

УДК 532.516; 532.526

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ
ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ****В. П. Реутов**Институт прикладной физики РАН,
603600 Нижний Новгород*

Нелинейные процессы генерации трехмерных вихревых структур играют важную роль при разрушении ламинарного режима течения в пограничном слое [1–3]. Использование методов теории малой нелинейности позволяет выявить неустойчивости, ответственные за формирование трехмерных структур, и описать начальную стадию их развития (см., например, [4–8]). Другое направление исследований связано с разработкой методов прямого численного решения уравнений Навье — Стокса. С помощью маломодовых моделей удается построить трехмерные структуры при небольшой надкритичности [9, 10]. Эффекты сильной нелинейности описываются в рамках сложных численных схем, реализация которых требует применения суперкомпьютеров [11–15].

Прямое численное моделирование не всегда позволяет добиться понимания механизмов протекающих процессов и оценить степень их универсальности. Кроме того, его постановка зачастую нуждается в предварительной информации, полученной из аналитического рассмотрения. В этой связи важное значение приобретают исследования, нацеленные на создание физических моделей, раскрывающих основные качественные особенности нелинейных структур. Такие модели могут быть построены на основе использования асимптотических методов, выходящих за рамки приближения слабой нелинейности.

В [16, 17] изучалось формирование трехмерных вихревых структур в нелинейном критическом слое, возникающем при наличии в потоке волнового триплета с фиксированными амплитудами волн. В [18–20] разрабатывались нелинейные модели, основанные на использовании теории «свободного взаимодействия», в которой предполагается малым волновое число возмущений и рассматривается режим течения с вязконелинейным пристенным слоем. Путем перехода в уравнениях свободного взаимодействия к большим амплитудам возмущений (что фактически равносильно переходу к невязкому пределу) в [18, 20] получено уравнение Бенджамина — Оно для двумерных нелинейных структур в пограничном слое. Его солитонные решения использовались в [21, 22] для объяснения экспериментальных данных. Такое же уравнение было выведено позднее для идеальной модели течения в пограничном слое с кусочно-линейным профилем скорости [23]. В [24] предложено обобщенное уравнение Бенджамина — Оно для трехмерных волн в пограничном слое, которое решалось численно в [25]. Однако в этом уравнении оказалась неучтенной трехмерная нелинейная неустойчивость течения, приводящая к росту малых возмущений.

В данной работе процесс формирования трехмерных структур рассматривается как результат динамического насыщения трехмерной нелинейной неустойчивости малых начальных возмущений. Рассматривается

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–05–8075).

невязкое плоскопараллельное течение в пограничном слое с гладким профилем скорости; динамические уравнения строятся с помощью асимптотических разложений по малому волновому числу.

1. Краевая задача для длинноволновых нелинейных возмущений в идеальном течении. Уравнения главного приближения асимптотической теории для длинноволновых трехмерных возмущений в пограничном слое, полученные в [19] на основе приближения свободного взаимодействия, можно вывести также, исходя из уравнений идеального течения. Рассмотрим кратко структуру асимптотических разложений в этом случае.

Уравнение Эйлера для течения идеальной несжимаемой жидкости представим в безразмерном виде, используя для нормировок скорость свободного течения U_∞ и толщину пограничного слоя δ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — поле скорости; p — давление. Координату x_1 будем отсчитывать в направлении первичного течения, x_3 — поперек потока, x_2 — по нормали к стенке $x_2 = 0$. Введем малый параметр ε , определяющий порядок величины волновых чисел возмущения по направлениям x_1 и x_3 . Соответственно введем переменные $x = \varepsilon x_1, z = \varepsilon x_3$ и $y \equiv x_2$. Для построения уравнений главного приближения асимптотической теории по ε в рамках метода многих масштабов достаточно использовать одно время $\tau = \varepsilon^2 t$.

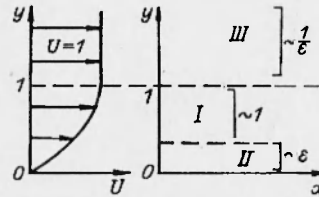


Рис. 1

Выделим по координате y три области, как показано на рис. 1. В основной области I будем использовать переменную y , в пристеночной области II — переменную $Y = y/\varepsilon$, а во внешней области III — координату $S = \varepsilon y$.

Решение (1.1) в области I представляется в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= U(y) + \varepsilon v_1^{(1)} + \varepsilon^2 v_1^{(2)} + \dots, & v_2 &= \varepsilon^2 v_2^{(2)} + \varepsilon^3 v_2^{(3)} + \dots, \\ v_3 &= \varepsilon^2 v_3^{(2)} + \dots, & p &= \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $U(y)$ — профиль скорости первичного течения ($U = 1$ при $y > 1$, см. рис. 1). Разложения для области III следующие:

$$\begin{aligned} v_1 &= U(y) + \varepsilon^2 \bar{v}_1^{(2)} + \dots, & v_2 &= \varepsilon^2 \bar{v}_2^{(2)} + \dots, \\ v_3 &= \varepsilon^2 \bar{v}_3^{(2)} + \dots, & p &= \varepsilon^2 \bar{p}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

В области II решение строим в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= \varepsilon V_1^{(1)} + \dots, & v_2 &= \varepsilon^3 V_2^{(3)} + \dots, \\ v_3 &= \varepsilon V_3^{(1)} + \dots, & p &= \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Структура разложений (1.2)–(1.4) соответствует классу решений, описывающих режим насыщения нелинейной неустойчивости. В этом классе решений характерное время определяется частотой гармонических волн линейной задачи и имеет порядок $1/\varepsilon^2$, а нелинейная пристеночная область II включает резонансный уровень, определяемый этими волнами. Отсюда возникают использованные выше нормировки времени t и координаты y в области II .

Введем для упрощения преобразований операторы $\hat{k} = -i\partial/\partial x$ и $\hat{h} = -i\partial/\partial z$, с которыми будем обращаться как с числами, понимая это правило в смысле применения преобразования Фурье по x и z . Например, функциональная связь вида $g_1 = F(\hat{k}, \hat{h})g_2$ означает, что для фурье-образов

$$\hat{g}_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{1,2} \exp(-ikx - ihz) dx dz$$

имеет место соотношение $\hat{g}_1 = F(k, h)\hat{g}_2$. Тогда после выполнения процедуры сращивания разложений для v_2 и p в областях I, III и сращивания разложений для p в областях I и II получим

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= A(x, z, \tau)U'(y), & v_2^{(2)} &= -A_x(x, z, \tau)U(y), \\ P^{(2)} = p^{(2)} &= P = \frac{\hat{k}^2 A}{\sqrt{k^2 + h^2}}, & \bar{p}^{(2)} &= \exp(-S\sqrt{k^2 + h^2})P, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $A(x, z, \tau)$ определяет профиль возмущений продольной скорости по «горизонтальным» направлениям x, z ; $U'(y) = dU/dy$. Главный член разложения (1.2) для v_3 выражается через давление: $v_3^{(2)} = -[\hat{h}/\hat{k}U(y)]P$. Можно показать, что отклонение материальной поверхности от уровня $y = y_0$, на котором она находится в области I невозмущенного потока, с точностью до членов $\sim \varepsilon$ имеет вид

$$y - y_0 = -\varepsilon A. \quad (1.6)$$

Уравнения для течения в пристеночной области II принимают вид [19, 20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial \tau} + V_1^{(1)} \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x} + V_2^{(3)} \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial Y} + V_3^{(1)} \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_3^{(1)}}{\partial \tau} + V_1^{(1)} \frac{\partial V_3^{(1)}}{\partial x} + V_2^{(3)} \frac{\partial V_3^{(1)}}{\partial Y} + V_3^{(1)} \frac{\partial V_3^{(1)}}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V_2^{(3)}}{\partial Y} + \frac{\partial V_3^{(1)}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Они решаются с граничными условиями при $Y \rightarrow \infty$, которые следуют из условия сращивания решений в областях I и II в порядке ε , и условием непротекания на стенке (см. также [19, 20]):

$$V_1^{(1)} \rightarrow U_0'(Y + A), \quad V_3^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Y \rightarrow +\infty; \quad (1.8a)$$

$$V_2^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0. \quad (1.8b)$$

Здесь $U_0' = U'(0)$. Условие (1.8a) для $\bar{v}_3^{(1)}$ определяется поведением при $y \rightarrow 0$ приведенной выше функции $v_3^{(2)}$. Из сращивания разложений для v_3 вытекает, что $V_3^{(1)}$ убывает при $Y \rightarrow \infty$ как $1/Y$. В результате продольная и трансверсальная компоненты скорости имеют одинаковый порядок по ε в области II и различный в области I . Переменную $v_2^{(3)}$ можно исключить из (1.7) путем интегрирования третьего уравнения по y с учетом (1.8b). Поэтому уравнения (1.7) с граничными условиями (1.8) и связью (1.5) между P и A образуют замкнутую краевую задачу для области II . Заметим, что интегральное представление связи между P и A , данное в [19], можно получить из операторной записи (1.5), если воспользоваться формулой спектрального разложения для сферической волны (см. [26, с. 368]).

В случае двумерных возмущений ($\partial/\partial z = 0$) подстановка асимптотик (1.8 а) в (1.7) с учетом функциональной связи между P и A дает уравнение Бенджамина — Оно для A [20]. В трехмерной задаче сращивание (1.4) и (1.2) с учетом членов порядка ε^2 в (1.2) либо прямое отыскание асимптотик решений (1.7) при $Y \rightarrow \infty$ добавляют в (1.8) члены $O(1/Y)$, которые при формальном продолжении до стенки приводят к сингулярности (функциональное представление этих членов дано в [20]). Эта сингулярность связана с резонансным характером взаимодействия между волной и жидкими частицами в области II , которые имеют скорость дрейфа того же порядка ε , что и характерная скорость волны.

По существу, область II является пристенным нелинейным критическим слоем течения, порожденным медленной волной, распространяющейся в основном потоке. В двумерной теории в уравнения главного приближения не входит кривизна профиля скорости первичного течения в области II , вследствие чего завихренность остается постоянной в этой области. В трехмерной задаче вступает в игру эффект сжатия и растяжения вихревых трубок, которых приводит к генерации возмущений завихренности даже при постоянной завихренности первичного течения. Резонансные возмущения траекторий частиц приводят к тому, что в области II возникает пик возмущений составляющих завихренности по x и z , которые в нелинейном режиме достигают значений $O(1)$. Асимптотики решения (1.7) при $Y \rightarrow \infty$ уже не совпадают с ним во всей области II , и одно эволюционное уравнение для A записать не удастся [20].

Генерация возмущений завихренности в резонансной области II играет важную роль в динамике течения, так как именно она ответственна за возникновение трехмерной нелинейной неустойчивости. В [27] была обнаружена резонансная нелинейная неустойчивость в невязком течении с кусочно-линейным профилем скорости. Аналогичное решение можно построить для задачи (1.7), (1.8), используя разложение по малой амплитуде возмущений. Линеаризуя уравнения (1.7) относительно малых возмущений скорости первичного течения ($V_1^{(1)} = U_0' Y$) и рассматривая решения в виде трехмерных волн $\sim \exp(ikx + ihz - ickt)$, можно показать, что фазовая скорость $c = (1/U_0')\sqrt{k^2 + h^2}$. При $h_1/k_1 = \sqrt{3}$ выполняется условие резонанса симметричной пары косых волн ($k_1, \pm h_1$) с двумерной волной ($2k_1, 0$). Этот резонанс приводит к вырожденной нелинейной неустойчивости, когда амплитуда двумерной волны постоянна, а косые волны нарастают экспоненциально [27]. Оценки показывают, что экспоненциальный рост наклонных волн не сохраняется до стадии насыщения (по-видимому, имеется интервал их взрывного нарастания [27]).

О существовании нелинейной неустойчивости в вязком течении известно давно [4–6]. Наличием такой неустойчивости в невязком течении можно объяснить сходство процессов нелинейного развития трехмерных структур в вязком и идеальном течениях, наблюдаемое при численном моделировании [11, 13]. С точки зрения общей теории волн неустойчивость такого типа может быть классифицирована как отрицательное нелинейное поглощение Ландау, поскольку ее существование связано с ростом кинетической энергии волнового возмущения в результате его резонансного взаимодействия со средой, в которой отсутствует диссипация. Можно предположить, что в невязком течении возможна также нерезонансная нелинейная неустойчивость, подобная обнаруженной численно в [28] для вязкого течения. В этой работе изучался «быстрый» переход к турбулентности в пограничном слое при введении в поток возмущения в виде произвольной симметричной пары косых гармоник. Ускорение перехода достигалось за счет исключения стадии медленного развития двумерной неустойчивости.

2. Координаты Лагранжа для резонансных частиц. Для выяснения качественных особенностей поведения возмущений в резонансной области II полезно перейти в (1.7) к координатам Лагранжа. Определим переменные Лагранжа ξ, η, ζ как значения координат жидких частиц x, Y, z при $\tau = 0$. Задаваясь характерными волновыми числами возмущения по x и z , равными k_1 и h_1 , введем нормированные переменные:

$$\begin{aligned} (x, \xi) &= k_1(x, \xi), & (z, \zeta) &= h_1(z, \zeta), \\ (\bar{\eta}, \bar{Y}, \bar{A}) &= \frac{U_0'^2}{k_1}(\eta, Y, A), & \bar{\tau} &= \frac{k_1^2}{U_0'}\tau, & \bar{P} &= \frac{U_0'^2}{k_1^2}P, \\ (u, \bar{c}) &= \frac{U_0'}{k_1}(V_1^{(1)}, c), & w &= \frac{h_1 U_0'}{k_1^2}V_3^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Черта сверху над нормированными переменными далее опускается, если особо не оговаривается обратное. Тогда уравнения (1.7) примут вид

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dz}{d\tau} = w, \quad \frac{dw}{d\tau} = -\gamma^2 \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \quad (2.2)$$

где $\gamma = h_1/k_1$. Два уравнения в левой части (2.2) следует рассматривать как определение x - и z -компонент траекторий жидких частиц в данном порядке точности задания скоростей. Уравнения (2.2) показывают, что движение жидких частиц в проекции на плоскость x, z автономно (не зависит явно от их перемещения по вертикали) и подобно движению точечных масс в потенциальном поле. Горизонтальные компоненты движения управляют смещением частиц по вертикали через уравнение непрерывности, которое можно записать в форме

$$K_1 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + K_2 \frac{\partial Y}{\partial \eta} + K_3 \frac{\partial Y}{\partial \zeta} = 1. \quad (2.3)$$

Здесь $K_1 = z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta$; $K_2 = z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta$; $K_3 = z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi$. Если неустойчивость развивается из весьма малых начальных возмущений и рассматриваются $|A| \gg |A(x, z, 0)|$, начальные условия для частиц можно взять соответствующими невозмущенному потоку:

$$x(0) = \xi, \quad z(0) = \zeta, \quad u(0) = \eta, \quad w(0) = 0. \quad (2.4)$$

Другая возможность задания начальных возмущений связана с включением в (2.2) внешнего воздействия в явном виде (путем введения добавки к P в (1.5)). Уравнение (2.3) решается с граничным условием $Y = 0$ при $\eta = 0$. Условия (1.8а) принимают вид $u \rightarrow Y + A$, $w \rightarrow 0$ при $Y \rightarrow \infty$ и фактически определяют A через переменную P , замыкая совместно с (1.5) систему уравнений для A .

Система уравнений, подобная (2.2), (2.3), изучалась в [29, 30] при решении задачи о развитии «плоского» вихря в пограничном слое. Разбиение на области по y в [29] не производилось, давление учитывалось в рамках теории возмущений как фактор, корректирующий траектории при свободном разлете частиц. Далее будут использованы некоторые общие свойства решений (2.3), отмеченные в [29, 30].

Характеристики квазилинейного уравнения (2.3) для Y определены системой уравнений [30]

$$\frac{d\xi}{dY} = K_1, \quad \frac{d\eta}{dY} = K_2, \quad \frac{d\zeta}{dY} = K_3. \quad (2.5)$$

Это семейство характеристик можно параметризовать значениями лагранжевых координат ξ_0, ζ_0 частиц в плоскости $Y = \eta = 0$. Вычисляя

приращение dx и dz с учетом (2.5), можно показать, что значения x и z сохраняются вдоль характеристик. При этом производная d/dY в (2.5) совпадает с частной производной по Y при фиксированных x и z [29]. Из (2.5) видно, что в тех точках, где $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, возникает бесконечно большое растяжение начального элемента жидкости вдоль Y , и, следовательно, возможна сингулярность подъема жидких частиц [29].

3. Формирование трехмерных вихревых структур. В данной работе дается качественный анализ решений поставленной в п. 2 задачи, целью которого является предсказание основных тенденций нелинейного развития трехмерных периодических возмущений на стадии насыщения нелинейной неустойчивости.

Будем считать, что малое начальное возмущение имеет вид симметричной пары наклонных волн с волновыми векторами $(k_1, \pm h_1)$ и реализуется один из двух типов неустойчивости, упомянутых в п. 1. Тогда при вступлении неустойчивости в стадию насыщения поле A можно представить в виде (переменные нормированы в соответствии с (2.1)) $A = 2A_0(\tau) \cos(x - c\tau) \cos z$ ($c = \sqrt{1 + \gamma^2}$, A_0 — амплитудная функция). При этом для давления получим выражение

$$P = 2B_0(\tau) \cos(x - c\tau) \cos z, \quad (3.1)$$

где $B_0 = A_0/\sqrt{1 + \gamma^2}$. Для стадии слабой нелинейности характерен однонаправленный обмен энергией между средним течением и волнами, который прекращается при насыщении неустойчивости. Согласно нормировкам п. 1, 2, при реализации в области II режима течения с сильной нелинейностью обратное время роста волн сравнимо с их частотой в линейной задаче $c \sim 1$. Когда инкремент нарастания волн приближается к этой величине, рост основных гармоник (3.1) прекращается и можно принять $B_0 = \text{const} \sim 1$. При качественном рассмотрении значение const остается неопределенным и является свободным параметром задачи. Подчеркнем, что двухгармоническое приближение для давления (3.1) используется только для определения траекторий жидких частиц. Полное поле A и давление P в данной модели находятся из условия сращивания с решением в области I и на стадии насыщения неустойчивости оказываются существенно ангармоническими функциями x и z (см. далее). При этом фактически предполагается, что ведущая роль в процессе формирования вихревой структуры в области II принадлежит полю давления (3.1), а не его изменениям, связанным с эволюцией этой структуры.

Будем искать решение системы (2.2), (3.1) с $B_0 = \text{const}$ в виде ряда теории возмущений по малому времени развития τ : $x = \xi + \eta\tau + x^{(2)} + \dots$, $z = \zeta + z^{(2)} + \dots$, где $x^{(2)}, z^{(2)} \sim \tau^2$ и т.д. Используя начальные условия (2.4), получим с точностью до членов $\sim \tau^2$ выражения

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta\tau + B_0\tau^2 \cos \zeta [\Phi(\vartheta) \sin(\xi + \vartheta) - \Psi(\vartheta) \cos(\xi + \vartheta)], \\ z &= \zeta + \gamma^2 B_0\tau^2 \sin \zeta [\Psi(\vartheta) \sin(\xi + \vartheta) + \Phi(\vartheta) \cos(\xi + \vartheta)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\vartheta = (\eta - c)\tau$; $\Phi = 2(\cos \vartheta - 1 + \vartheta \sin \vartheta)/\vartheta^2$; $\Psi = 2(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)/\vartheta^2$.

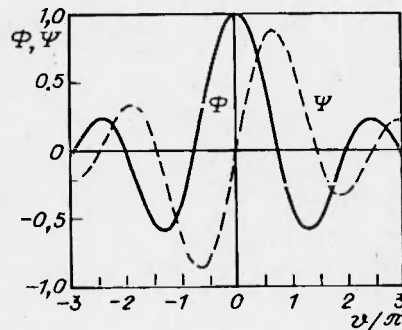


Рис. 2

Функции Φ и Ψ показаны на рис. 2.

Воспользуемся аналитическим представлением (3.2) для определения правых частей (2.5). Подчеркнем, что формирование нелинейного возмущения определяется резонансными частицами (находящимися в области главного максимума функции $\Phi(\eta)$ на рис. 2), траектории которых в наибольшей степени изменяются волновым полем.

При заданных выше начальных возмущениях проекции траекторий частиц на плоскость (x, z) обладают строгими свойствами периодичности и симметрии (аналогично см. [17]). Имеет место зеркальная симметрия по отношению к плоскостям $z = \pi n$ (n — целое), а также симметрия шахматного типа, которая выражается в инвариантности картины траекторий по отношению к одновременному сдвигу по x и z на полпериода π . Плоскости $z = \pi n$ являются материальными поверхностями, на которых функции $K_{1,2,3}$ принимают вид

$$K_1 = -z\zeta x\eta, \quad K_2 = z\zeta x\xi, \quad K_3 = 0. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что $K_{1,2,3} = 0$ при $\partial z/\partial \zeta = 0$. В рамках приближения (3.2) это условие впервые выполняется на резонансной поверхности $\eta = c$ в точках пересечения материальных прямых $\xi = (2n+1)\pi$ и $\xi = 2n\pi$ с плоскостями симметрии $\zeta = 2m\pi$ и $\zeta = (2m+1)\pi$ соответственно (m, n — целые). Это происходит в момент $\tau = \tau_\infty = 1/\gamma\sqrt{B_0}$. Заметим, что проекции материальных прямых $\xi = n\pi$, $\eta = c$ на плоскость x, z остаются прямыми линиями в любой момент времени. Как отмечалось в п. 2, в указанных точках в момент $\tau = \tau_\infty$ возникает сингулярный подъем жидких частиц по Y . Учитывая поведение функций Φ и Ψ на рис. 2, определим полуширину Δ_c резонансного слоя частиц по η из условия $\vartheta \approx \Delta_c \tau_\infty = \pi$. В дальнейшем будем использовать Δ_c как свободный параметр, выражая через него амплитуду волн: $B_0 = (\Delta_c/\pi\gamma)^2$. При $\Delta_c = c$ критический слой, который формируется полем давления (3.1) при выходе неустойчивости на стадию насыщения, охватывает всю область от резонансного уровня $Y = c$ до стенки.

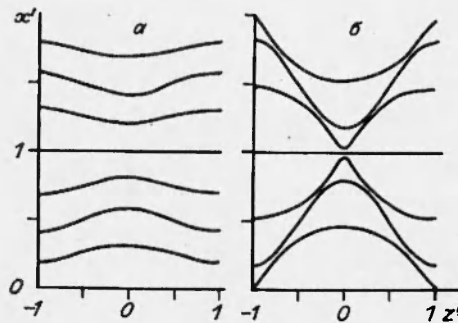


Рис. 3

На рис. 3 показаны мгновенные снимки проекций материальных кривых $\bar{\eta} = c$, $\bar{\xi} = 0,2(n-1)\pi$ ($n = 1, \dots, 11$) на плоскость $x' = (x - c\bar{\tau})/\pi$, $z' = z/\pi$, полученные при $\gamma = 1$, $\Delta_c = 0,4c$ ($a - \bar{\tau} = 0,5\tau_\infty$, $b - \bar{\tau} = \tau_\infty$, здесь восстановлена черта сверху над нормированными переменными (2.1)). В данной постановке задачи материальные линии, очевидно, совпадают с вихревыми линиями течения. Картины линий на рис. 3 следует продолжать периодически путем последовательных сдвигов по x' и z' на период 2. Видно, что при $\tau \rightarrow \tau_\infty$ на вихревых линиях появляются лямбда-образные изломы, вершины которых стягиваются к точкам сингулярного подъема жидких частиц.

Для обоснования предложенного выше подхода производилось построение мгновенных снимков проекций материальных линий на основе численного решения уравнений (2.2), (3.1) с $B_0 = \text{const}$. Были получены картины проекций, близкие к показанным на рис. 3, при незначительном (менее 10%) различии времен образования особенности. Отсюда следует, что формулы (3.2), полученные в рамках метода возмущений по малому τ ,

качественно верно описывают поведение полного решения уравнений (2.2) с давлением (3.1) вплоть до момента обращения производной z_c в нуль.

Покажем теперь, что возмущения траекторий частиц в аппроксимации (3.2) можно считать с возмущениями траекторий, возникающими на стадии нарастания волн. Чтобы найти возмущения траекторий на стадии малой нелинейности, положим в (3.1) $B_0 = \mu \exp(\nu\tau)$ ($\mu \ll 1$ — малый параметр, $\nu > 0$ — локальный инкремент нарастания волн) и будем строить решение (2.2) в рамках теории возмущений по μ . Считая $\nu = \text{const}$, с точностью до членов порядка μ имеем

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta\tau + 2B_0\nu^{-2} \cos \zeta [\bar{\Phi}(\rho) \sin(\xi + \vartheta) - \bar{\Psi}(\rho) \cos(\xi + \vartheta)], \\ z &= \zeta + 2B_0\gamma^2\nu^{-2} \sin \zeta [\bar{\Psi}(\rho) \sin(\xi + \vartheta) + \bar{\Phi}(\rho) \cos(\xi + \vartheta)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\rho = (\eta - c)/\nu$; $\bar{\Phi} = (1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)^2$; $\bar{\Psi} = 2\rho/(1 + \rho^2)^2$. Заметим, что пары функций $\bar{\Phi}, \bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}, \bar{\Psi}$ структурно близки в окрестности резонанса. Приравнявая $B_0(\tau)$ в (3.4) значению $B_0 = \text{const}$ в (3.2) и производя сращивание амплитуд возмущения траекторий частиц в (3.2) и (3.4) на резонансном уровне $\eta = c$, получим $\nu = \sqrt{2}/\tau$. При этом ширина резонанса по η , определяемая главными максимумами функций $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi}$, оказывается приблизительно одной и той же. Момент сращивания τ естественно взять сравнимым со значением τ_∞ , но не слишком близким к нему. Например, при $\tau = (1/2)\tau_\infty$ имеем $\nu = 2\gamma\sqrt{2B_0} \sim 1$, как и должно быть при переходе неустойчивости в стадию насыщения. Таким образом, формулы (3.2) отражают качественные особенности поведения горизонтальных проекций вихревых линий течения при насыщении неустойчивости первоначально малых возмущений.

Прежде чем перейти к описанию результатов расчета трехмерного течения, запишем составное решение задачи в областях I и II. Для полной продольной скорости такое решение можно представить в виде (черта сверху над нормированными переменными далее восстанавливается)

$$v_1 = U(y) + \frac{\varepsilon k_1}{U_0'^2} U'(y) [\bar{u}(\bar{x}, \bar{Y}, \bar{z}, \bar{\tau}) - \bar{Y}]. \quad (3.5)$$

Можно показать, что выражение (1.6) для отклонения материальной поверхности в области I совпадает с асимптотикой этой величины в области II при $Y_0 = y_0/\varepsilon \rightarrow \infty$. Поэтому составное решение для полной координаты y точек на смещенной материальной поверхности принимает вид

$$y = \frac{\varepsilon k_1}{U_0'^2} \bar{Y}(\bar{x}, \bar{Y}_0, \bar{z}, \bar{\tau}), \quad (3.6)$$

где $\bar{Y}_0 = (\bar{Y}/Y)Y_0$ (см. (2.1)). Материальные (вихревые) линии, лежащие в плоскости $\bar{\eta} = \text{const}$, находятся при $\bar{Y}_0 = \bar{\eta}$ также и на поверхности (3.6). Поэтому формулу (3.6) можно использовать для вычисления подъема жидких частиц на этих линиях.

При появлении шиповидных провалов на осциллограммах продольной скорости в экспериментах [2] реализовались значения волнового числа (отнесенного к $1/\delta$) $\varepsilon k_1 \sim 0,7$ и фазовой скорости волн (отнесенной к U_∞) $\varepsilon c \sim 0,38$. При этом критический уровень расположен на высоте $y \approx 0,24$ (следует учесть, что $U_0' \sim 1,6$ для профиля Блазиуса). При формальном использовании асимптотического решения с такой фазовой скоростью к области II относится значительная часть пограничного слоя. В рамках асимптотической теории, согласно п. 1, $\varepsilon c = (\varepsilon k_1/U_0')\sqrt{1 + \gamma^2}$. Далее приводятся результаты вычислений, проведенных при $\gamma = 1$, $\varepsilon c = 0,3$ ($\varepsilon k_1 =$

0,34) и $\Delta_c = 0,4c$. Профиль скорости в (3.3) аппроксимировался функцией, близкой к профилю Блазиуса: $U = 0,4y^6 - y^4 + 1,6y$ при $0 \leq y \leq 1$ и $U = 1$ при $y \geq 1$. Заметим, что аналогичные результаты получаются при других значениях параметров, а также без учета дисперсионной связи фазовой скорости с волновым числом.

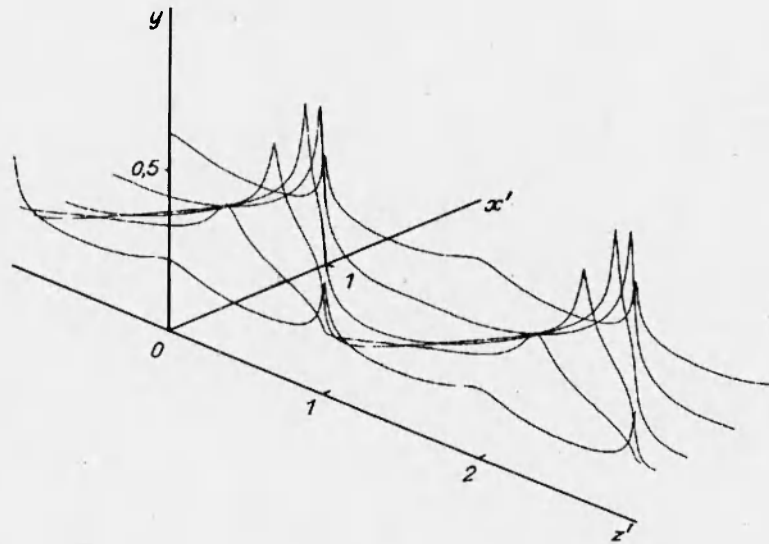


Рис. 4

Результаты расчетов ряда основных характеристик поля течения представлены на рис. 4–6. На рис. 4 показан мгновенный снимок системы трехмерных вихревых линий, находящихся в начальный момент на резонансном уровне $\bar{\eta} = \bar{c}$ ($\xi = 0, 2\pi(n-1), n = 1, \dots, 6$, x' и z' те же, что на рис. 3). Построение произведено при $\tau = 0,95\tau_\infty$ в пределах двух периодов по ζ . При расчетах в качестве исходных задавались значения начальных координат частиц $\bar{\xi}, \bar{\zeta}$ и $\bar{\eta}$ и по формулам (3.2) вычислялись их координаты x, z в момент τ . Затем путем решения (3.2) методом итераций находились начальные координаты частиц ξ_0, ζ_0 в плоскости $\bar{\eta} = 0$, имеющих те же координаты x, z в момент τ . Искомое значение Y определялось в результате численного интегрирования (2.5), начиная от $Y = 0$ до уровня \bar{Y} , на котором достигалось исходное значение $\bar{\eta}$.

На рис. 5 показаны зависимости от x полной продольной скорости v_1 на различных уровнях по y в плоскости симметрии $\bar{z} = 0$, полученные при $\tau = 0,97\tau_\infty$ (кривые 1–6 отвечают $y = 0,1; 0,19; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8$). На рис. 6 приведена последовательность локальных профилей продольной скорости в момент $\tau = 0,94\tau_\infty$ (кривые 1–4 соответствуют $x = 0,5(n-1)\pi, n = 1-4$). При построении кривых на рис. 5, 6 система (2.5) интегрировалась с учетом выражений (3.3) для наперед заданных значений x .

Качественные особенности трехмерного течения, представленные зависимостями на рис. 4–6, объясняются возникновением областей с сильным растяжением материальных элементов в вертикальном направлении в результате их поперечного сжатия при автономном движении системы частиц в заданном поле давления (3.1). Этот эффект приводит к локальным выбросам низкоскоростной жидкости в верхние слои течения, которые хорошо видны на рис. 4. Картина материальных линий, подобная показанной на рис. 4, была получена в [15] при прямом численном моделировании

перехода. В результате подъема низкоскоростной жидкости и увеличения скорости ее сноса первичным течением на высоких уровнях по y формируются шиповидные провалы на осцилляциях продольной скорости вдоль x (рис. 5). Эти же процессы определяют формирование мгновенных профилей продольной скорости с точками перегиба (рис. 6).

Для сопоставления полученных результатов с данными измерений зависимости продольной скорости от времени в фиксированной точке можно воспользоваться конвективной гипотезой, согласно которой производится замена $x_1 \rightarrow -U_c t$, где U_c — скорость сноса возмущения. Тогда можно видеть, что зависимости на рис. 5, 6 находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментальными данными (см. [рис. 3, з и 11, а-г в 2]). Так прослеживается переход от осцилляций с опрокинутыми фронтами на уровне критического слоя ($y \approx 0,19$ на рис. 5) к шиповидным провалам на более высоких уровнях. Амплитуда шипов может составлять значительную часть от скорости свободного течения. Наличие в экспериментах осциллограмм с реверсом скорости при $y > 1$, по-видимому, связано с образованием тонкого вихревого жгута при растяжении вихревых трубок в областях локального подъема частиц (эта тенденция просматривается на рис. 4). Вихревой жгут усиливает дефект скорости в шипах на высоких уровнях по y , однако его описание выходит за рамки приближения плоского вихря.

В соответствии с условиями сращивания п. 2 $\bar{u} - Y \rightarrow A$ при $Y \rightarrow \infty$. Расчеты показывают, что разность $\bar{u} - Y$ действительно стремится к фиксированной функции от x . Как видно из рис. 5, поле A и, следовательно, нормированное давление P становятся несинусоидальными функциями x (ослабление осцилляций при увеличении y связано с действием фактора U' в формуле (3.5)). Это указывает на появление самосогласованного давления, которое, по-видимому, препятствует образованию сингулярности подъема частиц. Последнее косвенно подтверждается результатами модельных расчетов, описанных в [29, 30], когда особенность в плоском вихре исключалась при учете порожденных им градиентов давления. При этом возникали осцилляции продольной скорости, которые применительно к нашей модели можно расценить как аналог умножения числа шипов (что также наблюдается в экспериментах по переходу [2]). Добавим, что картины проекций вихревых линий на рис. 3 качественно согласуются с результатами прямого численного моделирования развития трехмерного возмущения в идеальном течении [11].

Таким образом, предложенная асимптотическая модель процесса генерации трехмерных вихревых структур при насыщении нелинейной неустойчивости в пограничном слое описывает ряд качественных особенно-

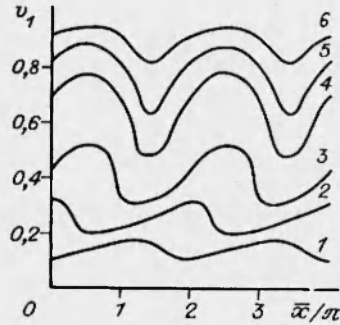


Рис. 5

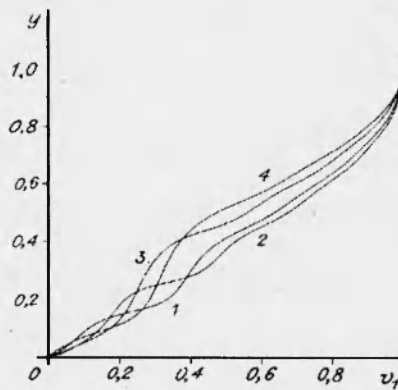


Рис. 6

стей поля течения, наблюдаемых на поздней стадии перехода в лабораторных экспериментах и при численном моделировании. В заключение обратим внимание на принципиальное различие процессов формирования трехмерных и двумерных структур в идеальном течении. Трехмерные структуры формируются в результате насыщения нелинейной неустойчивости, тогда как двумерная задача для нелинейных возмущений в отсутствие вязкости консервативна. Применение описанной в п. 3 модели к двумерной задаче дает опрокидывание склонов первоначально синусоидального возмущения, что согласуется с решением уравнения Бенджамина — Оно для функции A при исключении из него вклада давления (члена с преобразованием Гильберта). В двумерной задаче без учета самосогласованного давления появляется сингулярность градиента поля A , а в трехмерной — самого поля. Самосогласованное давление существенным образом влияет на форму двумерных нелинейных волн, тогда как для трехмерных возмущений, которые в отсутствие самосогласованного давления имеют симметричную солитоноподобную форму, его роль в этом смысле, по-видимому, не столь принципиальна. Поэтому рассмотренная модель не дает хороших результатов при включении в выражение для давления (3.1) достаточно сильной двумерной волны. Генерация трехмерных структур без нарастания двумерной волны, характерная для невязкой задачи, возможна также в вязком течении при реализации в нем сценария быстрого перехода к турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В., Левченко В. Я., Старик В. С. Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Рамазанов М. П. Природа К-разрушения ламинарного пограничного слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1989. № 2.
3. Kachanov Yu. S. The mechanisms of formation and breakdown of soliton-like coherent structures in boundary layers // Advances in Turbulence 3/Eds. A.V.Johansson, P.H.Alfredsson. Berlin: Springer, 1991. P. 42–51.
4. Craik A. D. D. Nonlinear resonant instability in boundary layers // J.Fluid Mech. 1971. V. 50, pt 2.
5. Usher J. R., Craik A. D. D., Hendriks F. Nonlinear wave interactions in shear flows. Pt 2. Third-order theory // J.Fluid Mech. 1975. V. 70, N 3.
6. Володин А. Г., Зельман М. Б. Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 5.
7. Bayly B. J., Orszag S. A., Herbert T. Instability mechanisms in shear-flow transition // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 359–391.
8. Craik A. D. D. Wave interaction and fluid flows. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1985.
9. Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штерн В. Н. Число Рейнольдса перехода в плоском канале // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 1.
10. Рахматуллаев Р. Д., Штерн В. Н. Порог возникновения трехмерных структур при течении в плоском канале. Новосибирск, 1989. (Препр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики).
11. Leonard A. Vortex simulation of three-dimensional spotlike disturbances in a laminar boundary layer // Turbulent shear flows. V. 2. Berlin: Springer, 1980. P. 67–77.
12. Orszag S. A. Numerical studies of transition in planar shear flows // Laminar-Turbulent Transition: Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1979. Berlin: Springer, 1980. P. 153–162.

13. Laurien E., Kleiser L. Numerical simulation of boundary layer transition and transition control // J. Fluid Mech. 1989. V. 199.
14. Fasel H. F., Rist U., Konzelmann U. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary layer transition // AIAA J. 1990. V. 28, N 1.
15. Reed H. L. Gallery of fluid motion // Phys. Fluids A. 1992. V. 4, N 9.
16. Reutov V. P. The critical layer and nonlinear waves in the wall flows // Laminar-Turbulent Transition: Proc. IUTAM Symp., Novosibirsk, 1984. Berlin: Springer, 1985. P. 81–86.
17. Реутов В. П. Нелинейный критический слой и формирование продольных вихрей при взаимодействии волн в сдвиговых течениях // ПМТФ. 1987. № 5.
18. Жук В. И., Рыжов О. С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 1.
19. Жук В. И., Рыжов О. С. О трехмерных невязких возмущениях, индуцирующих собственный градиент давления в пограничном слое // Докл. АН СССР. 1989. Т. 301, № 1.
20. Рыжов О. С. Об образовании упорядоченных вихревых структур из неустойчивых колебаний в пограничном слое // ЖВММФ. 1990. Т. 30, № 12.
21. Качанов Ю. С., Рыжов О. С. Формирование солитонов в переходном пограничном слое. Теория и эксперимент // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1992. № 1.
22. Kachanov Y. S., Ryzhov O. S. Formation of solitons in transitional boundary layer. Theory and experiment // Boundary Layer Transition Control Conference, Cambridge, U.K., 1991: Proc.
23. Balagondar P. M., Maslow S. A., Melkonian S. The propagation of finite-amplitude waves in a model boundary layer // Stud. Appl. Math. 1987. V. 76, N 2.
24. Шрира В. И. О «приповерхностных» волнах верхнего квазиоднородного слоя океана // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308, № 3.
25. Абрамян Л. А., Степанянц Ю. А., Шрира В. И. Неоднородные солитоны в сдвиговых течениях типа пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1992. Т. 327, № 4.
26. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
27. Reutov V. P. A note on the mechanism of the resonant nonlinear instability in boundary layers // Research Reports in Physics: Nonlinear Waves 3 / Eds. A. V. Gaponov-Grekhov et al. Berlin: Springer, 1990. P. 129–132.
28. Schmid P. J., Henningson D. S. A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves // Phys. Fluids A. 1992. V. 4, N 9.
29. Russell J. R., Landahl M. T. The evolution of a flat-eddy near a wall in an inviscid shear flow // Phys. Fluids. 1984. V. 27, N 3.
30. Landahl M. T. Flat-eddy model for coherent structures in boundary layer turbulence // Theoretical Approaches to Turbulence. N.Y., 1985. P. 137–153.

Поступила в редакцию 21/XII 1993 г.,
в окончательном варианте — 21/IV 1994 г.