ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Я. С. Уфлянд (Ленинград)

1. В заметке рассмотрен вопрос о магнитоупругих колебаниях тел конечной, но малой проводимости в достаточно сильных магнитных полях. При этом пренебрегается индуцированным магнитным полем по сравнению с приложенным однородным полем, однако пондеромоторные силы считаются величинами того же порядка, что и объемные и инерционные силы (такой подход аналогичен случаю малых магнитных чисел Рейнольдса, но конечных параметров взаимодействия в магнитной гидродинамике). При сделанных предположениях электрическое поле можно считать потенциальным

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} f \tag{1}$$

Связь потенциала f с перемещением $\mathbf{u}$ точек среды дается зависимостью

$$\Delta f + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial \Delta f}{\partial t} = \frac{\mu}{c}\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\times \mathbf{H} \tag{2}$$

Это соотношение получается операцией дивергенции из уравнения

$$4\pi\sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\times\mathbf{H}\right) = c\operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле, ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость, c — скорость света. Динамические уравнения теории упругости имеют вид

$$G\Delta\mathbf{u} + (\lambda + G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{F} + \mathbf{P} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{4}$$

Здесь λ и G — коэффициенты Лямэ, $\mathbf{F}$ — объемная сила, ρ — плотность; пондеромоторная сила $\mathbf{P}$ определяется из выражения

$$P = \frac{\mu\sigma}{c}\left\{\frac{\mu}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right]\times\mathbf{H} + \mathbf{H}\times\operatorname{grad} f\right\} \tag{5}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении задача сводится к определению смещения $\mathbf{u}$ и потенциала f из уравнений (2) и (4), после чего индуцированное магнитное поле $\mathbf{h}$ должно быть найдено из зависимости

$$\Delta\mathbf{h} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\operatorname{rot}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right] \tag{6}$$

2. Применим предложенный способ к частному случаю плоских колебаний неограниченного упругого тела в поперечном магнитном поле, когда $\partial/\partial z = 0$, $\mathbf{u}_z = 0$, $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$. При этом $\mathbf{h} = \mathbf{k}h$, $\mathbf{H}\times\operatorname{grad} f = -\mathbf{H}\operatorname{rot} f\,\mathbf{k}$, $[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]\times\mathbf{H} = -H^2\mathbf{u}$ и выражение (5) принимает вид

$$\mathbf{P} = -\frac{\mu\sigma H}{c}\left(\frac{\mu H}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{rot} f\mathbf{k}\right) \tag{7}$$

Введем упругие потенциалы φ и ψ обычными формулами $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\psi\mathbf{k}$ и положим $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\Psi\mathbf{k}$. Основное уравнение (4) распадается на два

$$(\lambda + G)\Delta\varphi - \frac{\sigma\mu^2H^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{8}$$

$$G\Delta\psi - \frac{\mu\sigma H}{c}\left(\frac{\mu H}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + f\right) + \Psi = \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{9}$$

На основании равенства $\operatorname{div}\mathbf{u}\times\mathbf{H} = \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ и условий исчезания потенциалов на бесконечности соотношение (2) записывается в виде

$$f + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mu H}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Поэтому уравнение (9) можно представить в несколько иной форме

$$G\Delta\psi + \frac{\mu\varepsilon H}{4\pi c}\frac{\partial f}{\partial t} + \Psi = \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{11}$$

Таким образом, потенциал φ волн расширения определяется уравнением (8), а потенциалы ψ и f волн сдвига и электрического поля — системой уравнений (10), (11). После их нахождения индуцированное магнитное поле на основании соотношения (6) и равенства $\mathrm{rot}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{H}] = -\mathbf{H}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ дается следующей формулой

$$h = \frac{4\pi\sigma\mu H}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{12}$$

Полученные результаты показывают, прежде всего, что в рассматриваемом случае волны расширения и индуцированное магнитное поле не зависят от тока смещения, так как в уравнение (8) не входит параметр ε. Влияние проводимости среды при этом проявляется в виде диссипативного члена в уравнении (8), пропорционального производной по времени от потенциала волн расширения. Что касается волн сдвига, то они связаны с обоими параметрами σ и ε. Если же током смещения вообще можно пренебречь, то уравнение (11) для волн сдвига принимает ту же форму, что и в обычной теории упругости (это же обстоятельство имело место в задачах, рассмотренных в [1]), а потенциал электрического поля будет

$$f = -\frac{\mu H}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

3. Для исследования процесса распространения магнитоупругих волн под действием произвольной системы объемных сил построим соответствующую функцию Грина, т. е. предположим, что в начале координат в момент $t = 0$ прикладывается импульс величины Q, направленный, например, по оси y. Применяя к управлению (8) интегральные преобразования Лапласа и Фурье, полагая

$$\mathbf{f}^\circ(\alpha, \beta, p) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x, y, t)\exp[-pt + i(\alpha x + \beta y)]\,dt\,dx\,dy \tag{13}$$

и считая начальные условия нулевыми, находим

$$\varphi^\circ = \frac{Qi\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\,[(\lambda+2G)(\alpha^2+\beta^2) + p(k+\rho p)]} \qquad \left(k = \frac{\sigma\mu^2H^2}{c^2}\right) \tag{14}$$

Тогда искомый потенциал дается формулой обращения

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi^3(\lambda+2C)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}dp\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\beta\exp[-i(\alpha x+\beta y)]}{\alpha^2+\beta^2+\mu^2 p}\,\frac{d\alpha d\beta}{\alpha^2+\beta^2} \tag{15}$$

где

$$\mu^2 = \frac{p^2}{a^2}\left(1 + \frac{k}{\rho p}\right), \qquad a = \left(\frac{\lambda+2G}{\rho}\right)^{1/2}$$

После введения полярных координат и использования интегрального представления функций Бесселя будем иметь

$$\varphi = \frac{Qy}{4\pi^2 ir(\lambda+2G)}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt}dp\int_0^\infty \frac{J_1(rR)}{R^2+\mu^2}\,dR \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}) \tag{16}$$

Внутренняя квадратура выполняется (см. например, [2], стр. 692)

$$\int_0^\infty \frac{J_1(rR)}{R^2+\mu^2}\,dR = \frac{1-\mu rK_1(\mu r)}{\mu^2 r}$$

После этого при помощи формулы ([3], стр. 284)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K_1(\mu r)\,e^{pt}\,\frac{dp}{\mu} = \begin{cases} 0 & (t < r/a) \\ (2\rho a^2/kr)\exp(-kt/2\rho)\,\mathrm{sh}\,[(t^2 - r^2/a^2)^{1/2}k/2\rho] & (t > r/a) \end{cases}$$

находим

$$\varphi = \frac{Qy}{2\pi r^2}\left[\frac{1}{k}\left(1 - \exp\frac{-kt}{\rho}\right) - \frac{2}{k}\exp\left(\frac{-kt}{2\rho}\right)\mathrm{sh}\,\frac{k}{2\rho}\left(t^2 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}\right] \qquad \left(t > \frac{r}{a}\right)$$

$$\varphi = \frac{Qy}{2\pi r^2 k}\left(1 - \exp\frac{-kt}{\rho}\right) \qquad \left(t < \frac{r}{a}\right) \tag{17}$$

Выражение потенциала ψ волн сдвига приводим в виде:

$$\psi = -\frac{Qx}{4\pi^2 ir^2 G}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\,[1 - \nu rK_1(\nu r)]\,\frac{dp}{\nu^2}, \qquad \nu^2 = \frac{p^2}{G/\rho}\left(1 + \frac{k/\rho p}{1 + 4\pi\sigma/\varepsilon p}\right) \tag{18}$$

(в вещественной форме он представляется через весьма сложные квадратуры).

При $k \to 0$, когда либо отсутствует магнитное поле, либо среда непроводящая, выражения (17), (18) дают потенциалы упругих волн, вызванных точечным источником.

Анализ результатов показывает, что в принятых предположениях упругие потенциалы φ и ψ содержат как слагаемые волнового характера (с обычными скоростями распространения a и b), так и составляющие, соответствующие мгновенно распространяющимся возмущениям (качественно аналогичные результаты получены в работе [1]).

Поступила 26 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Колебания упругих тел конечной проводимости в поперечном магнитном поле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, стр. 740.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
3. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Tables of integral transform. N. Y., Toronto, London, 1954.

О ВДАВЛИВАНИИ ВОГНУТОГО ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В. И. Колос (Волгоград)

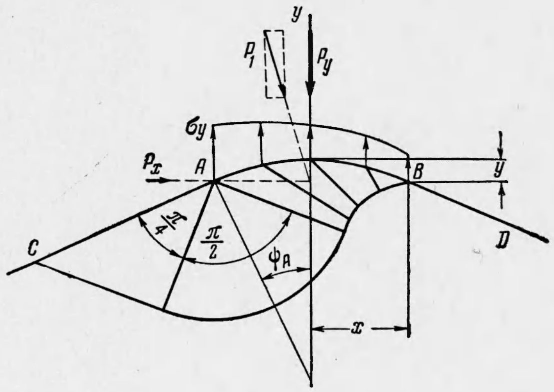
В работе [1] рассмотрена задача о вдавливании вогнутого штампа без трения в среду (фиг. 1), ограниченную произвольной гладкой выпуклой кривой AB, симметричной относительно оси y, и двумя прямыми AC и BD — касательными к AB в точках A и B. Автор [1] полагает, что к наименьшему значению предельной нагрузки приводит решение, соответствующее одностороннему выдавливанию материала (фиг. 1). Автор не заметил, что в этом случае несимметричному полю соответствует несимметрично приложенная нагрузка. Напряжения и силы определяются так:

$$\sigma_n = -2k\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi - \psi_A + \psi\right) \qquad (1)$$

$$P_y = \int_{-\psi_A}^{\psi_A} \sigma_n \cos\psi\, r(\psi)\, d\psi = -4kx\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi - \psi_A\right) - \int_{-\psi_A}^{\psi_A} \psi \cos\psi\, r(\psi)\, d\psi \qquad (2)$$

$$P_x = \int_{-\psi_A}^{\psi_A} \sigma_n \sin\psi\, r(\psi)\, d\psi = -4ky\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi - \psi_A\right) - \int_{-\psi_A}^{\psi_A} \psi \sin\psi\, r(\psi)\, d\psi \qquad (3)$$

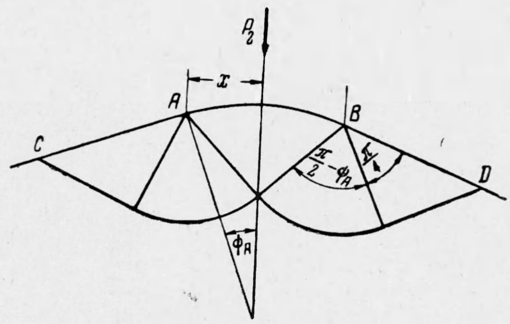
$$P_1 = -\sqrt{P_x^2 + P_y^2} \qquad (4)$$



Фиг. 1

Более просто задача решается путем построения поля, указанного на фиг. 2. Нагрузка

$$P_2 = -4kx\left(1 + \tfrac{1}{2}\pi - \psi_A\right) \qquad (5)$$



Фиг. 2

Сравнивая формулы (2), [4] и (5), нетрудно убедиться, что всегда $P_1 > P_y = P_2$.

Поступила 21 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. И. Замечания к теории вдавливания штампа в пластическую среду. ПМТФ, 1962, № 1.