$ и условий согласования в нуле. Для y из (5) получаем выражение $y = g_1(v \operatorname{ctg} \beta - u)$. Значение $y(\pi, -\pi) = y_*$ будет определять размеры области пластического состояния материала по оси y .

Для решения задачи (6)–(8) построена устойчивая разностная схема второго порядка аппроксимации на основе схемы Кранка — Николсона. В случае, когда τ — линейная функция $\tau(p) = a + bp$, предложенный алгоритм реализован в виде программы на языке Фортран. В программе задаются три константы: a , b и длина штампа l . Конечным результатом работы программы являются y_* и q .

Для определения предельного давления q использовано выражение

$$\pi = \int_{p_n}^{p_1} \frac{\sqrt{1-b^2}}{a+b\xi} d\xi = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} \ln \left| \frac{a(1-b)}{(a-bq)(1+b)} \right|, \quad \text{откуда } q = \frac{a}{b} \left[1 - \frac{(1-b)}{(1+b)} \exp \left(-\frac{\pi b}{\sqrt{1-b^2}} \right) \right].$$

Легко видеть, что $q \rightarrow a(\pi + 2)$ при $b \rightarrow 0$, это согласуется с выражением для предельного давления при постоянном условии текучести.

Время счета на сетке 20×20 точек составляет около 30 с на БЭСМ-6. Результаты расчетов приведены в таблице. Так как исходная система (2) инвариантна относительно преобразования растяжения, то достаточно

№ п/п	b	y_* , см	q , кг/см ²	№ п/п	b	y_* , см	q , кг/см ²
1	0	-619,8	132,2	1	-0,1	-848,1	173,8
2	0	-619,8	0,514	2	-0,6	-14107,3	6,867
3	0	-247,9	—	3	-0,6	-5642,9	—
1	-0,01	-638,4	135,6	1	-0,6	-14107,3	1765,8
2	-0,3	-1860,1	1,329	2	-0,8	-370162,4	74,06
3	-0,3	-744	—	3	-0,8	-148064,9	—
1	-0,06	-744,5	155,1				
2	-0,4	-3114,2	2,048				
3	-0,4	-1245,7	—				

Примечание. 1 — горные породы с $l = 100$ см, $a = 25,714$ кг/см², значения a и b взяты из [2]; 2 — глинистый грунт с $l = 100$ см, $a = 0,1$ кг/см², значения a и b взяты из [3]; 3 — песчаный грунт с $l = 400$ см, $a = 0$, $q = 0$ [3].

провести вычисления для одного значения длины штампа. Для остальных значений искомая глубина y_* определяется простым умножением.

Автор выражает искреннюю признательность Б. Д. Аннину за постоянное внимание к работе и ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969.
2. Аннин Б. Д. Двумерные упругопластические задачи. — Новосибирск: НГУ, 1968.
3. Роза С. А. Механика грунтов. — М.: Высш. шк., 1962.

Поступила 19/XI 1986 г.