ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ И КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С УЧЕТОМ ТЕПЛОТЫ ТРЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

С. А. Каганов *(Саратов)*

Рассматриваемой задаче посвящен ряд работ [1-7].

В случае течения в плоском канале имеем следующую систему дифференциальных уравнений для определения скорости и температуры по сечению потока:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{du}{dx}\right)=\frac{dp}{dz}=\text{const},\qquad \lambda\frac{d^2T}{dx^2}+\mu\left(\frac{du}{dx}\right)^2=0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u=0,\qquad T=T_0\qquad \text{при } x=\pm h/2 \tag{2}$$

Для случая течения Куэтта [3, 5, 6]

$$dp/dz=0,\qquad u=u_0\qquad \text{при } x=h/2 \tag{3}$$

Исключая u из (1), имеем

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{\lambda\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2x^2=0,\qquad T=T_0 \text{ при } x=\pm\frac{h}{2} \tag{4}$$

Аналогичным образом имеем для случая течения в цилиндрической трубе

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{1}{4\lambda\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2r^2=0,\qquad T=T_0\quad \text{при } r=R \tag{5}$$

Вышеупомянутые авторы при решении уравнения (4) и (5) применяли следующий вид зависимости вязкости от температуры:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1+\alpha T}{\mu_0} \tag{6}$$

где μ_0 и α — положительные постоянные, характерные для данной жидкости. В случае такой зависимости вязкости от температуры уравнения (4) и (5) будут линейными относительно температуры. Решения этих уравнений получаются в известных функциях. В случае течения в цилиндрической трубе решение уравнения (5) выражается через бесселевы функции [8]

$$\theta=\theta_m J_0\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}r^2\right) \tag{7}$$

Здесь

$$\theta=T+\frac{1}{\alpha},\qquad \rho=\frac{\alpha}{4\lambda\mu_0}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2,\qquad \theta_m=\theta\quad \text{при } r=0$$

Полагая в (7) $r=R$, получаем

$$\theta_m=\frac{\theta_0}{J_0(^1/_2\sqrt{\rho}R^2)},\qquad \theta=\frac{\theta_0J_0(^1/_2\sqrt{\rho}r^2)}{J_0(^1/_2\sqrt{\rho}R^2)}$$

Отсюда видно, что для значений градиентов давления, для которых величина $^1/_2\sqrt{\rho}R^2$ как угодно близка к первому корню функции $J_0(x)$, значение θ_m может быть как угодно большим, а для значения $^1/_2\sqrt{\rho}R^2$, равного первому корню, решения не существует.

Представляет интерес исследование этого обстоятельства для достаточно общих зависимостей вязкости от температуры. (Изучение течения Куэтта для зависимости $\mu(T)$ общего вида было проведено в [5]; в этом случае соответствующее уравнение для температуры интегрируется в квадратурах.) Пусть

$$\frac{1}{\mu}=\varphi(T) \tag{8}$$

Функцию $\varphi(T)$ будем считать определенной в $(0,+\infty)$, положительной, непрерывной и монотонно возрастающей в этом интервале.

Производя соответствующую замену переменных, можно считать $^1/_2 h=1$, $T_0=0$.

Так как распределение температуры симметрично относительно оси канала, то $dT/dx=0$ при $x=0$. Для определения T имеем краевую задачу (для канала)

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\nu x^2\varphi(T)=0\quad \left(\nu=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{dp}{dz}\right]^2\right),\qquad T(1)=0,\qquad \left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0}=0 \tag{9}$$

Вместо краевой задачи (9) рассмотрим интегральное уравнение

$$T = \nu \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi^2 \varphi[T(\xi)]\, d\xi \tag{10}$$

Здесь $K(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L(T) = d^2T/dx^2$ при краевых условиях, указанных в (9).

Покажем, что если решение уравнения (10) существует при некотором значении $\nu = \nu_0$, то оно существует для всех значений $0 < \nu < \nu_0$. Действительно, рассмотрим последовательность функции $T_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$T_0(x) = \nu \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi\, \varphi(0)\, d\xi, \qquad T_n(x) = \nu \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi^2\, \varphi[T_{n-1}(\xi)]\, d\xi \tag{11}$$

Эта последовательность возрастающая. Если обозначить через $T^\circ(x)$ решение уравнения (10) при $\nu = \nu_0$, то для $0 < \nu < \nu_0$ будем иметь $T_n(x) \leqslant T^\circ(x)$, т. е. последовательность $T_n(x)$ ограничена сверху, следовательно, существует

$$\lim T_n(x) = T(x) \quad \text{при } n \to \infty$$

и функция $T(x)$ является решением уравнения (10). (На основании теоремы Лебега [9] можно перейти к пределу под знаком интеграла в последовательности (11).) В виде следствия получаем, что если решения уравнения (10) не существует для $\nu = \nu_0$, то оно не существует для $\nu > \nu_0$. Отсюда следует, что существует число η_0, $0 \leqslant \eta_0 \leqslant +\infty$, что для $0 < \nu < \eta_0$ решение уравнения (10) существует, а для $\nu > \eta_0$ решения не существует.

Это означает, что для каждой жидкости существует число p_0' такое $(0 \leqslant p_0' \leqslant \leqslant +\infty)$, что для градиентов давления по абсолютной величине меньше p_0' возможны установившиеся течения с этим градиентом, а для значений градиентов по абсолютной величине больше p_0' невозможны установившиеся течения.

Докажем теперь, что $\eta_0 > 0$ и оценим число η_0 снизу. Возьмем некоторое значение $T_0 = \text{const}$ и пусть

$$T_1^*(x) = \nu \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi^2 \varphi(T_0)\, d\xi$$

Так как $T_1^*(0)$ — максимальное значение $T_1^*(x)$ в интервале [0,1], то имеем

$$T_1^*(x) \leqslant T_1^*(0) = \nu \int_0^1 K(0, \xi)\, \xi^2 \varphi(T_0)\, d\xi$$

Рассмотрим значения ν, для которых

$$T_1^*(0) = \nu \int_0^1 K(0, \xi)\, \xi^2\, \varphi(T_0)\, d\xi < T_0$$

т. е.

$$\nu < T^\circ \left(\varphi(T_0) \int_0^1 K(0, \xi)\, \xi^2\, d\xi\right)^{-1} = 12 \frac{T_0}{\varphi(T_0)}$$

Для этих значений ν последовательность $T_n^*(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$T_n^*(x) = \nu \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi^2\, \varphi[T_{n-1}^*(\xi)]\, d\xi$$

убывает и ограничена снизу, следовательно, имеет предел (отличный от нуля) и этот предел является решением (10). Это означает, что для значений

$$\nu < 12 \max_T \frac{T}{\varphi(T)} \tag{12}$$

решение уравнения (10) всегда существует. Таким образом,

$$\eta_0 \geqslant 12 \max \frac{T}{\varphi(T)} \tag{13}$$

Оценим η_0 сверху. Предположим, что для некоторого значения ν уравнение (10) имеет решение $T(x)$. Тогда максимальное значение $T(x) = T_m$ при $x = 0$ связано с ν неравенством, которое получается следующим образом. При $x = 0$ из уравнения (10) имеем

$$T_m = \nu \int_0^1 K(0, \xi)\, \xi^2\, \varphi[T(\xi)]\, d\xi$$

Пусть $0<\delta<1$. Тогда

$$\frac{1}{\nu}=\frac{1}{T_m}\int_0^1 K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi\,[T(\xi)]\,d\xi=\frac{1}{T_m}\left[\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi\,[T(\xi)]\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_\delta^1 K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi\,[T(\xi)]\,d\xi\right]>\frac{1}{T_m}\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi\,[T(\xi)]\,d\xi$$

Отсюда, ввиду убывания и выпуклости функции $T(x)$ на отрезке в $[0,\,1]$ имеем

$$\frac{1}{\nu}>\frac{1}{T_m}\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi\,[T(\delta)]\,d\xi=\frac{\varphi\,[T(\delta)]}{T_m}\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\,d\xi>$$

$$>\frac{\varphi\,[T_m(1-\delta)]}{T_m}\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\,d\xi=\frac{\varphi\,[T_m(1-\delta)]}{T_m(1-\delta)}\,A(\delta)$$

Здесь

$$A(\delta)=(1-\delta)\int_0^\delta K(0,\,\xi)\,\xi^2\,d\xi=(1-\delta)\left(\frac{\delta^3}{3}-\frac{\delta^4}{4}\right) \tag{14}$$

Таким образом,

$$\nu<\frac{1}{A(\delta)}\,\frac{T_m(1-\delta)}{\varphi\,[T_m(1-\delta)]}\quad(0<\delta<1) \tag{15}$$

Так как функция $A(\delta)$ имеет максимум при $\delta={}^2/_3$ равный ${}^4/_{243}$, то из (15) следует, что для значений ν, для которых существует решение уравнения (10), имеет место неравенство

$$\nu<\frac{243}{4}\max_T\frac{T}{\varphi(T)} \tag{16}$$

Поэтому имеем для η_0 верхнюю оценку

$$\eta_0\leqslant\frac{243}{4}\max_T\frac{T}{\varphi(T)} \tag{17}$$

Для дальнейшего рассмотрения может представиться три случая в зависимости от поведения $\varphi(T)$ при $T\to+\infty$.

1. Пусть

$$\lim T^{-1}\varphi(T)=0\qquad\text{при } T\to+\infty \tag{18}$$

Так как в этом случае $\max\,[T^{-1}\varphi(T)]=+\infty$, то из (13) следует, что решение существует для всех ν. Можно показать [10], что для значений ν, $0<\nu\,\varphi'(T)<\beta_1$, где β_1 — первое собственное значение ядра $K(x,\,\xi)$, решение единственно. Далее

$$T_m\to+\infty\ \text{при}\ \nu\to+\infty.$$

Это означает, что в случае, когда функция $\varphi(T)$ удовлетворяет (18), для любых градиентов давления существуют установившиеся течения, причем сколь угодно большие температуры на оси канала можно получить при неограниченном увеличении градиента давления.

2. Пусть

$$\lim T^{-1}\varphi(T)=B>0\quad\text{при } T\to+\infty\quad(B<+\infty) \tag{19}$$

В этом случае $\max_T\,[T^{-1}\varphi(T)]<+\infty$ и $\eta_0<+\infty$. Для значений ν, при которых существует решение

$$T_m<\nu\int_0^1 K(0,\,\xi)\,\xi^2\varphi(T_m)\,d\xi\,,\quad\nu>T_m\left(\varphi(T_m)\int_0^1 K(0,\,\xi)\,\xi^2\,d\xi\right)^{-1} \tag{20}$$

Отсюда и из некоторых теорем о нелинейных интегральных уравнениях [11] следует, что режимы течения со сколь угодно большими значениями T_m осуществляются при градиентах давления, близких по абсолютной величине к некоторому характерному для данной жидкости положительному числу (не большему η_0). Имеем следующую картину течений. Будем очень медленно увеличивать по абсолютной величине градиент давления от очень малых значений, так что в каждый момент движение можно считать установившимся. Температура жидкости на оси будет вследствие большого разогрева быстро возрастать и при конечных градиентах давления может быть сделана сколь угодно большой (при установившемся режиме). Если же скачком увеличить градиент давления выше некоторого критического значения, то температура жидкости на оси начнет неограниченно увеличиваться с течением времени. Установившиеся течения при этих градиентах невозможны.

3. Пусть

$$\lim T^{-1} \varphi(T) = +\infty \qquad \text{при } T \to +\infty \tag{21}$$

И в этом случае существует критическое значение градиента давления, выше которого невозможны установившиеся течения. Можно показать, пользуясь (15) и теоремами [11], что для значений $\nu < \eta_0$ существует, по меньшей мере, два решения уравнения (10), для одного из них $T_m \to 0$ при $\nu \to 0$, для второго $T_m \to +\infty$ при $\nu \to 0$. Второе решение неустойчиво. Таким образом, установившиеся режимы течения со сколь угодно большой температурой на оси осуществляются при градиентах давления, стремящихся к нулю. Это означает, что если жидкость предварительно достаточно сильно разогрета, то большая температура может поддерживаться за счет вязкой диссипации при малых градиентах давления. При значении градиента давления выше критического невозможно установившееся течение.

Во всех рассмотренных случаях, если для некоторого ν решение существует, то существует предел последовательности $T_n(x)$, построенной по формуле (11), и этот предел дает наименьшее по величине решение для данного ν.

Результаты, аналогичные вышеизложенным, могут быть получены для уравнения (5).

Использованный метод исследования может быть применен для изучения течения Куэтта. В этом случае интегральное уравнение будет отличаться от (10) отсутствием множителя ξ^2. Параметр ν связан с напряжением внутреннего трения. Как следствие полученных выше результатов могут быть получены результаты работы [5], а также некоторые оценки для величины напряжения.

Поступила 14 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1955.
2. Hausenblass. Die nicht isotherme Strömung einer zähen Flüssigkeit durch einge Spalte und Kapillarröhren. Ing. Arch., 18 (1950).
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
4. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. XXI. вып. 3.
5. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
6. Яблонский В. С., Каганов С. А. Течение Куэтта с учетом зависимости вязкости от температуры и теплоты трения. Изв. вузов. Нефть и газ, 1958, № 5.
7. Каганов С. А., Яблонский В. С. О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1.
8. Смирнов В. Л. Курс высшей математики, т. 2, ОГИЗ, 1948.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменности. ГИТТЛ, 1950.
10. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИИЛ, 1960.
11. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. Шестаков

(Москва)

Упругий режим фильтрации возникает, как известно, при изменении эффективной нагрузки на пласт и особенно резко проявляется в напорных горизонтах. Обычно в теории упругого режима рассматриваются задачи, когда эффективная нагрузка на пласт меняется только в зависимости от изменения давления жидкости [1]. Вместе с тем представляет интерес изучение процессов упругого режима фильтрации при изменении или перераспределении внешних нагрузок на кровлю напорного пласта.

1. Влияние жесткости покровных пластов. В теории упругого режима предполагается, что изменение давления фильтрующейся жидкости в каком-либо сечении пласта вызывает по величине точно такое же изменение давления на кровлю пласта от вышележащих пород. При этом принимается, что весь вышележащий комплекс пород является как бы абсолютно податливым, т. е. не сопротивляющимся деформациям сдвига. В действительности же изменение давления на кровле горизонта обязательно вызовет перераспределение напряжений в покрывающих его пластах, что в свою очередь будет влиять на их деформацию и передачу давлений на кровлю рассматриваемого напорного пласта.